EXPOSÉ $\mathrm{VI_A}$

GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES ALGÉBRIQUES

par P. Gabriel

Dans tout ce chapitre, A désignera un anneau local artinien de corps résiduel k. **287**
Un préschéma en groupes G sur Spec A sera appelé simplement un A-*groupe.* Cet A-groupe est dit *localement de type fini* si le préschéma sous-jacent est localement de type fini sur A ; il est dit *algébrique* si le préschéma sous-jacent est de type fini sur A.

0. Remarques préliminaires

0.1. Considérons d'abord un préschéma en groupes G sur un préschéma quelconque S. Nous appelons *multiplication* le morphisme structural $\mu : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ et *inversion* le morphisme $c : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ qui est défini par les égalités $c(\mathrm{T})(x) = x^{-1}$ (T étant un préschéma sur S et x un élément de G(T)). Si U et V sont des parties de l'ensemble sous-jacent à G, nous notons $\mathrm{U}\cdot\mathrm{V}$ l'image par le morphisme multiplication de la partie de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ formée des points dont la première projection appartient à U, la deuxième à V. De même, les notations U^{-1} et $c(\mathