

EXPOSÉ I

STRUCTURES ALGÈBRIQUES. COHOMOLOGIE DES GROUPES

par M. DEMAZURE.

Cet exposé se compose de deux parties ; la première rassemble un certain nombre de définitions générales et pose des notations qui seront souvent utilisées par la suite, la seconde traite de la cohomologie des groupes et aboutit au théorème 5.3.3 (nullité de la cohomologie des groupes diagonalisables). 1

Nous choisissons une fois pour toutes un Univers. Toutes les définitions posées et toutes les constructions effectuées seront relatives à cet Univers. Nous nous permettrons systématiquement l'abus de langage suivant : pour définir un foncteur $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, nous nous contenterons de définir l'objet $f(S)$ de \mathcal{C}' pour tout objet S de \mathcal{C} , chaque fois qu'il n'y aura aucune ambiguïté sur la manière de définir $f(h)$ pour une flèche h de \mathcal{C} . En pratique, nous dirons : soit $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ le foncteur défini par $f(S) = \dots$.

1. Généralités

1.1. Soit \mathcal{C} une catégorie. On notera $\widehat{\mathcal{C}}$ la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathcal{C}^\circ, (\mathbf{Ens}))$ des foncteurs contravariants de \mathcal{C} dans la catégorie (\mathbf{Ens}) des ensembles ⁽¹⁾. Il existe un foncteur canonique $\mathbf{h} : \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ qui associe à tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ le foncteur \mathbf{h}_X tel que

$$\mathbf{h}_X(S) = \text{Hom}(S, X).$$

Pour tout foncteur $\mathbf{F} \in \text{Ob}(\widehat{\mathcal{C}})$, on définit (cf. par exemple EGA 0_{III}, 8.1.4) une bijection 2

$$\text{Hom}(\mathbf{h}_X, \mathbf{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{F}(X). \quad (2)$$

⁽⁰⁾N.D.E. : version 1.1 du 20 janvier 2010 : ajout de 4.7.1.2 et 5.1.1 (auparavant 3.1.1–2, 3.2.1, 4.6.6, 4.8, 5.1, 5.2, 5.2.0–3, 5.3.1)

⁽¹⁾N.D.E. : On l'appelle la *catégorie des préfaisceaux* sur \mathcal{C} , cf. IV.4.3.

⁽²⁾N.D.E. : Ce résultat est souvent appelé « Lemme de Yoneda » ; nous utiliserons cette terminologie dans d'autres N.D.E.

En particulier, pour tout couple X, X' d'objets de \mathcal{C} , l'application canonique ci-dessous est bijective :

$$\mathrm{Hom}(X, X') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathbf{h}_X, \mathbf{h}_{X'});$$

i.e. le foncteur \mathbf{h} est *pleinement fidèle*. Il définit donc un isomorphisme de \mathcal{C} sur une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{C}}$, et une équivalence de \mathcal{C} avec la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{C}}$ formée des foncteurs *représentables* (i.e. isomorphes à un foncteur de la forme \mathbf{h}_X). Dans la suite, nous identifierons souvent X et \mathbf{h}_X . Les numéros suivants ont pour but de montrer que cette identification peut se faire sans danger.

1.2. ⁽³⁾ On dira que \mathbf{F} est un *sous-objet* (ou un sous-foncteur) de \mathbf{G} si $\mathbf{F}(S)$ est un sous-ensemble de $\mathbf{G}(S)$ pour chaque S .

Dans $\widehat{\mathcal{C}}$ les limites projectives « quelconques » *existent* et se calculent par :

$$\left(\varprojlim_i \mathbf{F}_i\right)(S) = \varprojlim_i \mathbf{F}_i(S). \quad (4)$$

En particulier les produits fibrés sont définis par :

$$\left(\mathbf{F} \times_{\mathbf{G}} \mathbf{F}'\right)(S) = \mathbf{F}(S) \times_{\mathbf{G}(S)} \mathbf{F}'(S). \quad (5)$$

3 Nous choisirons comme objet final de $\widehat{\mathcal{C}}$ le foncteur \mathbf{e} tel que $\mathbf{e}(S) = \{\emptyset\}$ ⁽⁶⁾. Tout $\mathbf{F} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathcal{C}})$ possède un morphisme unique dans \mathbf{e} et on pose

$$\mathbf{F} \times_{\mathbf{e}} \mathbf{F}' = \mathbf{F} \times \mathbf{F}'.$$

Le foncteur \mathbf{h} commute aux limites projectives ; en particulier pour que $X \times X'$ existe ($X, X' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$), resp. pour que \mathcal{C} admette un objet final e , il faut et il suffit que $\mathbf{h}_X \times \mathbf{h}_{X'}$ soit représentable, resp. \mathbf{e} soit représentable, et on a

$$\mathbf{h}_X \times \mathbf{h}_{X'} \simeq \mathbf{h}_{X \times X'} \quad \text{et} \quad \mathbf{h}_e \simeq \mathbf{e}.$$

Un *monomorphisme* de $\widehat{\mathcal{C}}$ n'est autre qu'un morphisme $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ tel que pour $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, l'application d'ensembles correspondante $\mathbf{F}(S) \rightarrow \mathbf{G}(S)$ soit injective. ⁽⁷⁾

Le foncteur Γ . Pour tout $\mathbf{F} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathcal{C}})$ on pose

$$\Gamma(\mathbf{F}) = \mathrm{Hom}(\mathbf{e}, \mathbf{F});$$

⁽³⁾N.D.E. : On a modifié l'ordre, pour introduire les produits fibrés avant les monomorphismes, cf. N.D.E. (7).

⁽⁴⁾N.D.E. : De même, les limites inductives « quelconques » existent et se calculent « *argument par argument* », c.-à-d., $(\varinjlim_i \mathbf{F}_i)(S) = \varinjlim_i \mathbf{F}_i(S)$; mais en général le foncteur \mathbf{h} ne commute *pas* aux limites inductives.

⁽⁵⁾N.D.E. : En particulier, le *noyau* d'un couple de morphismes $u, v : \mathbf{F} \rightrightarrows \mathbf{G}$ est le sous-foncteur $\mathrm{Ker}(u, v)$ de \mathbf{F} défini par $\mathrm{Ker}(u, v)(S) = \{x \in \mathbf{F}(S) \mid u(x) = v(x)\}$.

⁽⁶⁾N.D.E. : $\{\emptyset\}$ (l'ensemble des parties de l'ensemble vide) désigne l'ensemble à un élément.

⁽⁷⁾N.D.E. : Si $\mathbf{F}(S) \rightarrow \mathbf{G}(S)$ est injectif pour tout S , il est clair que $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ est un monomorphisme ; la réciproque se voit en considérant le diagramme $\mathbf{F} \times_{\mathbf{G}} \mathbf{F} \rightrightarrows \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$. On obtient ainsi que : « $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ est un monomorphisme si et seulement si le morphisme diagonal $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F} \times_{\mathbf{G}} \mathbf{F}$ est un isomorphisme » (cf. EGA I, 5.3.8). De même, il est clair que si $\mathbf{F}(S) \rightarrow \mathbf{G}(S)$ est surjectif pour tout S , alors $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ est un *épimorphisme*, et la réciproque se voit en considérant la somme amalgamée $\mathbf{G} \coprod^{\mathbf{F}} \mathbf{G}$, cf. la démonstration du lemme 4.4.4 dans l'Exp. IV.

un élément de $\Gamma(\mathbf{F})$ est donc une famille $(\gamma_S)_{S \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$, $\gamma_S \in \mathbf{F}(S)$ telle que pour toute flèche $f : S' \rightarrow S''$ de \mathcal{C} , on ait $\mathbf{F}(f)(\gamma_{S''}) = \gamma_{S'}$.

On pose $\Gamma(X) = \Gamma(\mathbf{h}_X)$ pour $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Si \mathcal{C} a un objet final e , on a donc un isomorphisme $\Gamma(X) \simeq \text{Hom}(e, X)$.

1.3. Soit $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. On note $\mathcal{C}/_S$ la catégorie des objets de \mathcal{C} au-dessus de S , i.e. la catégorie dont les objets sont les flèches $f : T \rightarrow S$ de \mathcal{C} , l'ensemble $\text{Hom}(f, f')$ étant le sous-ensemble de $\text{Hom}(T, T')$ formé des u tels que $f = f' \circ u$. Si \mathcal{C} possède un objet final e , alors $\mathcal{C}/_e$ est isomorphe à \mathcal{C} . La catégorie $\mathcal{C}/_S$ possède un objet final : la flèche identique $S \rightarrow S$.

Si $f : T \rightarrow S$ est un objet de $\mathcal{C}/_S$, alors on peut former la catégorie $(\mathcal{C}/_S)_{/f}$ que l'on note par abus de langage $(\mathcal{C}/_S)_{/T}$ et on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{C}/_T \simeq (\mathcal{C}/_S)_{/T}.$$

Cette construction s'applique aussi à la catégorie $\widehat{\mathcal{C}}$, on définit en particulier la catégorie $\widehat{\mathcal{C}}_{/\mathbf{h}_S}$. D'autre part, on peut former la catégorie $\widehat{\mathcal{C}}/_S$.

Si $f : T \rightarrow S$ est un objet de $\mathcal{C}/_S$, alors $\Gamma(f)$ s'identifie à l'ensemble $\Gamma(T/S)$ des sections de T au-dessus de S , c'est-à-dire des flèches $S \rightarrow T$ inverses à droite de f . Remarquons que $\mathbf{h}_f : \mathbf{h}_T \rightarrow \mathbf{h}_S$ est alors un objet de $\widehat{\mathcal{C}}_{/\mathbf{h}_S}$ et que l'on a :

$$\Gamma(\mathbf{h}_f) \simeq \Gamma(\mathbf{h}_T/\mathbf{h}_S) \simeq \Gamma(T/S) \simeq \Gamma(f).$$

1.4. On se propose maintenant de définir une *équivalence des catégories* $\widehat{\mathcal{C}}/_S$ et $\widehat{\mathcal{C}}_{/\mathbf{h}_S}$, c'est-à-dire de prouver que « se donner un foncteur sur la catégorie des objets de \mathcal{C} au-dessus de S , c'est « la même chose » que se donner un foncteur sur \mathcal{C} muni d'un morphisme dans \mathbf{h}_S ».

(i) **Construction de $\alpha_S : \widehat{\mathcal{C}}_{/\mathbf{h}_S} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}/_S$.**

Soit d'abord $H : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{h}_S$ un objet de $\widehat{\mathcal{C}}_{/\mathbf{h}_S}$. On doit définir un foncteur $\alpha_S(H)$ sur $\mathcal{C}/_S$. Soit donc d'abord $f : T \rightarrow S$ un objet de $\mathcal{C}/_S$; définissons $\alpha_S(H)(f)$ comme l'image inverse de $f \in \mathbf{h}_S(T)$ par l'application $H(T) : \mathbf{F}(T) \rightarrow \mathbf{h}_S(T)$.⁽⁸⁾

Soit ensuite $u : f \rightarrow f'$ une flèche de $\mathcal{C}/_S$; alors $\mathbf{F}(u) : \mathbf{F}(T') \rightarrow \mathbf{F}(T)$ induit une application de $\alpha_S(H)(f')$ dans $\alpha_S(H)(f)$ que l'on note $\alpha_S(H)(u)$. On vérifie aussitôt que les applications

$$f \longmapsto \alpha_S(H)(f) \quad \text{et} \quad u \longmapsto \alpha_S(H)(u)$$

définissent bien un foncteur sur $\mathcal{C}/_S$, donc un objet $\alpha_S(H)$ de $\widehat{\mathcal{C}}/_S$.

⁽⁸⁾N.D.E. : *Par exemple*, si $\mathbf{F} = \mathbf{h}_X$ alors H correspond à un morphisme $h : X \rightarrow S$ et $H(T) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, S)$ est l'application $g \mapsto h \circ g$, d'où $\alpha_S(\mathbf{h}_X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}/_S}(-, X)$.

Soient enfin $H : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{h}_S$ et $H' : \mathbf{F}' \rightarrow \mathbf{h}_S$ deux objets de $\widehat{\mathcal{C}}/\mathbf{h}_S$ et $U : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}'$ un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}/\mathbf{h}_S$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F} & \xrightarrow{U} & \mathbf{F}' \\ & \searrow H & \swarrow H' \\ & \mathbf{h}_S & \end{array} .$$

5 Alors pour tout $f : T \rightarrow S$, l'application $U(T) : \mathbf{F}(T) \rightarrow \mathbf{F}'(T)$ induit une application

$$\alpha_S(U)(f) : \alpha_S(H)(f) \longrightarrow \alpha_S(H')(f),$$

ce qui définit un morphisme de foncteurs

$$\alpha_S(U) : \alpha_S(H) \longrightarrow \alpha_S(H').$$

On vérifie aisément que les applications

$$H \mapsto \alpha_S(H) \quad \text{et} \quad U \mapsto \alpha_S(U)$$

définissent bien un foncteur $\alpha_S : \widehat{\mathcal{C}}/\mathbf{h}_S \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}/S$.

(ii) **Proposition 1.4.1.** — *Le foncteur $\alpha_S : \widehat{\mathcal{C}}/\mathbf{h}_S \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}/S$ est une équivalence de catégories.*

Indiquons seulement le principe de la construction d'un foncteur quasi-inverse $\beta_S : \widehat{\mathcal{C}}/S \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}/\mathbf{h}_S$. Soit \mathbf{G} un foncteur sur \mathcal{C}/S ; pour tout objet T de \mathcal{C} , on pose

$$\beta_S(\mathbf{G})(T) = \text{somme des ensembles } \mathbf{G}(f) \text{ pour } f \in \text{Hom}(T, S) = \mathbf{h}_S(T),$$

ce qui définit un foncteur $\beta_S(\mathbf{G})$ sur \mathcal{C} , qui est muni d'une projection évidente sur \mathbf{h}_S .

1.5. *L'équivalence α_S commute aux foncteurs Γ .* En d'autres termes, si $H : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{h}_S$ est un objet de $\widehat{\mathcal{C}}/\mathbf{h}_S$ et $\alpha_S(H)$ l'objet correspondant de $\widehat{\mathcal{C}}/S$, on a

$$\Gamma(\alpha_S(H)) \simeq \Gamma(H) \simeq \Gamma(\mathbf{F}/\mathbf{h}_S).$$

L'équivalence α_S commute aux foncteurs \mathbf{h} , c.-à-d., si $f : T \rightarrow S$ est un objet de \mathcal{C}/S , $\mathbf{h}_f : \mathbf{h}_T \rightarrow \mathbf{h}_S$ est un objet de $\widehat{\mathcal{C}}/\mathbf{h}_S$ dont le transformé par α_S n'est autre que $\mathbf{h}_{\mathcal{C}/S}(f)$, où

$$\mathbf{h}_{\mathcal{C}/S} : \mathcal{C}/S \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}/S$$

6 est le foncteur canonique ⁽⁹⁾. En conséquence :

Proposition 1.5.1. — *Soit $H : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{h}_S$ un objet de $\widehat{\mathcal{C}}/\mathbf{h}_S$. Pour que $\alpha_S(H) : (\mathcal{C}/S)^\circ \rightarrow (\mathbf{Ens})$ soit représentable, il faut et il suffit que $\mathbf{F} : \mathcal{C}^\circ \rightarrow (\mathbf{Ens})$ soit représentable; si $\mathbf{F} \simeq \mathbf{h}_T$, alors $\alpha_S(H)$ est représentable par l'objet $T \rightarrow S$ de \mathcal{C}/S .*

⁽⁹⁾N.D.E. : cf. la N.D.E. (8).

L'équivalence α_S est transitive en S : si $f : T \rightarrow S$ est un objet de $\mathcal{C}/_S$, on a un diagramme commutatif d'équivalences

$$\begin{array}{ccccc} (\widehat{\mathcal{C}/_{\mathbf{h}_S}})_{/\mathbf{h}_T} & \xrightarrow{\alpha_S/\mathbf{h}_T} & (\widehat{\mathcal{C}/_S})_{/\mathbf{h}_T} & \xrightarrow{\alpha_f} & (\widehat{\mathcal{C}/_S})_{/T} \\ & \cong \searrow & & & \swarrow \cong \\ & & \widehat{\mathcal{C}}_{/\mathbf{h}_T} & \xrightarrow{\alpha_T} & \widehat{\mathcal{C}}_{/T} \end{array},$$

où α_S/\mathbf{h}_T désigne (provisoirement) la restriction (cf. 1.6) du foncteur α_S aux objets au-dessus de \mathbf{h}_T .

1.6. Changement de base dans un foncteur. — Pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, on a un foncteur canonique

$$i_S : \mathcal{C}/_S \longrightarrow \mathcal{C}$$

défini par $i_S(f) = T$ si f est la flèche $T \rightarrow S$. Si $f : T \rightarrow S$ est un objet de $\mathcal{C}/_S$, on note $i_{T/S} = i_f$ le foncteur :

$$i_{T/S} : (\mathcal{C}/_S)_{/T} \longrightarrow \mathcal{C}/_S,$$

et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{C}/_S)_{/T} & \xrightarrow{i_{T/S}} & \mathcal{C}/_S & \xrightarrow{i_S} & \mathcal{C} \\ & \cong \searrow & & & \swarrow i_T \\ & & \mathcal{C}/_T & & \end{array},$$

c'est-à-dire, en identifiant $(\mathcal{C}/_S)_{/T}$ à $\mathcal{C}/_T$ comme nous le ferons désormais,

7

$$i_S \circ i_{T/S} = i_T.$$

De la même manière, si on identifie \mathcal{C} et $\mathcal{C}/_e$, lorsque \mathcal{C} possède un objet final e , alors $i_{S/e} : \mathcal{C}/_S \rightarrow \mathcal{C}/_e$ s'identifie à i_S .

Pour $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ (resp. $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}/_S)$), soit $p_S(X)$ (resp. $p_{T/S}(Y)$) l'objet de $\mathcal{C}/_S$ (resp. de $\mathcal{C}/_T$) lorsqu'il existe, défini par $X \times S$ (resp. $Y \times_S T$) muni de sa deuxième projection :

$$\begin{array}{ccc} X \times S & & Y \times_S T \\ \downarrow p_S(X) & \text{resp.} & \downarrow p_{T/S}(Y) \\ S & & T \end{array}.$$

Le foncteur (partiellement défini) p_S (resp. $p_{T/S}$) s'appelle *foncteur de changement de base*. C'est par définition du produit (resp. du produit fibré) le foncteur adjoint à

droite du foncteur i_S (resp. $i_{T/S}$) ⁽¹⁰⁾. On note également

$$p_S(X) = X_S \quad \text{et} \quad p_{T/S}(Y) = Y_T.$$

Le foncteur i_S définit un foncteur (*restriction*)

$$i_S^* : \widehat{\mathcal{C}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_S;$$

on note $\mathbf{F}_S = i_S^*(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \circ i_S$. On a évidemment

$$i_{T/S}^* \circ i_S^* = i_T^*,$$

c'est-à-dire pour tout foncteur $\mathbf{F} \in \text{Ob}(\widehat{\mathcal{C}})$,

$$(\mathbf{F}_S)_T = \mathbf{F}_T.$$

8 La notation demande une justification que voici :

Proposition 1.6.1. — *Pour que le foncteur $(\mathbf{h}_X)_S : (\mathcal{C}_S)^\circ \rightarrow (\mathbf{Ens})$ soit représentable, il faut et il suffit que le produit $X \times S$ existe. On a alors*

$$(\mathbf{h}_X)_S \simeq \mathbf{h}_{X_S}.$$

Ceci montre que \mathbf{F}_S a deux interprétations : *restriction* du foncteur \mathbf{F} à \mathcal{C}_S , foncteur obtenu par *changement de base* $e \leftarrow S$. Ceci conduit à la notation suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{F} & \text{---} & \mathbf{F}_S & \text{---} & \mathbf{F}_T \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ e & \longleftarrow & S & \longleftarrow & T \end{array}$$

qui rend bien compte des deux interprétations précédentes.

Remarquons que l'on a

$$\Gamma(\mathbf{F}_S) \simeq \text{Hom}(\mathbf{h}_S, \mathbf{F}) \simeq \mathbf{F}(S),$$

en particulier

$$\Gamma(X_S) \simeq \text{Hom}(S, X).$$

1.7.0. — ⁽¹¹⁾ Soit \mathbf{E} un objet de $\widehat{\mathcal{C}}$. Considérons la catégorie $\mathcal{C}_{/\mathbf{E}}$ des *objets de \mathcal{C} au-dessus de \mathbf{E}* : ses objets sont les couples (V, ρ) formés d'un objet V de \mathcal{C} et d'un $\widehat{\mathcal{C}}$ -morphisme $\rho : \mathbf{h}_V \rightarrow \mathbf{E}$, i.e. $\rho \in \mathbf{E}(V)$; un morphisme de (V, ρ) vers (V', ρ') est la donnée d'un \mathcal{C} -morphisme $f : V \rightarrow V'$ tel que $\rho' \circ f = \rho$ (i.e. $\mathbf{E}(f)(\rho') = \rho$). Notons \mathbf{L} le foncteur

$$\varinjlim_{(V, \rho) \in \mathcal{C}_{/\mathbf{E}}} \mathbf{h}_V,$$

⁽¹⁰⁾N.D.E. : i.e. si $g : U \rightarrow S$ (resp. $h : V \rightarrow T$) est un objet de \mathcal{C}_S (resp. \mathcal{C}_T) alors $i_S(g) = U$ et $i_{T/S}(h)$ est l'objet $f \circ h : V \rightarrow S$ de \mathcal{C}_S , et l'on a :

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_S}(U, X \times S) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X) \quad \text{resp.} \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(V, X \times_S T) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}_S}(V, X).$$

⁽¹¹⁾N.D.E. : On a ajouté le lemme ci-dessous (cf. SGA 4, I.3.4), il est utilisé dans la démonstration de 1.7.1 et sera utile à plusieurs reprises dans la suite.

c.-à-d., pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathbf{L}(S) = \varinjlim_{(V,\rho)} \mathbf{h}_V(S)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de triplets (V, ρ, v) , où $v : S \rightarrow V$ est un \mathcal{C} -morphisme, et où l'on identifie (V, ρ, v) à $(V', \rho', f \circ v)$ pour tout \mathcal{C} -morphisme $f : V \rightarrow V'$ tel que $\rho' \circ f = \rho$.

Alors, l'application $\phi_{\mathbf{E}}(S)$ qui à la classe de (V, ρ, v) associe l'élément $\rho \circ v$ de $\mathbf{E}(S)$ est bien définie, et définit un morphisme de foncteurs

$$\phi_{\mathbf{E}} : \varinjlim_{(V,\rho) \in \widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{E}}} \mathbf{h}_V \longrightarrow \mathbf{E}.$$

Lemme. — $\phi_{\mathbf{E}}$ est un isomorphisme.

En effet, soit $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Tout $x \in \mathbf{E}(S)$ est l'image par $\phi_{\mathbf{E}}(S)$ du triplet (S, x, id_S) ; ceci montre que $\phi_{\mathbf{E}}(S)$ est surjective. D'autre part, soient $\ell_1 = (V_1, \rho_1, v_1)$ et $\ell_2 = (V_2, \rho_2, v_2)$ deux éléments de $\mathbf{L}(S)$ ayant même image dans $\mathbf{E}(S)$; posons $\gamma = \rho_1 \circ v_1 = \rho_2 \circ v_2$. Alors ℓ_1 et ℓ_2 sont tous deux égaux, dans $\mathbf{L}(S)$, à la classe du triplet (S, γ, id_S) . Ceci montre que $\phi_{\mathbf{E}}(S)$ est injective.

Corollaire. — Pour tout objet \mathbf{F} de $\widehat{\mathcal{C}}$, on a

$$\text{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = \varprojlim_{(V,\rho) \in \widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{E}}} \mathbf{F}(V).$$

1.7. Objets Hom, Isom, etc. — Soient \mathbf{F} et \mathbf{G} deux objets de $\widehat{\mathcal{C}}$. Nous allons définir un autre objet de $\widehat{\mathcal{C}}$ de la manière suivante :

$$\underline{\text{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})(S) = \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}/S}(\mathbf{F}_S, \mathbf{G}_S) \simeq \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}/\mathbf{h}_S}(\mathbf{F} \times \mathbf{h}_S, \mathbf{G} \times \mathbf{h}_S) \simeq \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathbf{F} \times \mathbf{h}_S, \mathbf{G}).$$

L'objet $\underline{\text{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ défini ci-dessus possède les propriétés suivantes :

(i) $\underline{\text{Hom}}(\mathbf{e}, \mathbf{G}) \simeq \mathbf{G}$ (12)

(ii) La formation de $\underline{\text{Hom}}$ commute à l'extension de la base :

$$\underline{\text{Hom}}(\mathbf{F}_S, \mathbf{G}_S) \simeq \underline{\text{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})_S.$$

(iii) $(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \mapsto \underline{\text{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ est un bifoncteur, contravariant en \mathbf{F} et covariant en \mathbf{G} .

Ces trois propriétés sont évidentes sur les définitions.

Nous allons montrer que, pour tout objet \mathbf{E} de $\widehat{\mathcal{C}}$, on a

$$\text{Hom}(\mathbf{E}, \underline{\text{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})) \cong \text{Hom}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathbf{G}).$$

Soit $\phi : \mathbf{E} \times \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$; nous devons lui associer un morphisme de \mathbf{E} dans $\underline{\text{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$. Soit donc $S' \rightarrow S$ une flèche de \mathcal{C} . On a des applications

$$\mathbf{E}(S) \times \mathbf{F}(S') \longrightarrow \mathbf{E}(S') \times \mathbf{F}(S') \xrightarrow{\phi(S')} \mathbf{G}(S').$$

⁽¹²⁾N.D.E. : et, si \mathbf{E} est un troisième objet de $\widehat{\mathcal{C}}$, on a $\underline{\text{Hom}}(\mathbf{E}, \mathbf{F} \times \mathbf{G}) \cong \underline{\text{Hom}}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \times \underline{\text{Hom}}(\mathbf{E}, \mathbf{G})$.

Tout élément e de $\mathbf{E}(S)$ définit donc pour tout $S' \rightarrow S$ une application $\mathbf{F}(S') \rightarrow \mathbf{G}(S')$ fonctorielle en S' , c.-à-d., un élément $\theta_\phi(e)$ de $\underline{\text{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})(S)$. On a donc obtenu une application

$$\phi \mapsto \theta_\phi, \quad \text{Hom}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathbf{G}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathbf{E}, \underline{\text{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})),$$

qui est « fonctorielle en \mathbf{E} ».

Proposition 1.7.1. — ⁽¹³⁾ Soient $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G} \in \text{Ob}(\widehat{\mathcal{C}})$.

(a) L'application $\phi \mapsto \theta_\phi$ est une bijection :

$$\text{Hom}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\mathbf{E}, \underline{\text{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})).$$

(b) De plus, on a un isomorphisme de foncteurs :

$$\underline{\text{Hom}}(\mathbf{E}, \underline{\text{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})) \simeq \underline{\text{Hom}}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathbf{G}).$$

(a) Considérons les deux membres comme des foncteurs en \mathbf{E} . Le résultat annoncé est vrai si $\mathbf{E} = \mathbf{h}_X$; en effet, ce n'est autre en ce cas que la définition du foncteur $\underline{\text{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$. D'autre part les deux membres comme foncteurs en \mathbf{E} transforment limites inductives en limites projectives. Enfin, d'après le lemme 1.7.0, tout objet \mathbf{E} de $\widehat{\mathcal{C}}$ est isomorphe à la limite inductive des \mathbf{h}_X , où X parcourt la catégorie \mathcal{C}/\mathbf{E} . Ceci prouve (a).

⁽¹³⁾ Esquisons une démonstration directe de (a). À tout $\theta \in \text{Hom}(\mathbf{E}, \underline{\text{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}))$, on associe l'élément ϕ_θ de $\text{Hom}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathbf{G})$ défini comme suit. Pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, on a une application

$$\theta(S) : \mathbf{E}(S) \longrightarrow \text{Hom}(\mathbf{F} \times S, \mathbf{G}),$$

fonctorielle en S . Si $(e, f) \in \mathbf{E}(S) \times \mathbf{F}(S)$, alors f est un morphisme $S \rightarrow \mathbf{F}$, donc $f \times \text{id}_S$ est un morphisme $S \rightarrow \mathbf{F} \times S$; d'autre part, $\theta(S)(e)$ est un morphisme $\mathbf{F} \times S \rightarrow \mathbf{G}$, donc par composition on obtient un morphisme :

$$\theta(S)(e) \circ (f \times \text{id}_S) : S \longrightarrow \mathbf{G},$$

c.-à-d., un élément $\phi_\theta(S)(e, f)$ de $\mathbf{G}(S)$. On vérifie facilement que la correspondance $S \mapsto \phi_\theta(S)$ est fonctorielle en S , donc définit un morphisme ϕ_θ de $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ vers \mathbf{G} . On laisse au lecteur le soin de vérifier que les applications $\theta \mapsto \phi_\theta$ et $\phi \mapsto \theta_\phi$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Démontrons (b). Si $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, on a, d'après 1.7 (ii) et (a) appliqué à $\mathcal{C}/_S$:

$$\begin{aligned} \underline{\text{Hom}}(\mathbf{E}, \underline{\text{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}))(S) &\simeq \text{Hom}_S(\mathbf{E}_S, \underline{\text{Hom}}_S(\mathbf{F}_S, \mathbf{G}_S)) \\ &\cong \text{Hom}_S(\mathbf{E}_S \times_S \mathbf{F}_S, \mathbf{G}_S) \\ &\cong \text{Hom}(\mathbf{E} \times \mathbf{F} \times S, \mathbf{G}) \\ &\cong \underline{\text{Hom}}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathbf{G})(S) \end{aligned}$$

et ces isomorphismes sont fonctoriels en S .

⁽¹³⁾N.D.E. : On a ajouté le point (b), qui sera utile dans II.1 et II.3.11. D'autre part, on a esquissé une seconde démonstration, plus directe, du point (a).

Corollaire 1.7.2. — *On a :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})) &\simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{F}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E}, \mathbf{G})), \\ \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})) &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E}, \mathbf{G})).\end{aligned}$$

10

En particulier, faisant $\mathbf{E} = \mathbf{e}$, et compte tenu de $\mathrm{Hom}(\mathbf{e}, \mathbf{G}) \simeq \mathbf{G}$, on a

$$\Gamma(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{F}, \mathbf{G}).$$

Notons que la composition des Hom fournit des morphismes fonctoriels

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{H}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{H}).$$

Si \mathbf{F} et \mathbf{G} sont deux objets de $\widehat{\mathcal{C}}$, on note $\mathrm{Isom}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ formé des isomorphismes de \mathbf{F} sur \mathbf{G} . On définit alors un sous-objet $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ par :

$$\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})(S) = \mathrm{Isom}(\mathbf{F}_S, \mathbf{G}_S).$$

On a alors des isomorphismes

$$\begin{aligned}\Gamma(\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})) &\simeq \mathrm{Isom}(\mathbf{F}, \mathbf{G}), \\ \underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) &\simeq \underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{G}, \mathbf{F}).\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $\mathbf{F} = \mathbf{G}$, on pose

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F}) &= \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}), & \mathrm{End}(\mathbf{F}) &= \mathrm{Hom}(\mathbf{F}, \mathbf{F}) \simeq \Gamma(\underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F})), \\ \underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{F}) &= \underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}), & \mathrm{Aut}(\mathbf{F}) &= \mathrm{Isom}(\mathbf{F}, \mathbf{F}) \simeq \Gamma(\underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{F})).\end{aligned}$$

La formation des objets $\underline{\mathrm{Hom}}$, $\underline{\mathrm{Isom}}$, $\underline{\mathrm{Aut}}$, $\underline{\mathrm{End}}$ commute aux changements de base.

Remarquons que l'on peut construire un objet isomorphe à $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ de la manière suivante : on a un morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{F}) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F});$$

permutant \mathbf{F} et \mathbf{G} , on en déduit un morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{F}) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F}) \times \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{G}).$$

D'autre part, le morphisme identique de \mathbf{F} est un élément de $\mathrm{End}(\mathbf{F})$ et définit donc un morphisme $\mathbf{e} \rightarrow \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F})$. Faisant de même avec \mathbf{G} et effectuant le produit, on trouve un morphisme **11**

$$\mathbf{e} \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F}) \times \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{G}).$$

Il est alors immédiat que le produit fibré de \mathbf{e} et de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{F})$ au-dessus de $\underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F}) \times \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{G})$ est isomorphe à $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$.

Toutes ces définitions s'appliquent en particulier au cas où $\mathbf{F} = \mathbf{h}_X$, $\mathbf{G} = \mathbf{h}_Y$. Dans le cas où $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{h}_X, \mathbf{h}_Y)$ est représentable par un objet de \mathcal{C} , on note cet objet $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$. Il possède la propriété suivante : si $Z \times X$ existe, alors

$$\mathrm{Hom}(Z, \underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)) \simeq \mathrm{Hom}(Z \times X, Y).$$

Cette propriété le caractérise lorsque les produits existent dans \mathcal{C} .

On définit de même (lorsqu'ils veulent bien exister) des objets

$$\underline{\text{Isom}}(X, Y) \quad , \quad \underline{\text{End}}(X) \quad , \quad \underline{\text{Aut}}(X);$$

remarquons simplement que d'après la construction donnée plus haut, $\underline{\text{Isom}}(X, Y)$ existe chaque fois que les produit fibrés existent dans \mathcal{C} et que $\underline{\text{Hom}}(X, Y)$, $\underline{\text{Hom}}(Y, X)$, $\underline{\text{End}}(X)$ et $\underline{\text{End}}(Y)$ existent.

Ceci s'applique également à des catégories de la forme $\mathcal{C}/_S$. Les objets correspondant seront notés de manière aussi explicite que possible par des symboles appropriés : par exemple, si T et T' sont deux objets de \mathcal{C} au-dessus de S , on notera $\underline{\text{Hom}}_S(T, T')$ l'objet $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}/_S}(T/S, T'/S)$ qui sera donc un objet de \mathcal{C} au-dessus de S , etc.

- 12 1.8. Objets constants.** — Soit \mathcal{C} une catégorie où les sommes directes et les produits fibrés existent et où les sommes directes commutent aux changements de base (par exemple la catégorie des préschémas ⁽¹⁴⁾). Pour tout ensemble E et pour tout objet S de \mathcal{C} , soit

$$(1.8.1) \quad E_S = \begin{cases} \text{la somme directe d'une famille } (S_i)_{i \in E} \\ \text{d'objets de } \mathcal{C} \text{ tous isomorphes à } S. \end{cases}$$

Cet objet est caractérisé par la formule :

$$(1.8.2) \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E_S, T) = \text{Hom}(E, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(S, T)),$$

pour tout $T \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, où le second Hom est pris dans la catégorie des ensembles.

L'objet E_S est muni d'une projection canonique sur S , de telle façon que $E \mapsto E_S$ est en fait un foncteur de (\mathbf{Ens}) dans $\mathcal{C}/_S$.

⁽¹⁵⁾ Si $S' \rightarrow S$ est une flèche de \mathcal{C} , on a, puisque les sommes directes commutent aux changements de base,

$$E_{S'} = (E_S)_{S'}.$$

En particulier, si \mathcal{C} possède un objet final e , on a

$$E_S = (E_e)_S.$$

Le foncteur $E \rightarrow E_S/S$, de (\mathbf{Ens}) dans $\mathcal{C}/_S$, commute aux produits finis. Il suffit, pour cela, de voir que

$$(\times) \quad E_S \times_S F_S = (E \times F)_S.$$

Or, d'après les résultats de 1.7 appliqués à $\mathcal{C}/_S$, on a, pour tout $T \in \text{Ob}(\mathcal{C}/_S)$, des isomorphismes naturels (tous les Hom non spécifiés étant pris dans $\mathcal{C}/_S$) :

$$\begin{aligned} \text{Hom}((E \times F)_S, T) &\cong \text{Hom}_{(\mathbf{Ens})}(E \times F, \text{Hom}(S, T)) \cong \\ &\text{Hom}_{(\mathbf{Ens})}(E, \text{Hom}_{(\mathbf{Ens})}(F, \text{Hom}(S, T))) \cong \text{Hom}_{(\mathbf{Ens})}(E, \text{Hom}(F_S, T)) \end{aligned}$$

⁽¹⁴⁾N.D.E. : On a conservé la terminologie d'origine « préschémas/schémas », remplacée maintenant par « schémas/schémas séparés ».

⁽¹⁵⁾N.D.E. : Dans les trois paragraphes qui suivent, on a modifié l'ordre des phrases et ajouté quelques précisions concernant le rôle de l'hypothèse (*).

et

$$\mathrm{Hom}(E_S \times_S F_S, T) \cong \mathrm{Hom}(E_S, \underline{\mathrm{Hom}}(F_S, T)) \cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Ens})}(E, \mathrm{Hom}(S, \underline{\mathrm{Hom}}(F_S, T))).$$

Or, $\mathrm{Hom}(S, \underline{\mathrm{Hom}}(F_S, T)) \cong \mathrm{Hom}(F_S, T)$, d'où (\times) .

Supposons que, \emptyset désignant un objet initial de \mathcal{C} , le diagramme

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & S \coprod S \end{array} \quad \text{soit cartésien.}$$

(C'est le cas de la catégorie des préschémas).⁽¹⁶⁾ Alors le foncteur $E \mapsto E_S$ commute aux limites projectives finies.

En effet, compte-tenu de (\times) , il suffit de voir que $E \mapsto E_S$ commute aux produits fibrés. Soient $u : E \rightarrow G$ et $v : F \rightarrow G$ deux applications d'ensembles. Comme dans \mathcal{C} les sommes directes commutent aux changements de base, on a

$$(1) \quad F_S \times_{G_S} E_S \cong \prod_{f \in F} S_f \times_{G_S} E_S \cong \prod_{\substack{f \in F \\ x \in E}} S_f \times_{G_S} S_x.$$

Si $v(f) \neq u(x)$, il existe dans $\mathcal{C}/_S$ un morphisme

$$S_f \times_{G_S} S_x \longrightarrow S_f \times_{S_{v(f)} \coprod S_{u(x)}} S_x;$$

or d'après l'hypothèse $(*)$ le terme de droite est \emptyset . Par conséquent,

$$(2) \quad S_f \times_{G_S} S_x \cong \emptyset \quad \text{si } v(f) \neq u(x).$$

D'autre part, si $v(f) = u(x)$, il existe dans $\mathcal{C}/_S$ un morphisme

$$S \longrightarrow S_f \times_{G_S} S_x;$$

comme $S \xrightarrow{\mathrm{id}} S$ est objet final de $\mathcal{C}/_S$, il en résulte que

$$(3) \quad S_f \times_{G_S} S_x \cong S \quad \text{si } v(f) = u(x).$$

Combinant (1), (2) et (3) on obtient un isomorphisme fonctoriel en S

$$F_S \times_{G_S} E_S \cong \prod_{F \times_G E} S = (F \times_G E)_S.$$

Un objet de la forme E_S sera dit *objet constant*. Remarquons que l'on a un morphisme fonctoriel en E :

$$E \longrightarrow \Gamma(E_S/S)$$

qui associe à chaque $i \in E$, la section de E_S sur S définie par l'isomorphisme de S sur S_i . Supposons la condition $(*)$ vérifiée pour tout objet S de \mathcal{C} ; alors le morphisme $E \rightarrow \Gamma(E_S/S)$ est un monomorphisme pour tout $S \neq \emptyset$.

⁽¹⁶⁾N.D.E. : $(*)$ n'est pas vérifiée si \mathcal{C} est la catégorie dont les flèches sont $A \rightarrow B$ et $\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B$; dans ce cas $B \coprod B = B$ et $B \times_B B = B \neq A$.

13 Si \mathcal{C} est la catégorie des préschémas, alors $\Gamma(E_S/S)$ s'identifie aux applications localement constantes de l'espace topologique S dans l'ensemble E , l'application précédente associant à chaque élément de E l'application constante correspondante. Remarquons qu'il résulte de ce qu'on vient de dire que E_S peut aussi être défini comme représentant le foncteur qui à tout S' au-dessus de S associe l'ensemble des fonctions localement constantes de l'espace topologique S' dans l'ensemble E . ⁽¹⁷⁾

2. Structures algébriques

Étant donnée une espèce de structure algébrique dans la catégorie des ensembles, nous nous proposons de l'étendre à la catégorie \mathcal{C} . Traitons d'abord un exemple : le cas des groupes.

2.1. Structures de groupe.— Nous gardons les notations du paragraphe précédent.

Définition 2.1.1. — Soit $\mathbf{G} \in \text{Ob}(\widehat{\mathcal{C}})$. On appelle structure de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe sur \mathbf{G} la donnée pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ d'une structure de groupe sur l'ensemble $\mathbf{G}(S)$, de telle manière que pour toute flèche $f : S' \rightarrow S''$ de \mathcal{C} , l'application $\mathbf{G}(f) : \mathbf{G}(S'') \rightarrow \mathbf{G}(S')$ soit un homomorphisme de groupes. Si \mathbf{G} et \mathbf{H} sont deux $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes, on appelle *morphisme* de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes de \mathbf{G} dans \mathbf{H} tout morphisme $u \in \text{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ tel que pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ l'application d'ensembles $u(S) : \mathbf{G}(S) \rightarrow \mathbf{H}(S)$ soit un homomorphisme de groupes.

On note $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ l'ensemble des morphismes de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes de \mathbf{G} dans \mathbf{H} et $(\widehat{\mathcal{C}}\text{-Gr.})$ la catégorie des $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes.

Exemples. — Soit $\mathbf{E} \in \text{Ob}(\widehat{\mathcal{C}})$; l'objet $\underline{\text{Aut}}(\mathbf{E})$ est muni de manière évidente d'une structure de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe. L'objet final $\underline{\mathbf{e}}$ possède une structure de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe unique qui en fait un objet final de $(\widehat{\mathcal{C}}\text{-Gr.})$.

14 Pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, soit $e_{\mathbf{G}}(S)$ l'élément unité de $\mathbf{G}(S)$. La famille des $e_{\mathbf{G}}(S)$ définit un élément $e_{\mathbf{G}} \in \Gamma(\mathbf{G}) = \text{Hom}(\underline{\mathbf{e}}, \mathbf{G})$ qui est en fait un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes $\underline{\mathbf{e}} \rightarrow \mathbf{G}$ et que l'on appelle *section unité* de \mathbf{G} .

Remarquons que se donner une structure de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe sur \mathbf{G} revient à se donner une loi de composition sur \mathbf{G} , c'est-à-dire un $\widehat{\mathcal{C}}$ -morphisme

$$\pi_{\mathbf{G}} : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}$$

tel que pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $\pi_{\mathbf{G}}(S)$ munisse $\mathbf{G}(S)$ d'une structure de groupe.

⁽¹⁷⁾N.D.E. : Notons également que le morphisme $E_S \rightarrow S$ est séparé, donc E_S est un S -schéma.

De la même manière, $f : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ est un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes si et seulement si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} \times \mathbf{G} & \xrightarrow{\pi_{\mathbf{G}}} & \mathbf{G} \\ (f, f) \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbf{H} \times \mathbf{H} & \xrightarrow{\pi_{\mathbf{H}}} & \mathbf{H} \end{array} .$$

Un sous-objet \mathbf{H} de \mathbf{G} tel que, pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathbf{H}(S)$ soit un sous-groupe de $\mathbf{G}(S)$ possède évidemment une structure de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe induite par celle de \mathbf{G} : c'est la seule pour laquelle le monomorphisme $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{G}$ soit un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes. Le $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe \mathbf{H} muni de cette structure est appelé *sous- $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe de \mathbf{G}* .

Si \mathbf{G} et \mathbf{H} sont deux $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes, le produit $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ est muni d'une structure de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe évidente : pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, on munit $\mathbf{G}(S) \times \mathbf{H}(S)$ de la structure de groupe produit des structures de groupes données sur $\mathbf{G}(S)$ et $\mathbf{H}(S)$. Le $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ muni de cette structure sera dit *$\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe produit de \mathbf{G} et de \mathbf{H}* (ç'en est d'ailleurs le produit dans la catégorie des $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes).

Si \mathbf{G} est un $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe, alors pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, \mathbf{G}_S est un $\widehat{\mathcal{C}}/S$ -groupe. Si \mathbf{G} et \mathbf{H} sont deux $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes, on définira l'objet $\underline{\text{Hom}}_{\widehat{\mathcal{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ de $\widehat{\mathcal{C}}$ par :

$$\underline{\text{Hom}}_{\widehat{\mathcal{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}, \mathbf{H})(S) = \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}/S\text{-Gr.}}(\mathbf{G}_S, \mathbf{H}_S)$$

(Nota : $\underline{\text{Hom}}_{\widehat{\mathcal{C}}\text{-Gr.}}$ n'est pas en général un $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe, ni a fortiori l'objet $\underline{\text{Hom}}$ dans la catégorie ($\widehat{\mathcal{C}}$ -Gr.)). 15

On définit de même les objets

$$\underline{\text{Isom}}_{\widehat{\mathcal{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}, \mathbf{H}) \quad , \quad \underline{\text{End}}_{\widehat{\mathcal{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}) \quad , \quad \underline{\text{Aut}}_{\widehat{\mathcal{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}).$$

Définition 2.1.2. — Soit $G \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. On appelle structure de \mathcal{C} -groupe sur G une structure de \mathcal{C} -groupe sur $\mathbf{h}_G \in \text{Ob}(\widehat{\mathcal{C}})$. On appelle morphisme du \mathcal{C} -groupe G dans le \mathcal{C} -groupe H un élément $u \in \text{Hom}(G, H) \simeq \text{Hom}(\mathbf{h}_G, \mathbf{h}_H)$ qui définit un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe de \mathbf{h}_G dans \mathbf{h}_H .

On note (\mathcal{C} -Gr.) la catégorie des \mathcal{C} -groupes. Notons qu'il existe dans (**Cat**) un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}\text{-Gr.}) & \longrightarrow & (\widehat{\mathcal{C}}\text{-Gr.}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathbf{h}} & \widehat{\mathcal{C}} \end{array} .$$

Toutes les définitions et constructions précédentes se transportent donc aussitôt à (\mathcal{C} -Gr.) chaque fois que les foncteurs qu'elles font intervenir (produits, objets $\underline{\text{Hom}}$, etc.) sont représentables. Elles s'appliquent aussi aux catégories \mathcal{C}/S . En ce cas, nous noterons $\underline{\text{Hom}}_{S\text{-Gr.}}$ pour $\underline{\text{Hom}}_{\widehat{\mathcal{C}}/S\text{-Gr.}}$, etc.

2.2. Plus généralement, si (T) est une espèce de structure sur n ensembles de base définie par limites projectives finies (par exemple, par des commutativités de diagrammes construits avec des produits cartésiens : structures de monoïde, groupe, d'ensemble à opérateurs, de module sur un anneau, d'algèbre de Lie sur un anneau, etc.) la construction précédente permet de définir la notion de « structure d'espèce (T) sur n objets $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ de $\widehat{\mathcal{C}}$ » : une telle structure sera la donnée pour chaque S de \mathcal{C} , d'une structure d'espèce (T) sur les ensembles $\mathbf{F}_1(S), \dots, \mathbf{F}_n(S)$ de telle manière que pour toute flèche $S' \rightarrow S''$ de \mathcal{C} , la famille d'applications $(\mathbf{F}_i(S'')) \rightarrow (\mathbf{F}_i(S'))$ soit un poly-homomorphisme pour l'espèce de structure (T) . On définit de manière semblable les morphismes de l'espèce de structure (T) , d'où une catégorie $(\widehat{\mathcal{C}} \times \widehat{\mathcal{C}} \cdots \times \widehat{\mathcal{C}})^{(T)}$. Le foncteur pleinement fidèle $(\mathbf{h} \times \mathbf{h} \times \cdots \times \mathbf{h})$ permet alors de définir par image inverse la catégorie $(\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \cdots \times \mathcal{C})^{(T)}$, puis, comme il commute aux limites projectives, d'y transporter toutes les propriétés, notions et notations fonctorielles introduites dans $\widehat{\mathcal{C}}$. Supposons maintenant que dans \mathcal{C} les produits fibrés existent, et soit (T) une espèce de structure algébrique définie par la donnée de certains morphismes entre produits cartésiens satisfaisant à des *axiomes* consistant en certaines commutativités de diagrammes construits à l'aide des flèches précédentes. Une structure d'espèce (T) sur une famille d'objets de \mathcal{C} sera donc définie par certains morphismes entre produits cartésiens satisfaisant à certaines conditions de commutations. Il en résulte que si \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont deux catégories possédant des produits et $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est un foncteur *commutant aux produits*, alors pour toute famille d'objets (F_i) de \mathcal{C} munie d'une structure d'espèce (T) , la famille $(f(F_i))$ d'objets de \mathcal{C}' sera par là-même munie elle aussi d'une structure d'espèce (T) . Tout \mathcal{C} -groupe sera transformé en \mathcal{C}' -groupe, tout couple $(\mathcal{C}$ -anneau, \mathcal{C} -module sur ce \mathcal{C} -anneau) en un couple analogue dans \mathcal{C}' , etc.

Soit en particulier \mathcal{C} une catégorie satisfaisant aux conditions de 1.8⁽¹⁸⁾ ; le foncteur $E \mapsto E_S$ défini dans *loc. cit.* commute aux limites projectives finies ; il transforme donc groupe en S -groupe (i.e. \mathcal{C}/S -groupe), anneau en S -anneau, etc.

Remarque. — Il est bon de remarquer que le procédé de construction précédent appliqué à la catégorie $\widehat{\mathcal{C}}$ redonne bien les notions que l'on y a déjà définies ; en d'autres termes, il revient au même de se donner sur un objet de $\widehat{\mathcal{C}}$ une structure d'espèce (T) quand on considère cet objet comme un foncteur sur \mathcal{C} , ou de se donner une structure d'espèce (T) sur le foncteur représentable sur $\widehat{\mathcal{C}}$ défini par cet objet.⁽¹⁹⁾

17 Nous allons encore traiter deux cas particuliers de la construction précédente, le cas des structures à groupes d'opérateurs et le cas des modules.

⁽¹⁸⁾N.D.E. : y compris la condition (*)

⁽¹⁹⁾N.D.E. : Par exemple, pour les structures de groupes : soit $\mathbf{G} \in \text{Ob}(\widehat{\mathcal{C}})$; si le foncteur $\widehat{\mathcal{C}} \rightarrow (\mathbf{Ens}), \mathbf{F} \mapsto \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ est muni d'une structure de groupe, il en est de même de sa restriction à \mathcal{C} , $X \mapsto \mathbf{G}(X)$. Réciproquement, si \mathbf{G} est un $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe, alors le morphisme « de multiplication » $\pi_{\mathbf{G}} : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ induit pour tout $\mathbf{F} \in \text{Ob}(\widehat{\mathcal{C}})$ une structure de groupe sur $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$, fonctorielle en \mathbf{F} .

2.3. Structures à groupes d'opérateurs. —

Définition 2.3.1. — Soient $\mathbf{E} \in \text{Ob}(\widehat{\mathcal{C}})$ et $\mathbf{G} \in \text{Ob}(\widehat{\mathcal{C}}\text{-Gr.})$. Une structure d'objet à $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe d'opérateurs \mathbf{G} (ou de \mathbf{G} -objet) sur \mathbf{E} est la donnée sur $\mathbf{E}(S)$, pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, d'une structure d'ensemble à groupe d'opérateurs $\mathbf{G}(S)$ de telle manière que, pour toute flèche $S' \rightarrow S''$ de \mathcal{C} , l'application d'ensembles $\mathbf{E}(S'') \rightarrow \mathbf{E}(S')$ soit compatible avec l'homomorphisme d'opérateurs $\mathbf{G}(S'') \rightarrow \mathbf{G}(S')$.

Comme d'habitude, il revient au même de se donner un morphisme

$$\mu : \mathbf{G} \times \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$$

qui pour tout S munisse $\mathbf{E}(S)$ d'une structure d'ensemble à opérateurs $\mathbf{G}(S)$. Mais $\text{Hom}(\mathbf{G} \times \mathbf{E}, \mathbf{E}) \simeq \text{Hom}(\mathbf{G}, \underline{\text{End}}(\mathbf{E}))$, donc μ définit un morphisme $\mathbf{G} \rightarrow \underline{\text{End}}(\mathbf{E})$ et il est immédiat que celui-ci applique \mathbf{G} dans $\underline{\text{Aut}}(\mathbf{E})$ et que c'est un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes. En conséquence : *se donner sur \mathbf{E} une structure d'objet à $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe d'opérateurs \mathbf{G} est équivalent à se donner un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes*

$$\rho : \mathbf{G} \longrightarrow \underline{\text{Aut}}(\mathbf{E}).$$

En particulier, tout élément $g \in \mathbf{G}(S)$ définit un automorphisme $\rho(g)$ du foncteur \mathbf{E}_S , c'est-à-dire un automorphisme de $\mathbf{E} \times \mathbf{h}_S$ commutant à la projection $\mathbf{E} \times \mathbf{h}_S \rightarrow \mathbf{h}_S$, et en particulier un automorphisme de l'ensemble $\mathbf{E}(S')$ pour tout $S' \rightarrow S$.

Définition 2.3.2. — On note $\mathbf{E}^{\mathbf{G}}$ le sous-objet de \mathbf{E} défini comme suit :

$$\mathbf{E}^{\mathbf{G}}(S) = \{x \in \mathbf{E}(S) \mid x_{S'} \text{ invariant sous } \mathbf{G}(S') \text{ pour tout } S' \longrightarrow S\},$$

où $x_{S'}$ désigne l'image de x par $\mathbf{E}(S) \rightarrow \mathbf{E}(S')$.

Alors $\mathbf{E}^{\mathbf{G}}$ (« sous-objet des invariants de \mathbf{G} ») est le plus grand sous-objet de \mathbf{E} sur lequel \mathbf{G} opère trivialement. 18

Définition 2.3.3. — Soit \mathbf{F} un sous-objet de \mathbf{E} . On note $\underline{\text{Norm}}_{\mathbf{G}} \mathbf{F}$ et $\underline{\text{Centr}}_{\mathbf{G}} \mathbf{F}$ les sous- $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes de \mathbf{G} définis par

$$\begin{aligned} (\underline{\text{Norm}}_{\mathbf{G}} \mathbf{F})(S) &= \{g \in \mathbf{G}(S) \mid \rho(g)\mathbf{F}_S = \mathbf{F}_S\} \quad (20) \\ &= \{g \in \mathbf{G}(S) \mid \rho(g)\mathbf{F}(S') = \mathbf{F}(S'), \text{ pour tout } S' \longrightarrow S\}, \\ (\underline{\text{Centr}}_{\mathbf{G}} \mathbf{F})(S) &= \{g \in \mathbf{G}(S) \mid \rho(g)|_{\mathbf{F}_S} = \text{identité}\} \\ &= \{g \in \mathbf{G}(S) \mid \rho(g)|_{\mathbf{F}(S')} = \text{identité}, \text{ pour tout } S' \longrightarrow S\}, \end{aligned}$$

où la barre verticale après $\rho(g)$ désigne la restriction.

⁽²⁰⁾N.D.E. : On a corrigé l'original, en remplaçant l'inclusion $\rho(g)\mathbf{F}_S \subseteq \mathbf{F}_S$ par une égalité, afin d'assurer que $\underline{\text{Norm}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{F})$ soit bien un groupe (voir VI.B.6.4 pour des conditions sous lesquelles le « transporteur » coïncide avec le « transporteur strict »).

Scholie 2.3.3.1. — ⁽²¹⁾ En particulier, soit $x \in \Gamma(\mathbf{E})$, i.e. (cf. 1.2) une collection d'éléments $x_S \in \mathbf{E}(S)$, $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, telle que pour toute flèche $f : S' \rightarrow S$ on ait $\mathbf{E}(f)(x_S) = x_{S'}$ (si \mathcal{C} possède un objet final S_0 on a $\Gamma(\mathbf{E}) = \mathbf{E}(S_0)$). Alors x définit un sous-foncteur de \mathbf{E} , qu'on notera \mathbf{x} , et l'on a $\underline{\text{Norm}}_{\mathbf{G}} \mathbf{x} = \underline{\text{Centr}}_{\mathbf{G}} \mathbf{x}$. On notera $\underline{\text{Stab}}_{\mathbf{G}}(x)$ ce foncteur ; pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ on a donc :

$$\underline{\text{Stab}}_{\mathbf{G}}(x)(S) = \{g \in \mathbf{G}(S) \mid \rho(g)x_S = x_S\}.$$

Supposons que les produits fibrés existent dans \mathcal{C} ; si $\mathbf{G} = \mathbf{h}_{\mathbf{G}}$ (resp. $\mathbf{E} = \mathbf{h}_{\mathbf{E}}$), où \mathbf{G} est un \mathcal{C} -groupe (resp. $\mathbf{E} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$), et si \mathcal{C} possède un objet final S_0 , de sorte que x est un morphisme $S_0 \rightarrow \mathbf{E}$, alors $\underline{\text{Stab}}_{\mathbf{G}}(x)$ est *représentable* par le produit fibré $\mathbf{G} \times_{\mathbf{E}} S_0$, où $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{E}$ est le composé de $\text{id}_{\mathbf{G}} \times x : \mathbf{G} = \mathbf{G} \times S_0 \rightarrow \mathbf{G} \times \mathbf{E}$ et de $\mu : \mathbf{G} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$.

Remarque 2.3.3.2. — ⁽²¹⁾ La formation de $\mathbf{E}^{\mathbf{G}}$, $\underline{\text{Norm}}_{\mathbf{G}} \mathbf{F}$ et $\underline{\text{Centr}}_{\mathbf{G}} \mathbf{F}$ commute au changement de base, c.-à-d., pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ on a

$$(\mathbf{E}^{\mathbf{G}})_S = (\mathbf{E}_S)^{\mathbf{G}_S}, \quad (\underline{\text{Norm}}_{\mathbf{G}} \mathbf{F})_S \simeq \underline{\text{Norm}}_{\mathbf{G}_S} \mathbf{F}_S, \quad (\underline{\text{Centr}}_{\mathbf{G}} \mathbf{F})_S \simeq \underline{\text{Centr}}_{\mathbf{G}_S} \mathbf{F}_S.$$

Définition 2.3.4. — Si \mathbf{G} est un \mathcal{C} -groupe et \mathbf{E} un objet de $\widehat{\mathcal{C}}$ (resp. \mathbf{E} un objet de \mathcal{C}) une structure de \mathbf{G} -objet sur \mathbf{E} (resp. sur \mathbf{E}) est une structure de $\mathbf{h}_{\mathbf{G}}$ -objet sur \mathbf{E} (resp. $\mathbf{h}_{\mathbf{E}}$).

Vu cette définition, toutes les notions et notations définies ci-dessus se transportent à \mathcal{C} , lorsqu'elles ne font intervenir que des foncteurs représentables : par exemple si $\underline{\text{Norm}}_{\mathbf{h}_{\mathbf{G}}}(\mathbf{h}_{\mathbf{F}})$ est représentable, alors il existe un et un seul sous-objet de \mathbf{G} qui le représente et qui est alors un sous- \mathcal{C} -groupe de \mathbf{G} , on le note $\text{Norm}_{\mathbf{G}}(\mathbf{F})$, etc.

Définition 2.3.5. — a) On dit que le $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe \mathbf{G} opère sur le $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe \mathbf{H} si \mathbf{H} est muni d'une structure de \mathbf{G} -objet telle que, pour tout $g \in \mathbf{G}(S)$, l'automorphisme de $\mathbf{H}(S)$ défini par g soit un automorphisme de groupe.

Il revient au même de dire que pour tout $g \in \mathbf{G}(S)$, l'automorphisme $\rho(g)$ de \mathbf{H}_S est un automorphisme de $\widehat{\mathcal{C}}/S$ -groupes, ou encore que le morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes $\mathbf{G} \rightarrow \underline{\text{Aut}}(\mathbf{H})$ applique \mathbf{G} dans $\underline{\text{Aut}}_{\widehat{\mathcal{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{H})$.

b) Dans la situation ci-dessus, il existe sur le produit $\mathbf{H} \times \mathbf{G}$ une structure de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe unique telle que, pour tout S , $(\mathbf{H} \times \mathbf{G})(S)$ soit le produit semi-direct des groupes $\mathbf{H}(S)$ et $\mathbf{G}(S)$ relativement à l'opération donnée de $\mathbf{G}(S)$ sur $\mathbf{H}(S)$. On notera ce $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe $\mathbf{H} \cdot \mathbf{G}$ et on l'appellera *produit semi-direct de \mathbf{H} par \mathbf{G}* . On a donc par définition

$$(\mathbf{H} \cdot \mathbf{G})(S) = \mathbf{H}(S) \cdot \mathbf{G}(S).$$

Soit \mathbf{G} un $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe. Pour toute flèche $S' \rightarrow S$ de \mathcal{C} et tout $g \in \mathbf{G}(S)$, soit $\text{Int}(g)$ l'automorphisme de $\mathbf{G}(S')$ défini par $\text{Int}(g)h = ghg^{-1}$. Cette définition se prolonge en celle d'un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes

$$\text{Int} : \mathbf{G} \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\widehat{\mathcal{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}) \subset \underline{\text{Aut}}(\mathbf{G}).$$

⁽²¹⁾N.D.E. : On a ajouté le scholie 2.3.3.1 et la remarque 2.3.3.2.

La définition 2.3.3 s'applique donc et on a des sous- $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes de \mathbf{G}

$$\underline{\text{Norm}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{E}) \quad \text{et} \quad \underline{\text{Centr}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{E})$$

pour tout sous-objet \mathbf{E} de \mathbf{G} .

Définition 2.3.6. — On appelle *centre* de \mathbf{G} et on note $\underline{\text{Centr}}(\mathbf{G})$ le sous- $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe $\underline{\text{Centr}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})$ de \mathbf{G} . On dit que \mathbf{G} est commutatif si $\underline{\text{Centr}}(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$ ou, ce qui revient au même, si $\mathbf{G}(S)$ est commutatif pour tout S .

On dit que le sous- $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe \mathbf{H} de \mathbf{G} est *invariant* dans \mathbf{G} si $\underline{\text{Norm}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}) = \mathbf{G}$, ou, ce qui revient au même, si $\mathbf{H}(S)$ est invariant dans $\mathbf{G}(S)$ pour tout S .⁽²²⁾

Définition 2.3.6.1. —⁽²³⁾ Soit $f : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}'$ un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes. On appelle *noyau* de f , et l'on note $\text{Ker } f$ le sous- $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe de \mathbf{G} défini par

$$(\text{Ker } f)(S) = \{x \in \mathbf{G}(S) \mid f(S)(x) = 1\} = \text{Ker } f(S)$$

pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$; c'est un sous- $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe *invariant*.

Définition 2.3.6.2. —⁽²³⁾ Soient $\mathbf{E} \in \widehat{\mathcal{C}}$ et \mathbf{G} un $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe opérant sur \mathbf{E} . On dit que l'opération de \mathbf{G} sur \mathbf{E} est *fidèle* si le noyau du morphisme $\mathbf{G} \rightarrow \underline{\text{Aut}}(\mathbf{E})$ est trivial, c.-à-d., si pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et $g \in \mathbf{G}(S)$, la condition $g_{S'} \cdot x = x$ pour tout $S' \rightarrow S$ et $x \in \mathbf{E}(S')$, entraîne $g = 1$.

Beaucoup de définitions et de propositions de la théorie élémentaire des groupes se transposent aisément. Signalons simplement la suivante qui nous sera utile :

Proposition 2.3.7. — Soit $f : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{G}$ un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes. Posons $\mathbf{H}(S) = \text{Ker } f(S)$. Soit $u : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{W}$ un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes qui soit une section de f (et qui est alors nécessairement un monomorphisme). Alors \mathbf{W} s'identifie au produit semi-direct de \mathbf{H} par \mathbf{G} pour l'opération de \mathbf{G} sur \mathbf{H} définie par $(g, h) \mapsto \text{Int}(u(g))h$ pour $g \in \mathbf{G}(S)$, $h \in \mathbf{H}(S)$, $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$. 20

L'ensemble de ces définitions et propositions se transporte comme d'habitude à \mathcal{C} . On définit en particulier le produit semi-direct de deux \mathcal{C} -groupes \mathbf{H} et \mathbf{G} (\mathbf{G} opérant sur \mathbf{H}) lorsque le produit cartésien $\mathbf{H} \times \mathbf{G}$ existe, et on a l'analogie de la proposition 2.3.7 sous la forme suivante :

Proposition 2.3.8. — Soit $\mathbf{H} \xrightarrow{i} \mathbf{W} \xrightarrow{f} \mathbf{G}$ une suite de morphismes de \mathcal{C} -groupes telle que pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $(\mathbf{H}(S), i(S))$ soit un noyau de $f(S) : \mathbf{W}(S) \rightarrow \mathbf{G}(S)$. Soit $u : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{W}$ un morphisme de \mathcal{C} -groupes qui soit une section de f . Alors \mathbf{W} s'identifie au produit semi-direct de \mathbf{H} par \mathbf{G} pour l'opération de \mathbf{G} sur \mathbf{H} telle que si $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, si $g \in \mathbf{G}(S)$ et $h \in \mathbf{H}(S)$, on ait $\text{Int}(u(g))i(h) = i(g)h$.

⁽²²⁾N.D.E. : De plus, on dit que \mathbf{H} est *central* dans \mathbf{G} si $\underline{\text{Centr}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}) = \mathbf{G}$, ou, ce qui revient au même, si $\mathbf{H}(S)$ est central dans $\mathbf{G}(S)$ pour tout S .

⁽²³⁾N.D.E. : On a ajouté les définitions 2.3.6.1 et 2.3.6.2.

3. La catégorie des \mathbf{O} -modules, la catégorie des \mathbf{G} - \mathbf{O} -modules

Définition 3.1. — Soient \mathbf{O} et \mathbf{F} deux objets de $\widehat{\mathcal{C}}$. On dit que \mathbf{F} est un $\widehat{\mathcal{C}}$ -module sur le $\widehat{\mathcal{C}}$ -anneau \mathbf{O} , ou en abrégé un \mathbf{O} -module, si, pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, on a muni $\mathbf{O}(S)$ d'une structure d'anneau et $\mathbf{F}(S)$ d'une structure de module sur cet anneau de telle manière que pour toute flèche $S' \rightarrow S''$ de \mathcal{C} , $\mathbf{O}(S'') \rightarrow \mathbf{O}(S')$ soit un homomorphisme d'anneaux et $\mathbf{F}(S'') \rightarrow \mathbf{F}(S')$ un homomorphisme de groupes abéliens compatible avec cet homomorphisme d'anneaux.

Si \mathbf{O} est fixé, on définit de manière habituelle un morphisme des \mathbf{O} -modules \mathbf{F} et \mathbf{F}' , d'où le groupe commutatif $\text{Hom}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$, et la catégorie des \mathbf{O} -modules notée $(\mathbf{O}\text{-Mod.})$.

Lemme 3.1.1. — ⁽²⁴⁾ $(\mathbf{O}\text{-Mod.})$ est munie d'une structure de catégorie abélienne, définie « argument par argument ». De plus, $(\mathbf{O}\text{-Mod.})$ vérifie l'axiome (AB 5) (cf. [Gr57, 1.5]), c.-à-d., les sommes directes arbitraires existent et si \mathbf{M} est un \mathbf{O} -module, \mathbf{N} un sous-module, et $(\mathbf{F}_i)_{i \in I}$ une famille filtrante croissante de sous-modules de \mathbf{M} , alors

$$\bigcup_{i \in I} (\mathbf{F}_i \cap \mathbf{N}) = \left(\bigcup_{i \in I} \mathbf{F}_i \right) \cap \mathbf{N}.$$

En effet, soit $f : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}'$ un morphisme de \mathbf{O} -modules. On définit les \mathbf{O} -modules $\text{Ker } f$ (resp. $\text{Im } f$ et $\text{Coker } f$) en posant, pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $(\text{Ker } f)(S) = \text{Ker } f(S)$ (resp. \dots). Alors $\text{Ker } f$ (resp. $\text{Coker } f$) est un noyau (resp. conoyau) de f , et l'on a un isomorphisme de \mathbf{O} -modules $\mathbf{F}/\text{Ker } f \xrightarrow{\sim} \text{Im } f$. Ceci prouve que $(\mathbf{O}\text{-Mod.})$ est une catégorie abélienne.

Les sommes directes arbitraires existent et sont définies « argument par argument ». Enfin, si \mathbf{M} est un \mathbf{O} -module, \mathbf{N} un sous-module, et $(\mathbf{F}_i)_{i \in I}$ une famille filtrante croissante de sous-modules de \mathbf{M} , alors l'inclusion

$$\bigcup_{i \in I} (\mathbf{F}_i \cap \mathbf{N}) \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} \mathbf{F}_i \right) \cap \mathbf{N}$$

est une égalité : en effet, si $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et $x \in \mathbf{N}(S) \cap \bigcup_i \mathbf{F}_i(S)$, il existe $i \in I$ tel que $x \in \mathbf{N}(S) \cap \mathbf{F}_i(S)$.

Proposition 3.1.2. — ⁽²⁴⁾ On suppose la catégorie \mathcal{C} petite, c.-à-d., que $\text{Ob}(\mathcal{C})$ est un ensemble. Alors \mathbf{O} est un générateur de $(\mathbf{O}\text{-Mod.})$; par conséquent, $(\mathbf{O}\text{-Mod.})$ possède assez d'objets injectifs.

Démonstration. Soit \mathbf{F} un \mathbf{O} -module. Pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, soit $\mathbf{F}_0(S)$ un système de générateurs du $\mathbf{O}(S)$ -module $\mathbf{F}(S)$. Comme, par hypothèse, $\text{Ob}(\mathcal{C})$ est un ensemble, on peut considérer l'ensemble $I = \bigsqcup_{S \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \mathbf{F}_0(S)$; alors on a un épimorphisme

$$\mathbf{O}^{\oplus I} \twoheadrightarrow \mathbf{F}.$$

⁽²⁴⁾N.D.E. : On a ajouté les énoncés 3.1.1 et 3.1.2 pour faire voir que la catégorie $(\mathbf{O}\text{-Mod.})$ est abélienne et vérifie l'axiome (AB 5), et de plus possède assez d'objets injectifs si la catégorie \mathcal{C} est petite.

Ceci montre que \mathbf{O} est un générateur de $(\mathbf{O}\text{-Mod.})$ (cf. [Gr57, 1.9.1]). Comme $(\mathbf{O}\text{-Mod.})$ vérifie (AB 5), il résulte alors de [Gr57, 1.10.1] que $(\mathbf{O}\text{-Mod.})$ possède assez d'objets injectifs.

Remarque 3.1.3. — Si \mathbf{O}_0 est le $\widehat{\mathcal{C}}$ -anneau défini par $\mathbf{O}_0(S) = \mathbb{Z}$ (qu'il ne faut pas confondre avec le foncteur associé à l'objet constant \mathbb{Z}), alors la catégorie des \mathbf{O}_0 -modules est isomorphe à la catégorie des $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes commutatifs.

Remarquons que, si \mathbf{F} est un \mathbf{O} -module, alors pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, \mathbf{F}_S est un \mathbf{O}_S -module. On peut donc définir un $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe abélien $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$ par **21**

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}')(S) = \text{Hom}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{F}_S, \mathbf{F}'_S).$$

On définira de même des objets

$$\underline{\text{Isom}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}'), \quad \underline{\text{End}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}) \quad \text{et} \quad \underline{\text{Aut}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}),$$

le dernier étant un $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe pour la structure induite par la composition des automorphismes.

Définition 3.2. — Soient \mathbf{O} un $\widehat{\mathcal{C}}$ -anneau, \mathbf{F} un \mathbf{O} -module et \mathbf{G} un $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe. On appelle structure de \mathbf{G} - \mathbf{O} -module sur \mathbf{F} une structure de \mathbf{G} -objet telle que pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et tout $g \in \mathbf{G}(S)$, l'automorphisme de $\mathbf{F}(S)$ défini par g soit un automorphisme de sa structure de $\mathbf{O}(S)$ -module.

Il revient au même de dire que le morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes

$$\rho : \mathbf{G} \longrightarrow \underline{\text{Aut}}(\mathbf{F})$$

défini en 2.3 applique \mathbf{G} dans le sous- $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe $\underline{\text{Aut}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F})$ de $\underline{\text{Aut}}(\mathbf{F})$. Se donner une structure de \mathbf{G} - \mathbf{O} -module sur le \mathbf{O} -module \mathbf{F} , c'est donc se donner un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes

$$\rho : \mathbf{G} \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}).$$

On définit de manière naturelle le groupe abélien $\text{Hom}_{\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$, donc la catégorie additive des \mathbf{G} - \mathbf{O} -modules notée $(\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-Mod.})$.

Remarque 3.2.1. — Le lecteur remarquera que $(\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-Mod.})$ peut également se définir comme la catégorie des $\mathbf{O}[\mathbf{G}]$ -modules, où $\mathbf{O}[\mathbf{G}]$ est l'algèbre du $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe \mathbf{G} sur le $\widehat{\mathcal{C}}$ -anneau \mathbf{O} , dont la définition est claire. ⁽²⁵⁾ Par conséquent, d'après 3.1.1 et 3.1.2, $(\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-Mod.})$ est une catégorie abélienne vérifiant l'axiome (AB 5); de plus, si \mathcal{C} est petite, $(\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-Mod.})$ possède assez d'objets injectifs.

Toutes les constructions de ce paragraphe se spécialisent aussitôt au cas où \mathbf{G} (ou \mathbf{O} , ou les deux) sont représentables par des objets de \mathcal{C} qui sont par là-même munis des structures algébriques correspondantes. **22**

Nous avons traité succinctement le cas des principales structures algébriques rencontrées dans la suite de ce séminaire. Pour les autres (structure de \mathbf{O} -algèbre de Lie par exemple), nous croyons que le lecteur aura eu suffisamment d'exemples dans ce

⁽²⁵⁾N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit ; ceci sera utilisé dans la section 5.

paragraphe pour pouvoir dans chaque cas particulier faire fonctionner lui-même le mécanisme général esquissé dans 2.2.

Nous allons maintenant appliquer ce que nous venons de faire à la catégorie des préschémas notée **(Sch)** et plus généralement aux catégories **(Sch)**_S.

4. Structures algébriques dans la catégorie des préschémas

Nous nous permettrons, chaque fois qu'il n'y aura pas d'ambiguïté, les abus de langage suivants : on désignera par T l'objet $T \xrightarrow{f} S$ de \mathcal{C}/S , la donnée de f (« morphisme structural de T ») étant sous-entendue, et on identifiera \mathcal{C} à une sous-catégorie de $\widehat{\mathcal{C}}$. Compte tenu des compatibilités énoncées aux paragraphes précédents, ces identifications peuvent se faire sans danger.

Nous simplifierons d'autre part les appellations sur le modèle suivant : un **(Sch)**-groupe sera aussi appelé *préschéma en groupes*, un **(Sch)**_S-groupe *préschéma en groupes sur S*, ou *S-préschéma en groupes*, ou *S-groupe*, ou *A-groupe* lorsque S sera le spectre de l'anneau A.

4.1. Préschémas constants. — La catégorie des préschémas satisfait aux conditions exigées en 1.8. On peut donc y définir les objets constants ; pour tout ensemble E, on a un préschéma $E_{\mathbb{Z}}$ et pour tout préschéma S, un S-préschéma $E_S = (E_{\mathbb{Z}})_S$. Rappelons que pour tout S-préschéma T, $\text{Hom}_S(T, E_S)$ est l'ensemble des applications localement constantes de l'espace topologique T dans E.

Le foncteur $E \mapsto E_S$ commute aux limites projectives finies. En particulier si G est un groupe, G_S est un S-préschéma en groupes ; si O est un anneau, O_S est un S-préschéma en anneaux, etc.

4.2. S-groupes affines. — Rappelons un certain nombre de choses sur les S-schémas affines (EGA II, § 1). On dit que le S-préschéma T est *affine sur S* si l'image réciproque de tout ouvert affine de S est affine ⁽²⁶⁾. La \mathcal{O}_S -algèbre $f_*(\mathcal{O}_T)$, que l'on désigne par $\mathcal{A}(T)$, est alors *quasi-cohérente* (f désigne le morphisme structural de T). Réciproquement, à toute \mathcal{O}_S -algèbre quasi-cohérente \mathcal{A} , on peut faire correspondre un S-préschéma affine sur S noté $\text{Spec}(\mathcal{A})$. Ces foncteurs $T \mapsto \mathcal{A}(T)$ et $\mathcal{A} \mapsto \text{Spec}(\mathcal{A})$ sont des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre entre la catégorie des S-préschémas affines sur S et la catégorie opposée à celle des \mathcal{O}_S -algèbres quasi-cohérentes.

Il en résulte que se donner une structure algébrique sur un S-préschéma affine T est équivalent à se donner la structure correspondante sur $\mathcal{A}(T)$ dans la catégorie opposée à celle des \mathcal{O}_S -algèbres quasi-cohérentes. En particulier, si G est un S-groupe affine sur S, $\mathcal{A}(G)$ est munie d'une structure de \mathcal{O}_S -bigèbre augmentée, c'est-à-dire que l'on a deux *morphismes de \mathcal{O}_S -algèbres*

$$\Delta : \mathcal{A}(G) \longrightarrow \mathcal{A}(G) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G) \quad \text{et} \quad \varepsilon : \mathcal{A}(G) \longrightarrow \mathcal{O}_S$$

⁽²⁶⁾N.D.E. : Dans ce cas, $T \rightarrow S$ est séparé, donc T est un S-schéma.

correspondant aux morphismes de S-schémas

$$\pi : G \times G \longrightarrow G \quad \text{et} \quad e_G : S \longrightarrow G.$$

Les applications Δ et ε vérifient les conditions suivantes (qui expriment que G est un S-monoïde) :

(HA 1) Δ est co-associatif : le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{A}(G) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G) & \\
 \Delta \nearrow & & \searrow \text{Id} \otimes \Delta \\
 \mathcal{A}(G) & & \mathcal{A}(G) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G) \\
 \Delta \searrow & & \nearrow \Delta \otimes \text{Id} \\
 & \mathcal{A}(G) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G) &
 \end{array}$$

(HA 2) : Δ est compatible avec ε : les deux composés suivants sont l'identité

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(G) &\xrightarrow{\Delta} \mathcal{A}(G) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G) \xrightarrow{\text{Id} \otimes \varepsilon} \mathcal{A}(G) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(G) \quad , \\
 \mathcal{A}(G) &\xrightarrow{\Delta} \mathcal{A}(G) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G) \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{Id}} \mathcal{O}_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(G) \quad .
 \end{aligned}$$

(27)

Profitons de la circonstance pour remarquer une fois encore qu'il résulte de la définition d'une structure de S-groupe que pour se donner une telle structure sur un S-schéma G affine sur S , il n'est pas nécessaire de vérifier quoi ce soit sur $\mathcal{A}(G)$, mais simplement de munir chaque $G(S')$ pour S' au-dessus de S d'une structure de groupe fonctorielle en S' . Cette remarque s'applique *mutatis mutandis* aux morphismes. 25

4.3. Les groupes \mathbb{G}_a et \mathbb{G}_m . L'anneau \mathbb{O} . —

4.3.1. — Soit \mathbf{G}_a le foncteur de $(\mathbf{Sch})^\circ$ dans (\mathbf{Ens}) défini par

$$\mathbf{G}_a(S) = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$$

muni de la structure de $(\widehat{\mathbf{Sch}})$ -groupe définie par la structure de groupe additif de l'anneau $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. Il est représentable par un schéma affine que l'on notera \mathbb{G}_a , et qui est donc un schéma en groupes

$$\mathbb{G}_a = \text{Spec } \mathbb{Z}[T].$$

En effet, $\mathbf{G}_a(S) = \text{Hom}(S, \mathbb{G}_a) = \text{Hom}_{\text{Alg.}}(\mathbb{Z}[T], \Gamma(S, \mathcal{O}_S)) \simeq \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$.

⁽²⁷⁾N.D.E. : Et, bien sûr, le morphisme d'inversion $G \rightarrow G$ induit un morphisme de \mathcal{O}_S -algèbres $\tau : \mathcal{A}(G) \rightarrow \mathcal{A}(G)$ qui, avec Δ et ε , fait de $\mathcal{A}(G)$ une \mathcal{O}_S -algèbre de Hopf...

Pour tout préschéma S , on a donc un S -groupe affine sur S noté $\mathbb{G}_{a,S}$, qui correspond à la \mathcal{O}_S -bigèbre $\mathcal{O}_S[T]$, avec l'application diagonale et l'augmentation définies par :

$$\Delta(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T, \quad \varepsilon(T) = 0.$$

4.3.2. — Soit \mathbf{G}_m le foncteur de $(\mathbf{Sch})^\circ$ dans (\mathbf{Ens}) défini par

$$\mathbf{G}_m(S) = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^*,$$

où $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)^*$ désigne le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, muni de sa structure naturelle de $(\widehat{\mathbf{Sch}})$ -groupe. Il est représentable par un schéma affine noté \mathbb{G}_m

$$\mathbb{G}_m = \text{Spec } \mathbb{Z}[T, T^{-1}] = \text{Spec } \mathbb{Z}[\mathbb{Z}],$$

où $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ désigne l'algèbre du groupe \mathbb{Z} sur l'anneau \mathbb{Z} . En effet

$$\mathbf{G}_m(S) = \text{Hom}_{\text{Alg.}}(\mathbb{Z}[T, T^{-1}], \Gamma(S, \mathcal{O}_S)) \simeq \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^*.$$

Pour tout préschéma S , on a donc un S -groupe affine sur S noté $\mathbb{G}_{m,S}$ qui correspond à la \mathcal{O}_S -algèbre $\mathcal{O}_S[\mathbb{Z}]$, avec l'application diagonale et l'augmentation définies par :

$$\Delta(x) = x \otimes x \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) = 1, \quad \text{pour } x \in \mathbb{Z}.$$

4.3.3. — Soit \mathbf{O} le foncteur \mathbf{G}_a muni de sa structure de $(\widehat{\mathbf{Sch}})$ -anneau. Il est représenté par le schéma $\text{Spec } \mathbb{Z}[T]$ que l'on notera \mathbb{O} lorsqu'on le considèrera comme muni de sa structure de *schéma d'anneaux*.

Pour tout préschéma S , $\mathbb{O}_S = \mathbb{O} \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} \text{Spec } \mathbb{Z}[T] = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[T])$ est donc un S -schéma en anneaux, affine sur S . (*Nota* : dans EGA II 1.7.13, \mathbb{O}_S est noté $S[T]$).

4.3.3.1. — ⁽²⁸⁾ Pour tout objet \mathbf{X} de $(\widehat{\mathbf{Sch}})$, $\mathbf{O}(\mathbf{X}) = \text{Hom}(\mathbf{X}, \mathbf{O})$ est muni d'une structure d'anneau, fonctorielle en \mathbf{X} . En particulier, si X' est un préschéma et si l'on se donne des morphismes $x : X' \rightarrow \mathbf{X}$ et $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{O}$ (c.-à-d., $f \in \mathbf{O}(\mathbf{X})$), alors $f(x) = f \circ x$ est un élément de $\mathbf{O}(X') = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$.

Définition. — Soit $\pi : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{X}$ un morphisme de $(\widehat{\mathbf{Sch}})$, et soit $\mathbf{O}_\mathbf{X} = \mathbf{O} \times \mathbf{X}$. On dit que \mathbf{M} est un $\mathbf{O}_\mathbf{X}$ -module si l'on s'est donné, pour tout \mathbf{X} -préschéma X' , une structure de $\mathbf{O}(X')$ -module sur $\text{Hom}_\mathbf{X}(X', \mathbf{M})$, fonctorielle en X' .

Ceci revient à se donner une loi de \mathbf{X} -groupe abélien $\mu : \mathbf{M} \times_\mathbf{X} \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ et une « loi externe »

$$\mathbf{O}_\mathbf{X} \times \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}, \quad (f, m) \mapsto f \cdot m$$

qui est un \mathbf{X} -morphisme (i.e. $\pi(f \cdot m) = \pi(m)$) et vérifie les compatibilités évidentes, c.-à-d., pour tout préschéma S , $f, f' \in \mathbf{O}(S)$ et $m, m' \in \mathbf{M}(S)$ tels que $\pi(m) = \pi(m')$, on a $1 \cdot m = m$ et :

$$f' \cdot (f \cdot m) = (f'f) \cdot m, \quad (f + f') \cdot m = f \cdot m + f' \cdot m, \quad f \cdot (m + m') = f \cdot m + f \cdot m'.$$

(Si pour tout $x \in \mathbf{X}(S)$ on note $\mathbf{M}(x) = \pi^{-1}(x) = \{m \in \mathbf{M}(S) \mid \pi(m) = x\}$, alors chaque $\mathbf{M}(x)$ est un $\mathbf{O}(S)$ -module.)

⁽²⁸⁾N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe, qui sera utile plus loin (cf. II.1.3).

Dans ce cas, pour tout $\mathbf{Y} \in \text{Ob}(\widehat{\mathbf{Sch}})_{/\mathbf{X}}$ (non nécessairement représentable), $\text{Hom}_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}, \mathbf{M}) = \Gamma(\mathbf{M}_{\mathbf{Y}}/\mathbf{Y})$ est un $\mathbf{O}(\mathbf{Y})$ -module, de façon fonctorielle en \mathbf{Y} .

4.4. Groupes diagonalisables. —

4.4.1. — La construction de \mathbb{G}_m se généralise comme suit : soit M un groupe commutatif et $M_{\mathbb{Z}}$ le schéma ⁽²⁹⁾ en groupes qui lui est associé par le procédé de 4.1. Considérons le foncteur défini par

$$D(M)(S) = \text{Hom}_{\text{groupes}}(M, \mathbb{G}_m(S)) \simeq \text{Hom}_{S\text{-Gr.}}(M_S, \mathbb{G}_{m,S}).$$

C'est un $(\widehat{\mathbf{Sch}})$ -groupe commutatif qui est représentable par un *schéma en groupes* que l'on notera $D(M)$; on aura donc par définition :

$$D(M) \simeq \underline{\text{Hom}}_{(\mathbf{Sch})\text{-Gr.}}(M_{\mathbb{Z}}, \mathbb{G}_m).$$

Posons en effet

$$D(M) = \text{Spec } \mathbb{Z}[M],$$

où $\mathbb{Z}[M]$ est l'algèbre du groupe M sur l'anneau \mathbb{Z} ; on a

$$D(M)(S) = \text{Hom}_{\text{Alg.}}(\mathbb{Z}[M], \Gamma(S, \mathcal{O}_S)) \simeq \text{Hom}_{\text{groupes}}(M, \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^*)$$

par définition même de l'algèbre $\mathbb{Z}[M]$.

4.4.2. — Pour tout préschéma S on a donc un S -schéma en groupes affine sur S

$$D_S(M) = D(M)_S = \underline{\text{Hom}}_{(\mathbf{Sch})\text{-Gr.}}(M_{\mathbb{Z}}, \mathbb{G}_m)_S = \underline{\text{Hom}}_{S\text{-Gr.}}(M_S, \mathbb{G}_{m,S}).$$

Il est associé à la \mathcal{O}_S -bigèbre $\mathcal{O}_S[M]$, munie de l'application diagonale et de l'augmentation définies par

$$\Delta(x) = x \otimes x \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) = 1, \quad \text{pour } x \in M.$$

4.4.3. — Si $f : M \rightarrow N$ est un homomorphisme de groupes commutatifs, on définit de manière évidente un morphisme de S -groupes

$$D_S(f) : D_S(N) \longrightarrow D_S(M),$$

d'où un *foncteur*

$$D_S : M \mapsto D_S(M)$$

de la catégorie des *groupes abéliens* dans la catégorie des *S-groupes affines sur S*, que l'on peut aussi définir comme composé du foncteur $M \mapsto M_S$ et du foncteur $M_S \mapsto \underline{\text{Hom}}_{S\text{-Gr.}}(M_S, \mathbb{G}_{m,S})$. Ce foncteur *commute aux extensions de la base*.

Un S -groupe isomorphe à un groupe de la forme $D_S(M)$ est dit *diagonalisable*. 28
Notons que les éléments de M s'interprètent comme certains caractères de $D_S(M)$, c'est-à-dire certains éléments de $\text{Hom}_{S\text{-Gr.}}(D_S(M), \mathbb{G}_{m,S})$. (*Confer VIII 1*).

⁽²⁹⁾N.D.E. : les préschémas constants sont séparés, cf. 1.8.

4.4.4. — Donnons quelques exemples de groupes diagonalisables. On a d'abord

$$D(\mathbb{Z}) = \mathbb{G}_m \quad \text{et} \quad D(\mathbb{Z}^r) = (\mathbb{G}_m)^r.$$

On pose

$$\mu_n = D(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),$$

et on le nomme *groupe des racines n -ièmes de l'unité*. En effet, on a

$$\mu_n(S) = \text{Hom}_{\text{groupes}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^*) = \{f \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S) \mid f^n = 1\}.$$

Le S -groupe $\mu_{n,S}$ correspond à la \mathcal{O}_S -algèbre $\mathcal{O}_S[T]/(T^n - 1)$. Supposons en particulier que S soit le spectre d'un corps k de caractéristique $p = n$. En posant $T - 1 = s$, on trouve

$$k[T]/(T^p - 1) = k[s]/(s^p),$$

ce qui montre que l'espace topologique sous-jacent à $\mu_{p,k}$ est réduit à un point, l'anneau local de ce point étant la k -algèbre artinienne $k[s]/(s^p)$. (Dans le même ordre d'idées, signalons que les S -schémas $\mathbb{G}_{a,S}$, $\mathbb{G}_{m,S}$, \mathbb{O}_S sont *lisses* sur S , que $D_S(M)$ est *plat* sur S et qu'il est *lisse* sur S si et seulement si aucune caractéristique résiduelle de S ne divise la torsion de M).

29 **4.5. Autres exemples de groupes.** — Le procédé précédent s'applique aux « groupes classiques » (groupes linéaires $\mathbb{G}L_n$, symplectiques $\mathbb{S}p_n$, orthogonaux \mathbb{O}_n , etc.). On définira par exemple $\mathbb{G}L_n$ comme représentant le foncteur $\mathbf{G}L_n$ tel que :

$$\mathbf{G}L_n(S) = \text{GL}(n, \Gamma(S, \mathcal{O}_S)) = \text{Aut}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S^n).$$

On pourra le construire par exemple comme l'ouvert de $\text{Spec } \mathbb{Z}[T_{ij}]$ ($1 \leq i, j \leq n$) défini par la fonction $f = \det((T_{ij})_{i,j=1}^n)$, c'est-à-dire $\text{Spec } \mathbb{Z}[T_{ij}, f^{-1}]$.

4.6. Foncteurs-modules dans la catégorie des préschémas. — Nous nous proposons d'associer à tout \mathcal{O}_S -module sur le préschéma S , un \mathbf{O}_S -module (où \mathbf{O}_S désigne le foncteur-anneau introduit en 4.3.3). Ceci peut se faire de deux manières différentes. De façon précise :

Définition 4.6.1. — Soit S un préschéma. Pour tout \mathcal{O}_S -module \mathcal{F} on note $\mathbf{V}(\mathcal{F})$ et $\mathbf{W}(\mathcal{F})$ les foncteurs contravariants sur $(\mathbf{Sch})/S$ définis par :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathcal{F})(S') &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_{S'}}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}, \mathcal{O}_{S'}), \\ \mathbf{W}(\mathcal{F})(S') &= \Gamma(S', \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}) \end{aligned}$$

(où $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ désigne l'image inverse sur S' du \mathcal{O}_S -module \mathcal{F}).

Alors $\mathbf{V}(\mathcal{F})$ et $\mathbf{W}(\mathcal{F})$ sont munis de manière évidente d'une structure de \mathbf{O}_S -modules (on rappelle que $\mathbf{O}_S(S') = \Gamma(S', \mathcal{O}_{S'}) = \mathbf{W}(\mathcal{O}_S)(S')$), de telle façon que l'on a en fait défini deux foncteurs \mathbf{V} et \mathbf{W} de la catégorie des \mathcal{O}_S -modules dans la catégorie des \mathbf{O}_S -modules, \mathbf{V} étant contravariant et \mathbf{W} covariant.

30 Nous nous restreignons dans la suite de ce paragraphe au cas où les \mathcal{O}_S -modules en question sont quasi-cohérents, c'est-à-dire que nous considérons \mathbf{V} et \mathbf{W} comme des foncteurs de la catégorie $(\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.})$ des \mathcal{O}_S -modules quasi-cohérents dans la catégorie des \mathbf{O}_S -modules

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &: (\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.})^\circ \longrightarrow (\mathbf{O}_S\text{-Mod.}), \\ \mathbf{W} &: (\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.}) \longrightarrow (\mathbf{O}_S\text{-Mod.}). \end{aligned}$$

(Nota : le lecteur remarquera que, dans la suite, toutes les propositions qui ne font intervenir que le foncteur \mathbf{W} sont valables sans cette restriction).

Proposition 4.6.2. — (i) Les foncteurs \mathbf{V} et \mathbf{W} commutent à l'extension de la base : si S' est au-dessus de S et si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_S -module quasi-cohérent, on a

$$\mathbf{V}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{S'}) \simeq \mathbf{V}(\mathcal{F})_{S'} \quad \text{et} \quad \mathbf{W}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{S'}) \simeq \mathbf{W}(\mathcal{F})_{S'}.$$

(ii) Les foncteurs \mathbf{V} et \mathbf{W} sont pleinement fidèles : les applications canoniques

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \mathcal{F}') &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{V}(\mathcal{F}'), \mathbf{V}(\mathcal{F})) \\ \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \mathcal{F}') &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{W}(\mathcal{F}), \mathbf{W}(\mathcal{F}')) \end{aligned}$$

sont bijectives.

(iii) Les foncteurs \mathbf{V} et \mathbf{W} sont additifs :

$$\mathbf{V}(\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}') \simeq \mathbf{V}(\mathcal{F}) \times_{\mathbf{S}} \mathbf{V}(\mathcal{F}') \quad \text{et} \quad \mathbf{W}(\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}') \simeq \mathbf{W}(\mathcal{F}) \times_{\mathbf{S}} \mathbf{W}(\mathcal{F}').$$

Les parties (i) et (iii) sont évidentes sur les définitions. Pour (ii), on prend pour S' 31 des ouverts de S . Nous laissons la démonstration au lecteur (pour \mathbf{V} , utiliser EGA II, 1.7.14).

Proposition 4.6.3. — ⁽³⁰⁾ On a des morphismes canoniques dans $(\mathbf{O}_S\text{-Mod.})$:

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{W}(\mathcal{F}), \mathbf{W}(\mathcal{F}')) & \xlongequal{\quad} & \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{V}(\mathcal{F}'), \mathbf{V}(\mathcal{F})) \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & \mathbf{W}(\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')) & \end{array} .$$

Cela résulte immédiatement de 4.6.2 (i) et (ii).

Notation 4.6.3.1. — Soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_S -module quasi-cohérent. On sait (EGA II, 1.7.8) que le S -foncteur $\mathbf{V}(\mathcal{F})$ est représentable par un S -préschéma affine sur S que l'on note $\mathbb{V}(\mathcal{F})$ et que l'on appelle *fibration vectorielle* ⁽³¹⁾ définie par \mathcal{F} :

$$\mathbb{V}(\mathcal{F}) = \text{Spec}(\mathcal{S}(\mathcal{F})),$$

⁽³⁰⁾N.D.E. : On a ajouté l'isomorphisme $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{W}(\mathcal{F}), \mathbf{W}(\mathcal{F}')) \cong \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{V}(\mathcal{F}'), \mathbf{V}(\mathcal{F}))$.

⁽³¹⁾N.D.E. : on a remplacé « fibré vectoriel » par « fibration vectorielle » ; l'usage actuel étant d'appeler « fibré vectoriel de rang r » une fibration vectorielle qui est *localement triviale* de rang r , c.-à-d., dont le faisceau des sections est localement isomorphe à $\mathcal{O}_S^{\oplus r}$.

où $\mathcal{S}(\mathcal{F})$ désigne l'algèbre symétrique du \mathcal{O}_S -module \mathcal{F} . ⁽³²⁾

Proposition 4.6.4. — Soient \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux \mathcal{O}_S -modules quasi-cohérents, \mathcal{A} une \mathcal{O}_S -algèbre quasi-cohérente. On a un isomorphisme fonctoriel :

$$\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Spec}(\mathcal{A}), \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\mathbf{W}(\mathcal{F}'), \mathbf{W}(\mathcal{F}))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}', \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}).$$

En effet, si on note $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$, le premier membre est canoniquement isomorphe à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\mathbf{W}(\mathcal{F}'), \mathbf{W}(\mathcal{F}))(X)$, c'est-à-dire par définition à

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathbf{W}(\mathcal{F}')_X, \mathbf{W}(\mathcal{F})_X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathbf{W}(\mathcal{F}' \otimes \mathcal{O}_X), \mathbf{W}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X))$$

32 (cf. 4.6.2 (i)), ce qui par 4.6.2 (ii) peut aussi s'écrire

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}' \otimes \mathcal{O}_X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}', \pi_*(\pi^*(\mathcal{F}))),$$

où on note $\pi : X \rightarrow S$ le morphisme structural. Mais, par EGA II, 1.4.7, on a $\pi_*(\pi^*(\mathcal{F})) \simeq \mathcal{F} \otimes \mathcal{A}$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 4.6.4.1. — On a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{W}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{F}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_S(\mathrm{Spec}(\mathcal{A}), \mathbf{W}(\mathcal{F})).$$

En effet, ⁽³³⁾ soient $f : S' \rightarrow S$ un S -préschéma et $X' = X \times_S S'$, on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & X \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ S' & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

et d'après EGA II, 1.5.2, X' est affine sur S' et $\pi'_*(\mathcal{O}_{X'}) = f^*(\mathcal{A})$. On a donc

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(\mathrm{Spec}(\mathcal{A}), \mathbf{W}(\mathcal{F}))(S') = \mathrm{Hom}_{S'}(\mathrm{Spec}(f^*(\mathcal{A})), \mathbf{W}(f^*(\mathcal{F})))$$

et d'après 4.6.4 appliqué à $f^*(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}' = \mathcal{O}_{S'}$ et $f^*(\mathcal{A})$, ceci égale

$$\Gamma(S', f^*(\mathcal{A}) \otimes f^*(\mathcal{F})) = \Gamma(S', f^*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{F})) = \mathbf{W}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{F})(S').$$

Proposition 4.6.5. — Si \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont deux \mathcal{O}_S -modules localement libres de type fini, les morphismes de 4.6.3 sont des isomorphismes.

En effet, pour tout $S' \rightarrow S$, on a

$$\mathbf{W}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \mathcal{F}'))(S') = \Gamma(S', \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \otimes \mathcal{O}_{S'}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{S'}}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{S'}, \mathcal{F}' \otimes \mathcal{O}_{S'}).$$

Mais le second membre est bien isomorphe à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\mathbf{W}(\mathcal{F}), \mathbf{W}(\mathcal{F}'))(S')$ et à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\mathbf{V}(\mathcal{F}'), \mathbf{V}(\mathcal{F}))(S')$, par 4.6.2 (i) et (ii).

33 **Corollaire 4.6.5.1.** — Soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_S -module localement libre de type fini. Posons $\mathcal{F}^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_S)$. On a des isomorphismes canoniques :

⁽³²⁾N.D.E. : Signalons ici les articles [Ni04] (resp. [Ni02]) qui montrent que si S est noethérien et \mathcal{F} un \mathcal{O}_S -module cohérent, alors $\mathbf{W}(\mathcal{F})$ (resp. le S -groupe qui à tout $T \rightarrow S$ associe $\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_T)$) est représentable si et seulement si \mathcal{F} est localement libre.

⁽³³⁾N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

$$\begin{aligned}\mathbf{W}(\mathcal{F}^\vee) &\simeq \underline{\mathbf{Hom}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{W}(\mathcal{F}), \mathbf{O}_S) \simeq \mathbf{V}(\mathcal{F}), \\ \mathbf{V}(\mathcal{F}^\vee) &\simeq \underline{\mathbf{Hom}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{V}(\mathcal{F}), \mathbf{O}_S) \simeq \mathbf{W}(\mathcal{F}).\end{aligned}$$

On a enfin la proposition suivante :

Proposition 4.6.6. — Soit $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ un morphisme de \mathcal{O}_S -modules localement libres de rang fini. Pour que $\mathbf{W}(f) : \mathbf{W}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{W}(\mathcal{F}')$ soit un monomorphisme, il faut et il suffit que f identifie \mathcal{F} localement à un facteur direct de \mathcal{F}' .

La proposition directe est essentiellement contenue dans EGA 0_I, 5.5.5. ⁽³⁴⁾ Réciproquement, si \mathcal{F} est localement facteur direct de \mathcal{F}' alors, pour tout $\pi : S' \rightarrow S$, $\pi^*\mathcal{F}$ est un sous-module de $\pi^*\mathcal{F}'$ (car localement facteur direct), donc $\mathbf{W}(\mathcal{F})(S') = \Gamma(S', \pi^*\mathcal{F})$ est un sous-module de $\mathbf{W}(\mathcal{F}')(S') = \Gamma(S', \pi^*\mathcal{F}')$.

4.7. La catégorie des G - \mathcal{O}_S -modules. — Soient G un S -groupe et \mathcal{F} un \mathcal{O}_S -module; $\mathbf{W}(\mathcal{F})$ est muni d'une structure de \mathbf{O}_S -module.

Définition 4.7.1. — On appelle structure de G - \mathcal{O}_S -module sur \mathcal{F} une structure de \mathbf{h}_G - \mathbf{O}_S -module sur $\mathbf{W}(\mathcal{F})$ (cf. 3.2). Un morphisme de G - \mathcal{O}_S -modules est par définition un morphisme des \mathbf{h}_G - \mathbf{O}_S -modules associés. On obtient ainsi la catégorie $(G\text{-}\mathcal{O}_S\text{-Mod.})$, et l'on note $(G\text{-}\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.})$ la sous-catégorie pleine formée des G - \mathcal{O}_S -modules qui sont quasi-cohérents comme \mathcal{O}_S -modules.

Se donner une structure de G - \mathcal{O}_S -module sur \mathcal{F} , c'est donc par 3.2 se donner un morphisme de $(\mathbf{Sch})/S$ -groupes

$$\mathbf{h}_G \longrightarrow \underline{\mathbf{Aut}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{W}(\mathcal{F})).$$

Remarque 4.7.1.1. — On peut dire que l'on a construit les catégories que l'on vient de définir par les carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} (G\text{-}\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.}) & \hookrightarrow & (G\text{-}\mathcal{O}_S\text{-Mod.}) & \longrightarrow & (\mathbf{h}_G\text{-}\mathbf{O}_S\text{-Mod.}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{oubli} \\ (\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.}) & \hookrightarrow & (\mathcal{O}_S\text{-Mod.}) & \xrightarrow{\mathbf{W}} & (\mathbf{O}_S\text{-Mod.}) \end{array}$$

⁽³⁵⁾ Les catégories $(\mathcal{O}_S\text{-Mod.})$ et $(\mathbf{O}_S\text{-Mod.})$ sont abéliennes, mais on prendra garde qu'en général le foncteur \mathbf{W} n'est pas exact, ni à gauche ni à droite.

Remarque 4.7.1.2. — ⁽³⁶⁾ Soit \mathcal{F} un G - \mathcal{O}_S -module. Le sous-faisceau des invariants \mathcal{F}^G est défini comme suit : pour tout ouvert U de S ,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^G(U) &= \mathbf{W}(\mathcal{F})^G(U) = \{x \in \mathcal{F}(U) \mid g \cdot x_{S'} = x_{S'} \text{ pour tout } S' \xrightarrow{f} U, g \in G(S')\}, \\ \text{où } x_{S'} &\text{ désigne l'image de } x \text{ dans } \Gamma(S', f^*(\mathcal{F})) = \Gamma(U, f_*f^*(\mathcal{F})).\end{aligned}$$

⁽³⁴⁾N.D.E. : On a détaillé la phrase qui suit.

⁽³⁵⁾N.D.E. : On a corrigé l'original, en supprimant l'assertion que la catégorie $(G\text{-}\mathcal{O}_S\text{-Mod.})$ est abélienne, voir 4.7.2.1 plus bas.

⁽³⁶⁾N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

On prendra garde que le morphisme naturel $\mathbf{W}(\mathcal{F}^G) \rightarrow \mathbf{W}(\mathcal{F})^G$ n'est pas un isomorphisme en général. Par exemple, si $S = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ et G est le groupe constant $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, \tau\}$ agissant sur $\mathcal{F} = \mathcal{O}_S$ par $\tau \cdot 1 = -1$, on a $\mathcal{F}^G = 0$ mais, si R est une \mathbb{F}_2 -algèbre, $\mathbf{W}(\mathcal{F})^G(\text{Spec}(R)) = R$.

34

4.7.2. — On suppose désormais, jusqu'à la fin du n°4.7, que G est *affine* sur S .⁽³⁷⁾ Alors, en vertu de 4.6.4, la donnée d'un morphisme de S -foncteurs

$$\rho : \mathbf{h}_G \longrightarrow \underline{\text{End}}_{\mathcal{O}_S}(\mathbf{W}(\mathcal{F}))$$

équivaux à celle d'un morphisme de \mathcal{O}_S -modules

$$\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G).$$

Dire que ρ est un morphisme de $(\widehat{\text{Sch}})_{/S}$ -groupes équivaux alors à dire que μ satisfait aux axiomes suivants :

(CM 1) *le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G) \\ \mu \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes \Delta \\ \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G) & \xrightarrow{\mu \otimes \text{id}} & \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G) . \end{array}$$

(CM 2) *le composé ci-dessous est l'identité*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\mu} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G) \xrightarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} .$$

Ces axiomes (CM 1) et (CM 2) sont ceux de la structure de *comodule* (à droite)⁽³⁸⁾ sur la bigèbre $\mathcal{A}(G)$.

Posons $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G)$. Si \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont des \mathcal{A} -comodules, un morphisme de comodules $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ est un morphisme de \mathcal{O}_S -modules tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}' \\ \mu_{\mathcal{F}} \downarrow & & \downarrow \mu_{\mathcal{F}'} \\ \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A} & \xrightarrow{f \otimes \text{id}} & \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A} . \end{array}$$

On obtient ainsi la catégorie $(\mathcal{A}\text{-Comod.})$, et l'on notera $(\mathcal{A}\text{-Comod.q.c.})$ la sous-catégorie pleine formée des \mathcal{A} -comodules qui sont quasi-cohérents comme \mathcal{O}_S -modules. On a donc obtenu :

35 Proposition 4.7.2. — *Soit G un S -groupe affine sur S . On a des équivalences de caté-*

⁽³⁷⁾N.D.E. : cf. VI_B, §§ 11.1–11.6 pour l'extension des résultats de 4.7.2 au cas où G n'est pas nécessairement affine, mais où G et \mathcal{F} sont supposés *plats* sur S .

⁽³⁸⁾N.D.E. : Les G - \mathcal{O}_S -modules à *gauche* correspondent de façon naturelle aux $\mathcal{A}(G)$ -comodules à *droite*.

gories :

$$\begin{aligned} (\mathbf{G}\text{-}\mathcal{O}_S\text{-Mod.}) &\cong (\mathcal{A}(\mathbf{G})\text{-Comod.}) \\ (\mathbf{G}\text{-}\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.}) &\cong (\mathcal{A}(\mathbf{G})\text{-Comod.q.c.}) \end{aligned}$$

(³⁹) Si de plus $S = \text{Spec}(\Lambda)$ est affine et si on note $\Lambda[\mathbf{G}] = \Gamma(S, \mathcal{A}(\mathbf{G}))$, on a une équivalence de catégories

$$(\mathcal{A}(\mathbf{G})\text{-Comod.q.c.}) \cong (\Lambda[\mathbf{G}]\text{-Comod.}).$$

(⁴⁰) On suppose que $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{G})$ est un \mathcal{O}_S -module plat. Soient \mathcal{E} un \mathcal{A} -comodule et \mathcal{F} un sous- \mathcal{O}_S -module de \mathcal{E} . Comme \mathcal{A} est plat sur \mathcal{O}_S , on peut identifier $\mathcal{F} \otimes \mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{F} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$) à un sous- \mathcal{O}_S -module de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{E} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$). Supposons que $\mu_{\mathcal{E}}$ applique \mathcal{F} dans $\mathcal{F} \otimes \mathcal{A}$, alors sa restriction $\mu_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{A}$ munit \mathcal{F} d'une structure de \mathcal{A} -comodule ; on dit que \mathcal{F} est un *sous-comodule* de \mathcal{E} . Par passage au quotient, $\mu_{\mathcal{E}}$ définit un morphisme de \mathcal{O}_S -modules $\mathcal{E}/\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{A}$, qui munit \mathcal{E}/\mathcal{F} d'une structure de \mathcal{A} -comodule. Si $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ est un morphisme de \mathcal{A} -comodules, $\text{Ker } f$ (resp. $\text{Im } f$) est un sous- \mathcal{A} -comodule de \mathcal{E} (resp. \mathcal{E}'), et f induit un isomorphisme de \mathcal{A} -comodules : $\mathcal{E}/\text{Ker } f \xrightarrow{\sim} \text{Im } f$. De plus, si \mathcal{E} et \mathcal{E}' sont des \mathcal{O}_S -modules quasi-cohérents, il en est de même de $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$. Par conséquent, (\mathcal{A} -Comod.) et (\mathcal{A} -Comod.q.c.) sont des catégories *abéliennes*.

Corollaire 4.7.2.1. — On suppose que \mathbf{G} est affine et plat sur S . Alors la catégorie ($\mathbf{G}\text{-}\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.}$) (resp. ($\mathbf{G}\text{-}\mathcal{O}_S\text{-Mod.}$)), équivalente à la catégorie des $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ -comodules quasi-cohérents sur \mathcal{O}_S (resp. $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ -comodules), est abélienne.

4.7.3. — Supposons maintenant que \mathbf{G} soit un *groupe diagonalisable*, c'est-à-dire que $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ soit l'algèbre d'un groupe commutatif \mathbf{M} sur le faisceau d'anneaux \mathcal{O}_S . Si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_S -module, on a

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{A}(\mathbf{G}) = \coprod_{m \in \mathbf{M}} \mathcal{F} \otimes m\mathcal{O}_S.$$

Se donner un morphisme de \mathcal{O}_S -modules

$$\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{A}(\mathbf{G})$$

est donc équivalent à se donner des \mathcal{O}_S -endomorphismes $(\mu_m)_{m \in \mathbf{M}}$ de \mathcal{F} , tels que pour toute section x de \mathcal{F} sur un ouvert de S , $(\mu_m(x))$ soit une section de la somme directe $\coprod_{m \in \mathbf{M}} \mathcal{F}$ (cela veut dire que sur tout ouvert suffisamment petit, il n'y ait qu'un nombre fini de restrictions des $\mu_m(x)$ qui soient non nulles).

Pour que μ définie par

$$\mu(x) = \sum_{m \in \mathbf{M}} \mu_m(x) \otimes m$$

vérifie (CM 1) (resp. (CM 2)) il faut et il suffit que l'on ait

$$\mu_m \circ \mu_{m'} = \delta_{mm'} \mu_m, \quad (\text{resp. } \sum_{m \in \mathbf{M}} \mu_m = \text{Id}_{\mathcal{F}}),$$

(³⁹)N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

(⁴⁰)N.D.E. : On a ajouté le paragraphe qui suit, tiré de [Se68, §1.3].

36 ce qui signifie que les μ_m sont des projecteurs deux à deux orthogonaux de somme l'identité. On a donc prouvé :

Proposition 4.7.3. — Si $G = D_S(M)$ est un S -groupe diagonalisable, la catégorie des G - \mathcal{O}_S -modules quasi-cohérents (resp. des G - \mathcal{O}_S -modules) est équivalente à la catégorie des \mathcal{O}_S -modules quasi-cohérents (resp. des \mathcal{O}_S -modules) gradués de type M .

Remarque. — Si \mathcal{F} est muni d'une structure de \mathcal{O}_S -algèbre conservée par les opérations de G , alors la graduation de \mathcal{F} est une graduation d'algèbre. Plus précisément :

Corollaire 4.7.3.1. — Le foncteur $\mathcal{A} \mapsto \text{Spec } \mathcal{A}$ induit une équivalence entre la catégorie des \mathcal{O}_S -algèbres quasi-cohérentes graduées de type M et la catégorie opposée à celle des S -schémas affines sur S à S -groupe d'opérateurs $G = D_S(M)$.

Proposition 4.7.4. — Soit G un S -groupe diagonalisable. Si $0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow 0$ est une suite exacte de G - \mathcal{O}_S -modules quasi-cohérents qui se scinde comme suite de \mathcal{O}_S -modules, alors elle se scinde également comme suite de G - \mathcal{O}_S -modules.

En effet, si $G = D_S(M)$, chacun des \mathcal{F}_i est gradué par des $(\mathcal{F}_i)_m$ et pour chaque $m \in M$ la suite

$$0 \longrightarrow (\mathcal{F}_1)_m \longrightarrow (\mathcal{F}_2)_m \longrightarrow (\mathcal{F}_3)_m \longrightarrow 0$$

de \mathcal{O}_S -modules est scindée. La proposition précédente entraîne alors le résultat.

4.8. Objets et modules G -équivariants. — ⁽⁴¹⁾ Soit \mathcal{C} une catégorie où les produits fibrés existent et soit G un $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe, $\pi : M \rightarrow X$ un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$, et $\lambda : G \times X \rightarrow X$ une action de G sur X . Si $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et $x \in X(U)$, on note $M(x) = \pi^{-1}(x) = \{m \in M(U) \mid \pi(m) = x\}$; si $g \in G(U)$ on notera aussi $gx = \lambda(g, x) \in X(U)$.

Définition 4.8.1. — a) On dit que M est un X -objet G -équivariant si l'on s'est donné une action $\Lambda : G \times M \rightarrow M$ de G sur M relevant λ , i.e. telle que le carré ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \xrightarrow{\Lambda} & M \\ \text{id}_G \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G \times X & \xrightarrow{\lambda} & X \end{array} .$$

Ceci équivaut à se donner des applications

$$\Lambda_x(g) : M(x) \longrightarrow M(gx), \quad m \mapsto g \cdot m$$

pour tout morphisme $(g, x) : U \rightarrow G \times X$ ($U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$), vérifiant $1 \cdot m = m$ et $g \cdot (h \cdot m) = (gh) \cdot m$ et fonctorielles en le $(G \times X)$ -objet U .

b) Sous les conditions de a), on dit que M est un O_X -module G -équivariant si c'est un O_X -module (cf. 4.3.3.1) et si l'action Λ est compatible avec la structure de O_X -module de M , c.-à-d., si pour tout $(g, x) \in G(U) \times X(U)$ ($U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$), l'application $\Lambda_x(g) : M(x) \rightarrow M(gx)$, $m \mapsto g \cdot m$ est un morphisme de $O(U)$ -modules.

⁽⁴¹⁾N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe.

Remarque 4.8.2. — (i) Dans a) ci-dessus, les conditions $\Lambda_x(1) = \text{id}$ et $\Lambda_{hx}(g) \circ \Lambda_x(h) = \Lambda_x(gh)$ entraînent évidemment que chaque $\Lambda_x(g)$ est une *bijection*, d'inverse $\Lambda_{gx}(g^{-1})$. Réciproquement, si l'on suppose que chaque $\Lambda_x(g)$ est une bijection, la condition $\Lambda_{hx}(g) \circ \Lambda_x(h) = \Lambda_x(gh)$ appliquée à $h = 1$ donne $\Lambda_x(1) = \text{id}$.

(ii) Dans ce qui suit, on notera $\mathbf{Y} \times_f \mathbf{F}$ le produit fibré de $\pi : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{X}$ et d'un \mathbf{X} -foncteur $f : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$. D'après (i), on voit que se donner des bijections $\mathbf{M}(x) \xrightarrow{\sim} \mathbf{M}(gx)$, $m \mapsto g \cdot m$, fonctorielles en le morphisme $(g, x) : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{G} \times \mathbf{X}$, équivaut à se donner un *isomorphisme* de $(\mathbf{G} \times \mathbf{X})$ -foncteurs

$$\theta : (\mathbf{G} \times \mathbf{X}) \times_{\text{pr}_{\mathbf{X}}} \mathbf{M} \xrightarrow{\sim} (\mathbf{G} \times \mathbf{X}) \times_{\lambda} \mathbf{M}, \quad (g, x, m) \mapsto (g, x, g \cdot m);$$

ceci définit une *action* de \mathbf{G} sur \mathbf{M} (i.e. $g \cdot (h \cdot m) = (gh) \cdot m$) si et seulement si le diagramme de $(\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X})$ -isomorphismes ci-dessous est commutatif (où on note μ la multiplication de \mathbf{G} et $f^*(\theta)$ l'isomorphisme déduit de θ par un changement de base $f : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{G} \times \mathbf{X}$) :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X}) \times_{\text{pr}_{\mathbf{X}} \circ \text{pr}_{2,3}} \mathbf{M} & \xrightarrow[\sim]{\text{pr}_{2,3}^*(\theta)} & (\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X}) \times_{\lambda \circ \text{pr}_{2,3}} \mathbf{M} \\ \parallel & & \parallel \\ (\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X}) \times_{\text{pr}_{\mathbf{X}} \circ (\mu \times \text{id}_{\mathbf{X}})} \mathbf{M} & & (\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X}) \times_{\text{pr}_{\mathbf{X}} \circ (\text{id}_{\mathbf{G}} \times \lambda)} \mathbf{M} \\ \downarrow (\mu \times \text{id}_{\mathbf{X}})^*(\theta) \wr & & \downarrow \wr (\text{id}_{\mathbf{G}} \times \lambda)^*(\theta) \\ (\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X}) \times_{\lambda \circ (\mu \times \text{id}_{\mathbf{X}})} \mathbf{M} & \xlongequal{\quad} & (\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X}) \times_{\lambda \circ (\text{id}_{\mathbf{G}} \times \lambda)} \mathbf{M} \end{array} .$$

Appliquons ce qui précède dans la situation suivante. Soient S un préschéma, G un S -groupe opérant sur un S -préschéma X , et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module (quasi-cohérent). Rappelons (cf. 4.6.2) que, pour tout X -préschéma $f : Y \rightarrow X$, on a $\mathbf{W}(\mathcal{F}) \times_X Y \simeq \mathbf{W}(f^*\mathcal{F})$, et que le foncteur \mathbf{W} est pleinement fidèle.

Définition 4.8.3. — On dit que \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -module *G-équivariant* si le \mathbf{O}_X -module $\mathbf{M} = \mathbf{W}(\mathcal{F})$ est G -équivariant, c.-à-d., si on s'est donné des isomorphismes de $\mathbf{O}(U)$ -modules

$$\Lambda_x(g) : \Gamma(U, x^*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U, (gx)^*\mathcal{F}),$$

fonctoriels en le $(G \times_S X)$ -préschéma U et vérifiant $\Lambda_{hx}(g) \circ \Lambda_x(h) = \Lambda_x(gh)$.

Compte-tenu de la remarque 4.8.2 et des rappels ci-dessus, ceci équivaut à l'existence d'un *isomorphisme* de $\mathcal{O}_{G \times X}$ -modules

$$\theta : \text{pr}_{\mathbf{X}}^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \lambda^*(\mathcal{F})$$

tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{pr}_{2,3}^* \circ \text{pr}_X^*(\mathcal{F}) & \xrightarrow[\sim]{\text{pr}_{2,3}^*(\theta)} & \text{pr}_{2,3}^* \circ \lambda^*(\mathcal{F}) \xlongequal{\quad} (\text{id}_G \times \lambda)^* \circ \text{pr}_X^*(\mathcal{F}) \\
 \parallel & & \downarrow \wr (\text{id}_G \times \lambda)^*(\theta) \\
 (\mu \times \text{id}_X)^* \circ \text{pr}_X^*(\mathcal{F}) & \xrightarrow[\sim]{(\mu \times \text{id}_X)^*(\theta)} & (\mu \times \text{id}_X)^* \circ \lambda^*(\mathcal{F}) \xlongequal{\quad} (\text{id}_G \times \lambda)^* \circ \lambda^*(\mathcal{F}) .
 \end{array}$$

Remarque 4.8.4. — On retrouve ainsi la définition donnée, par exemple, dans [GIT, Chap. 1, § 3], à ceci près que dans *loc. cit.* Mumford considère un \mathcal{O}_X -module localement libre \mathcal{E} de rang fini et une action de G sur $\mathbf{V}(\mathcal{E}) = \mathbf{W}(\mathcal{E}^\vee)$.

5. Cohomologie des groupes

37

5.1. Le complexe standard. — ⁽⁴²⁾ Soient \mathcal{C} une catégorie, \mathbf{G} un $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe, \mathbf{O} un $\widehat{\mathcal{C}}$ -anneau et \mathbf{F} un \mathbf{G} - \mathbf{O} -module. On pose, pour $n \geq 0$,

$$C^n(\mathbf{G}, \mathbf{F}) = \text{Hom}(\mathbf{G}^n, \mathbf{F}) \quad \text{et} \quad \underline{C}^n(\mathbf{G}, \mathbf{F}) = \underline{\text{Hom}}(\mathbf{G}^n, \mathbf{F}),$$

où \mathbf{G}^0 est l'objet final \mathbf{e} . Alors $\underline{C}^n(\mathbf{G}, \mathbf{F})$ (resp. $C^n(\mathbf{G}, \mathbf{F})$) est muni de manière évidente d'une structure de \mathbf{O} -module (resp. de $\Gamma(\mathbf{O})$ -module) et on a

$$C^n(\mathbf{G}, \mathbf{F}) \cong \Gamma(\underline{C}^n(\mathbf{G}, \mathbf{F})) \quad \text{et} \quad \underline{C}^n(\mathbf{G}, \mathbf{F})(S) = C^n(\mathbf{G}_S, \mathbf{F}_S).$$

Se donner un élément de $C^n(\mathbf{G}, \mathbf{F})$, c'est se donner pour chaque $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ une n -cochaîne de $\mathbf{G}(S)$ dans $\mathbf{F}(S)$, fonctoriellement en S . L'opérateur bord

$$\partial : C^n(\mathbf{G}(S), \mathbf{F}(S)) \longrightarrow C^{n+1}(\mathbf{G}(S), \mathbf{F}(S)),$$

qui, rappelons-le, est donné par la formule

$$\begin{aligned}
 \partial f(g_1, \dots, g_{n+1}) &= g_1 f(g_2, \dots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) \\
 &\quad + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n),
 \end{aligned}$$

est fonctoriel en S et définit donc un homomorphisme :

$$\partial : C^n(\mathbf{G}, \mathbf{F}) \longrightarrow C^{n+1}(\mathbf{G}, \mathbf{F})$$

38

tel que $\partial \circ \partial = 0$. On a donc défini un complexe de groupes abéliens (et même de $\Gamma(\mathbf{O})$ -modules) noté $C^*(\mathbf{G}, \mathbf{F})$. On définit de la même manière le complexe de \mathbf{O} -modules $\underline{C}^*(\mathbf{G}, \mathbf{F})$ et on a :

$$C^*(\mathbf{G}, \mathbf{F}) = \Gamma(\underline{C}^*(\mathbf{G}, \mathbf{F})).$$

On note $H^n(\mathbf{G}, \mathbf{F})$ (resp. $\underline{H}^n(\mathbf{G}, \mathbf{F})$) les groupes (resp. les $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes) d'homologie du complexe $C^*(\mathbf{G}, \mathbf{F})$ (resp. $\underline{C}^*(\mathbf{G}, \mathbf{F})$).

On a en particulier

$$\underline{H}^0(\mathbf{G}, \mathbf{F}) = \mathbf{F}^{\mathbf{G}} \quad \text{et} \quad H^0(\mathbf{G}, \mathbf{F}) = \Gamma(\mathbf{F}^{\mathbf{G}}).$$

⁽⁴²⁾N.D.E. : Ce complexe est souvent appelé « complexe de Hochschild » ; voir par exemple le § II.3 dans [DG70].

Remarque 5.1.1. — ⁽⁴³⁾ La description « ensembliste » de ∂ donnée plus haut est comode pour vérifier que $\partial \circ \partial = 0$. On peut aussi définir ∂ en termes de la multiplication $m : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ et de l'action $\mu : \mathbf{G} \times \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ comme suit : pour tout $f \in C^n(\mathbf{G}, \mathbf{F})$,

$$\partial f = \mu \circ (\text{id}_{\mathbf{G}} \times f) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f \circ (\text{id}_{\mathbf{G}^{i-1}} \times m \times \text{id}_{\mathbf{G}^{n-i}}) + (-1)^{n+1} f \circ \text{pr}_{[1,n]},$$

où $\text{pr}_{[1,n]}$ désigne la projection de $\mathbf{G}^{n+1} = \mathbf{G}^n \times \mathbf{G}$ sur \mathbf{G}^n . De même, pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et $f \in \underline{C}^n(\mathbf{G}, \mathbf{F})(S) = C^n(\mathbf{G}_S, \mathbf{F}_S)$, on a

$$\partial f = \mu_S \circ (\text{id}_{\mathbf{G}_S} \times f) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f \circ (\text{id}_{\mathbf{G}_S^{i-1}} \times m_S \times \text{id}_{\mathbf{G}_S^{n-i}}) + (-1)^{n+1} f \circ \text{pr}_{[1,n]},$$

où m_S et μ_S sont déduits de m et μ par changement de base.

5.2. ⁽⁴⁴⁾ On rappelle (cf. §3) que $(\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-Mod.})$ est munie d'une structure de catégorie abélienne, définie « argument par argument » ; ainsi,

$$0 \longrightarrow \mathbf{F}' \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de $\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-modules}$ si, et seulement si, la suite de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow \mathbf{F}'(S) \longrightarrow \mathbf{F}(S) \longrightarrow \mathbf{F}''(S) \longrightarrow 0$$

est exacte, pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

⁽⁴⁵⁾ Supposons \mathcal{C} *petite* ; alors, d'après 3.2.1, $(\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-Mod.})$ possède assez d'objets injectifs, de sorte que les foncteurs dérivés des foncteurs exacts à gauche \underline{H}^0 et H^0 sont définis. Nous nous proposons maintenant de montrer que les foncteurs \underline{H}^n (resp. H^n) sont bien les foncteurs dérivés de \underline{H}^0 (resp. H^0).

Définition 5.2.0. — ⁽⁴⁶⁾ Pour tout \mathbf{O} -module \mathbf{P} , on note $E(\mathbf{P})$ l'objet $\underline{\text{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P})$ de \mathcal{C} muni de la structure de $\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}$ -module définie comme suit : pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ on a $\underline{\text{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P})(S) = \text{Hom}_S(\mathbf{G}_S, \mathbf{P}_S)$, et on fait opérer $g \in \mathbf{G}(S)$ et $a \in \mathbf{O}(S)$ sur $\phi \in \text{Hom}_S(\mathbf{G}_S, \mathbf{P}_S)$ par les formules

$$(g \cdot \phi)(h) = \phi(hg) \quad \text{et} \quad (a \cdot \phi)(h) = a\phi(h),$$

pour tout $h \in \mathbf{G}(S')$, $S' \rightarrow S$. De plus, pour tout $\phi \in \text{Hom}_S(\mathbf{G}_S, \mathbf{P}_S)$ on pose

$$\varepsilon(\phi) = \phi(1) \in \mathbf{P}(S)$$

(où 1 désigne l'élément unité de $\mathbf{G}(S)$).

Ceci définit un foncteur $E : (\mathbf{O}\text{-Mod.}) \rightarrow (\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-Mod.})$ et une transformation naturelle $\varepsilon : E \rightarrow \text{Id}$, où Id désigne le foncteur identique de $(\mathbf{O}\text{-Mod.})$.

⁽⁴³⁾N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

⁽⁴⁴⁾N.D.E. : On a ajouté le rappel qui suit.

⁽⁴⁵⁾N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

⁽⁴⁶⁾N.D.E. : On a modifié l'original, afin d'introduire 5.2.0.1 et 5.2.0.2, qui seront utiles dans la démonstration du théorème 5.3.1.

Remarque 5.2.0.1. — ⁽⁴⁶⁾ Dans ce qui suit, désignons par \mathbf{G}_1 et \mathbf{G}_2 deux copies de \mathbf{G} . Alors le morphisme

$$\mathbf{G}_1 \times \mathbf{E}(\mathbf{P}) \longrightarrow \mathbf{E}(\mathbf{P}), \quad (g_1, \phi) \mapsto (g_2 \mapsto \phi(g_2 g_1))$$

correspond via les isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_1 \times \mathbf{E}(\mathbf{P}), \mathbf{E}(\mathbf{P})) &\simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{E}(\mathbf{P}), \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}_1, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}_2, \mathbf{P}))) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{E}(\mathbf{P}), \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_1, \mathbf{P})) \end{aligned}$$

au morphisme $\phi \mapsto ((g_2, g_1) \mapsto \phi(g_2 g_1))$, i.e. au morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_1, \mathbf{P})$$

induit par la multiplication $\mu_{\mathbf{G}} : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$, $(g_2, g_1) \mapsto g_2 g_1$.

Lemme 5.2.0.2. — ⁽⁴⁶⁾ (i) *Le foncteur \mathbf{E} est adjoint à droite du foncteur d'oubli $(\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-Mod.}) \rightarrow (\mathbf{O}\text{-Mod.})$; plus précisément, $\varepsilon : \mathbf{E} \rightarrow \mathrm{Id}$ induit pour tout $\mathbf{M} \in (\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-Mod.})$ et $\mathbf{P} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{O}\text{-Mod.})$ une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-Mod.}}(\mathbf{M}, \mathbf{E}(\mathbf{P})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}\text{-Mod.}}(\mathbf{M}, \mathbf{P})$$

fonctorielle en \mathbf{M} et \mathbf{P} .

(ii) *Par conséquent, si \mathbf{I} est un objet injectif de $(\mathbf{O}\text{-Mod.})$ alors $\mathbf{E}(\mathbf{I})$ est un objet injectif de $(\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-Mod.})$.*

Démonstration. À tout \mathbf{O} -morphisme $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{P}$, on associe l'élément ϕ_f de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(\mathbf{M}, \mathbf{E}(\mathbf{P}))$ défini comme suit. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et $m \in \mathbf{M}(S)$, $\phi_f(m)$ est l'élément de $\mathrm{Hom}_S(\mathbf{G}_S, \mathbf{P}_S)$ défini par : pour tout $g \in \mathbf{G}(S')$, $S' \rightarrow S$,

$$\phi_f(m)(g) = f(gm) \in \mathbf{P}(S').$$

Alors, pour tout $h \in \mathbf{G}(S)$, on a $\phi_f(hm) = h \cdot f(m)$, i.e. ϕ_f est un élément de

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-Mod.}}(\mathbf{M}, \mathbf{E}(\mathbf{P})).$$

Si $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-Mod.}}(\mathbf{M}, \mathbf{E}(\mathbf{P}))$ et si on note, pour tout $m \in \mathbf{M}(S)$, $f(m) = \phi(m)(1)$, alors

$$\phi_f(m)(g) = f(gm) = \phi(gm)(1) = (g \cdot \phi(m))(1) = \phi(m)(g),$$

i.e. $\phi_f = \phi$. Réciproquement, il est clair que $\phi_f(m)(1) = f(m)$. Ceci prouve (i), et (ii) en découle aussitôt.

Définition 5.2.0.3. — Soit \mathbf{M} un $\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}$ -module; l'application identique de \mathbf{M} (considéré comme \mathbf{O} -module) correspond par adjonction au morphisme de $\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}$ -modules

$$\mu_{\mathbf{M}} : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{E}(\mathbf{M})$$

tel que pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et $m \in \mathbf{M}(S)$, $\mu_{\mathbf{M}}(m)$ est le morphisme $\mathbf{G}_S \rightarrow \mathbf{M}_S$ défini par : pour tout $S' \rightarrow S$ et $g \in \mathbf{G}(S')$, $\mu_{\mathbf{M}}(m)(g) = g \cdot m_{S'} \in \mathbf{M}(S')$.

Notons que $\mu_{\mathbf{M}}$ est un *monomorphisme*. En effet, $\varepsilon_{\mathbf{M}} : \mathbf{E}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{M}$ est un morphisme de \mathbf{O} -modules tel que $\varepsilon_{\mathbf{M}} \circ \mu_{\mathbf{M}} = \mathrm{id}_{\mathbf{M}}$; par conséquent \mathbf{M} est facteur direct, comme \mathbf{O} -module, de $\mathbf{E}(\mathbf{M})$.

39

Proposition 5.2.1. — *On suppose que \mathcal{C} est petite, que les produits finis y existent, et que \mathbf{G} est représentable. Alors, les foncteurs $H^n(\mathbf{G}, _)$ (resp. $\underline{H}^n(\mathbf{G}, _)$) sont les foncteurs dérivés du foncteur exact à gauche $H^0(\mathbf{G}, _)$ (resp. $\underline{H}^0(\mathbf{G}, _)$) sur la catégorie des \mathbf{G} - \mathbf{O} -modules.*

En vertu des résultats généraux bien connus ⁽⁴⁷⁾, il suffit de vérifier que les $H^n(\mathbf{G}, _)$ (resp. $\underline{H}^n(\mathbf{G}, _)$) forment un foncteur cohomologique effaçable en degrés > 0 .

Soit

$$0 \longrightarrow \mathbf{F}' \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de \mathbf{G} - \mathbf{O} -modules, et soit $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Par hypothèse, \mathbf{G} est représentable par un objet $G \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, et les produits finis existent dans \mathcal{C} ; en particulier \mathcal{C} possède un élément final e . Donc, chaque $\mathbf{G}^n \times \mathbf{h}_S$ est représentable par $G^n \times S$ (avec $G^0 = e$), et la suite

$$0 \longrightarrow \mathbf{F}'(G^n \times S) \longrightarrow \mathbf{F}(G^n \times S) \longrightarrow \mathbf{F}''(G^n \times S) \longrightarrow 0$$

est exacte. Ceci montre que la suite de \mathbf{O} -modules

$$0 \longrightarrow \underline{C}^n(\mathbf{h}_G, \mathbf{F}') \longrightarrow \underline{C}^n(\mathbf{h}_G, \mathbf{F}) \longrightarrow \underline{C}^n(\mathbf{h}_G, \mathbf{F}'') \longrightarrow 0$$

est exacte. Il en résulte que $\underline{C}^*(\mathbf{G}, _)$ considéré comme foncteur sur $(\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-Mod.})$ à valeurs dans la catégorie des complexes de $(\mathbf{O}\text{-Mod.})$ est exact. Ceci montre que les $\underline{H}^n(\mathbf{G}, _)$ forment bien un foncteur cohomologique. Comme le foncteur Γ est exact, il en est de même pour les $H^n(\mathbf{G}, _)$. Il nous suffira maintenant de démontrer :

Lemme 5.2.2. — *Pour tout $\mathbf{P} \in \text{Ob}(\mathbf{O}\text{-Mod.})$, on a :*

$$H^n(\mathbf{G}, \underline{\text{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P})) = 0 \quad \text{et} \quad \underline{H}^n(\mathbf{G}, \underline{\text{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P})) = 0, \quad \text{pour } n > 0.$$

Il nous suffit de démontrer que $\underline{C}^*(\mathbf{G}, \underline{\text{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P}))$ et $C^*(\mathbf{G}, \underline{\text{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P}))$ sont homotopiquement triviaux en degrés > 0 . Il suffit même de le faire pour le second, le résultat correspondant pour le premier s'en déduisant par changement de base. ⁽⁴⁸⁾ Or, on définit pour tout $n \geq 0$ un morphisme

$$\sigma : C^{n+1}(\mathbf{G}, \underline{\text{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P})) \longrightarrow C^n(\mathbf{G}, \underline{\text{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P}))$$

comme suit. Soit $f \in C^{n+1}(\mathbf{G}, \underline{\text{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P}))$; pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et $g_1, \dots, g_n \in \mathbf{G}(S)$, $\sigma(f)(g_1, \dots, g_n)$ est l'élément de $\text{Hom}_S(\mathbf{G}_S, \mathbf{P}_S)$ défini par : pour tout $S' \rightarrow S$ et $x \in \mathbf{G}(S')$,

$$\sigma(f)(g_1, \dots, g_n)(x) = f(x, g_1, \dots, g_n)(e) \in \mathbf{P}(S')$$

(où e désigne l'élément unité de $\mathbf{G}(S')$). Alors, σ est un opérateur d'homotopie en degrés > 0 . En effet, pour tout $g_1, \dots, g_{n+1} \in \mathbf{G}(S)$ et $x \in \mathbf{G}(S')$ on a, d'une part :

$$\begin{aligned} \partial\sigma(f)(g_1, \dots, g_{n+1})(x) &= f(xg_1, g_2, \dots, g_{n+1})(e) \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i f(x, g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1})(e) + (-1)^{n+1} f(x, g_1, \dots, g_n)(e), \end{aligned}$$

⁽⁴⁷⁾N.D.E. : cf. [Gr57], 2.2.1 et 2.3. Par ailleurs, on a détaillé l'original dans ce qui suit.

⁽⁴⁸⁾N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \sigma(\partial f)(g_1, \dots, g_{n+1})(x) &= (xf(g_1, g_2, \dots, g_{n+1}))(e) - f(xg_1, g_2, \dots, g_{n+1})(e) \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f(x, g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) + (-1)^{n+2} f(x, g_1, \dots, g_n)(e), \end{aligned}$$

d'où

$$(\partial\sigma(f) + \sigma(\partial f))(g_1, \dots, g_{n+1})(x) = f(g_1, \dots, g_{n+1})(x),$$

i.e. $\partial\sigma + \sigma\partial$ est l'application identique de $C^{n+1}(\mathbf{G}, \underline{\mathbf{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P}))$, pour tout $n \geq 0$.

Remarque 5.2.3. — ⁽⁴⁹⁾ L'hypothèse « \mathcal{C} petite » n'est utilisée que pour assurer l'existence des foncteurs dérivés $R^n H^0$ et $R^n \underline{H}^0$. Dans tous les cas, ce qui précède montre que les foncteurs $H^n(\mathbf{G}, \)$ (resp. $\underline{H}^n(\mathbf{G}, \)$) forment un foncteur cohomologique, effaçable en degrés > 0 , donc ce sont les foncteurs *satellites* (droits) du foncteur exact à gauche $H^0(\mathbf{G}, \)$ (resp. $\underline{H}^0(\mathbf{G}, \)$), au sens de [Gr57, 2.2]; si $(\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-Mod.})$ possède assez d'objets injectifs (ce qui est le cas si \mathcal{C} est petite), ils coïncident avec les foncteurs dérivés (*loc. cit.* 2.3).

5.3. Cohomologie des $\mathbf{G}\text{-}\mathcal{O}_S$ -modules. — Soient S un préschéma, \mathbf{G} un S -groupe et \mathcal{F} un $\mathbf{G}\text{-}\mathcal{O}_S$ -module quasi-cohérent. On définit les groupes de cohomologie de \mathbf{G} à valeurs dans \mathcal{F} par

$$H^n(\mathbf{G}, \mathcal{F}) = H^n(\mathbf{h}_G, \mathbf{W}(\mathcal{F})).$$

(pour les notations, cf. 4.6).

40

Supposons \mathbf{G} affine sur S . Alors, vu la proposition 4.6.4, cette cohomologie se calcule de la façon suivante : $H^n(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ est le n -ième groupe d'homologie du complexe $C^*(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ dont le n -ième terme est :

$$C^n(\mathbf{G}, \mathcal{F}) = \Gamma(S, \mathcal{F} \otimes \underbrace{\mathcal{A}(\mathbf{G}) \otimes \dots \otimes \mathcal{A}(\mathbf{G})}_{n \text{ fois}}).$$

Si f (resp. a_i) est une section de \mathcal{F} (resp. de $\mathcal{A}(\mathbf{G})$) sur un ouvert de S , on a

$$\begin{aligned} \partial(f \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) &= \mu_{\mathcal{F}}(f) \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i f \otimes a_1 \otimes \dots \otimes \Delta a_i \otimes \dots \otimes a_n \\ &+ (-1)^{n+1} f \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \otimes 1, \end{aligned}$$

où $\Delta : \mathcal{A}(\mathbf{G}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{G}) \otimes \mathcal{A}(\mathbf{G})$ et $\mu_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{A}(\mathbf{G})$ décrivent la structure de cogèbre de $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ et de comodule de \mathcal{F} . Remarquons en passant que la cohomologie de \mathbf{G} à valeurs dans \mathcal{F} ne dépend donc que de la structure de comodule de \mathcal{F} , et en particulier que de la structure de S -monoïde de \mathbf{G} .

On a en particulier

$$H^0(\mathbf{G}, \mathcal{F}) = \Gamma(S, \mathcal{F}^{\mathbf{G}}),$$

⁽⁴⁹⁾N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

où \mathcal{F}^G , le faisceau des invariants de \mathcal{F} , est défini comme le faisceau dont les sections sur l'ouvert U de S sont les sections de \mathcal{F} sur U dont l'image inverse dans tout S' au-dessus de U est invariante par $G(S')$ (cf. 4.7.1.2).

Théorème 5.3.1. — Soient S un schéma affine, G un S -groupe affine et plat sur S . 41
Les foncteurs $H^n(G, \)$ sont les foncteurs dérivés de $H^0(G, \)$ sur la catégorie des G - \mathcal{O}_S -modules quasi-cohérents.

Démonstration. ⁽⁵⁰⁾ Comme G est affine et plat sur S alors, d'après 4.7.2.1, la catégorie $(G\text{-}\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.})$ est équivalente à la catégorie $(\mathcal{A}(G)\text{-Comod.q.c.})$ des $\mathcal{A}(G)$ -comodules quasi-cohérents sur \mathcal{O}_S , et est donc abélienne. D'autre part, $\mathcal{A}(G)$ étant un \mathcal{O}_S -module plat, chaque foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G)^{\otimes n}$ est exact; comme de plus S est affine, on obtient que $C^*(G, \)$ est un foncteur exact sur $(G\text{-}\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.})$.

Notons Δ (resp. η) la comultiplication (resp. l'augmentation) de $\mathcal{A}(G)$. Pour tout \mathcal{O}_S -module quasi-cohérent \mathcal{P} , on note $\text{Ind}(\mathcal{P}) = \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G)$ muni de la structure de $\mathcal{A}(G)$ -comodule définie par

$$\text{id}_{\mathcal{P}} \otimes \Delta : \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G) \longrightarrow \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G);$$

ceci définit un foncteur $\text{Ind} : (\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.}) \rightarrow (G\text{-}\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.})$.

Il résulte de 4.6.4.1, 5.2.0 et 5.2.0.1 que l'on a un isomorphisme de $G\text{-}\mathbf{O}_S$ -modules :

$$(*) \quad \mathbf{W}(\text{Ind}(\mathcal{P})) \simeq \mathbf{E}(\mathbf{W}(\mathcal{P})) = \underline{\text{Hom}}(G, \mathbf{W}(\mathcal{P})).$$

Via cette identification, le morphisme $\varepsilon : \mathbf{E}(\mathbf{W}(\mathcal{P})) \rightarrow \mathbf{W}(\mathcal{P})$ correspond au morphisme de \mathcal{O}_S -modules $\text{id}_{\mathcal{P}} \otimes \eta : \text{Ind}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{P}$.

On a déjà utilisé que foncteur $\mathbf{W} : (\mathcal{O}_S\text{-Mod.}) \rightarrow (\mathbf{O}_S\text{-Mod.})$ est pleinement fidèle; il en est de même, d'après la définition 4.7.1, de sa restriction à $(G\text{-}\mathcal{O}_S\text{-Mod.})$, i.e. si $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ sont des $G\text{-}\mathcal{O}_S$ -modules, on a un isomorphisme fonctoriel

$$\text{Hom}_{G\text{-}\mathcal{O}_S\text{-Mod.}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}') \simeq \text{Hom}_{G\text{-}\mathbf{O}_S\text{-Mod.}}(\mathbf{W}(\mathcal{M}), \mathbf{W}(\mathcal{M}')).$$

Par conséquent, on déduit du lemme 5.2.0.2 le

Corollaire 5.3.1.1. — (i) Le foncteur Ind est adjoint à droite du foncteur d'oubli $(G\text{-}\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.}) \rightarrow (\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.})$. Plus précisément, l'application $\text{id}_{\mathcal{P}} \otimes \eta : \text{Ind}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{P}$ induit pour tout objet \mathcal{M} de $(G\text{-}\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.})$ une bijection

$$\text{Hom}_{G\text{-}\mathcal{O}_S\text{-Mod.}}(\mathcal{M}, \text{Ind}(\mathcal{P})) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{M}, \mathcal{P}).$$

(ii) Par conséquent, si \mathcal{I} est un objet injectif de $(\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.})$ alors $\text{Ind}(\mathcal{I})$ est un objet injectif de $(G\text{-}\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.})$.

Soient \mathcal{F} un $G\text{-}\mathcal{O}_S$ -module et $\mu_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \text{Ind}(\mathcal{F})$ l'application définissant la structure de $\mathcal{A}(G)$ -comodule. Il résulte de 5.2.0.3 (ou bien des axiomes (CM 1) et (CM 2) de 4.7.2) que $\mu_{\mathcal{F}}$ est un morphisme de $G\text{-}\mathcal{O}_S$ -modules, et que $(\text{id}_{\mathcal{F}} \otimes \eta) \circ \mu_{\mathcal{F}} = \text{id}_{\mathcal{F}}$,

⁽⁵⁰⁾N.D.E. : On a modifié l'original, pour faire voir que la catégorie $(G\text{-}\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.})$ est abélienne et a assez d'objets injectifs. On pourra comparer avec [Ja86], Part I (où l'on prendra garde que « k -group scheme » signifie « affine k -group scheme », cf. 2.1), 3.3–4, 3.9, 4.2 et 4.14–16.

donc que \mathcal{F} est un facteur direct de $\text{Ind}(\mathcal{F})$ comme \mathcal{O}_S -module ; en particulier, $\mu_{\mathcal{F}}$ est un monomorphisme. Comme on a, d'après (*) et 5.2.2,

$$H^n(G, \mathbf{W}(\text{Ind}(\mathcal{F}))) \simeq H^n(G, \underline{\text{Hom}}_S(G, \mathbf{W}(\mathcal{F}))) = 0 \quad \text{pour } n > 0.$$

on obtient donc que $H^n(G, \quad)$ est effaçable pour $n > 0$.

Enfin, S étant affine, $(\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.})$ possède assez d'objets injectifs. Soit donc $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$ un monomorphisme de \mathcal{O}_S -modules, où \mathcal{I} est un objet injectif de $(\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.})$; alors, $\mathcal{A}(G)$ étant plat sur \mathcal{O}_S , $\text{Ind}(\mathcal{F})$ est un sous- G - \mathcal{O}_S -module de $\text{Ind}(\mathcal{I})$, d'où :

Corollaire 5.3.1.2. — *La catégorie abélienne $(G\text{-}\mathcal{O}_S\text{-Mod.q.c.})$ possède assez d'objets injectifs.*

Compte-tenu de [Gr57, 2.2.1 et 2.3] (déjà utilisé dans la preuve de 5.2.1), ceci achève la démonstration du théorème 5.3.1.

Remarque 5.3.1.3. — On peut aussi démontrer 5.3.1.1 par le calcul suivant. À tout morphisme de $G\text{-}\mathcal{O}_S$ -modules $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G)$ on associe le \mathcal{O}_S -morphisme $(\text{id}_{\mathcal{P}} \otimes \eta) \circ \phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}$. Réciproquement, à tout \mathcal{O}_S -morphisme $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}$ on associe le morphisme de $G\text{-}\mathcal{O}_S$ -modules $(f \otimes \text{id}_{\mathcal{A}(G)}) \circ \mu_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G)$. On voit aussitôt que

$$(\text{id}_{\mathcal{P}} \otimes \eta) \circ (f \otimes \text{id}_{\mathcal{A}(G)}) \circ \mu_{\mathcal{M}} = (f \otimes \text{id}_{\mathcal{O}_S}) \circ (\text{id}_{\mathcal{P}} \otimes \eta) \circ \mu_{\mathcal{M}} = f.$$

D'autre part, pour tout ϕ le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G) \\ \mu_{\mathcal{M}} \downarrow & & \downarrow \text{id}_{\mathcal{P}} \otimes \Delta \\ \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G) & \xrightarrow{\phi \otimes \text{id}_{\mathcal{A}(G)}} & \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(G). \end{array}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \left(((\text{id}_{\mathcal{P}} \otimes \eta) \circ \phi) \otimes \text{id}_{\mathcal{A}(G)} \right) \circ \mu_{\mathcal{M}} &= (\text{id}_{\mathcal{P}} \otimes \eta \otimes \text{id}_{\mathcal{A}(G)}) \circ (\phi \otimes \text{id}_{\mathcal{A}(G)}) \circ \mu_{\mathcal{M}} \\ &= (\text{id}_{\mathcal{P}} \otimes \eta \otimes \text{id}_{\mathcal{A}(G)}) \circ (\text{id}_{\mathcal{P}} \otimes \Delta) \circ \phi = \phi. \end{aligned}$$

Ceci prouve 5.3.1.1 (i) (et (ii) en découle).

Soit \mathcal{F} un $G\text{-}\mathcal{O}_S$ -module ; on a vu plus haut que l'axiome (CM 2) de 4.7.2 montre que considéré comme \mathcal{O}_S -module, \mathcal{F} est un facteur direct de $E(\mathcal{F})$. Cela entraîne :

Proposition 5.3.2. — *Soient S un schéma affine et G un S -groupe affine et plat ; supposons que toute suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow 0$ de $G\text{-}\mathcal{O}_S$ -modules quasi-cohérents, qui se scinde comme suite de \mathcal{O}_S -modules, se scinde également comme suite de $G\text{-}\mathcal{O}_S$ -modules.*

Alors, les foncteurs $H^n(G, \quad)$ sont nuls pour $n > 0$ (ou ce qui revient au même, le foncteur $H^0(G, \quad)$ est exact).

En effet, d'après l'hypothèse, la suite de $G\text{-}\mathcal{O}_S$ -modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow E(\mathcal{F}) \longrightarrow E(\mathcal{F})/\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

est scindée; \mathcal{F} est donc facteur direct, comme $G\text{-}\mathcal{O}_S$ -module, dans $E(\mathcal{F})$, or la cohomologie de ce dernier est nulle.

On tire immédiatement de là et de la proposition 4.7.4 :

42

Théorème 5.3.3. — Soient S un schéma affine et G un S -groupe diagonalisable. Pour tout $G\text{-}\mathcal{O}_S$ -module quasi-cohérent \mathcal{F} , on a $H^n(G, \mathcal{F}) = 0$, pour $n > 0$.

Remarque. — La proposition 5.3.2 reste valable, lorsque G n'est pas nécessairement plat sur S ; la démonstration fait alors appel à la cohomologie relative. ⁽⁵¹⁾

Bibliographie

(52)

- [DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes Algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.
- [Gr57] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. **9** (1957), 119-221.
- [Ja86] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups*, Academic Press, 1986; 2ème éd., Amer. Math. Soc., 2003.
- [GIT] D. Mumford, *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, 1965; 2ème éd., avec J. Fogarty, 1982; 3ème éd., avec J. Fogarty & F. Kirwan, 1994.
- [Ni02] N. Nitsure, *Representability of GL_E* , Proc. Indian Acad. Sci. **112** (2002), No. 4, 539-542.
- [Ni04] N. Nitsure, *Representability of Hom implies flatness*, Proc. Indian Acad. Sci. **114** (2004), No. 1, 7-14.
- [Se68] J.-P. Serre, *Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés*, Publ. math. I.H.É.S. **34** (1968), 37-52.

⁽⁵¹⁾N.D.E. : Les éditeurs n'ont pas cherché à développer cette remarque.

⁽⁵²⁾N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé

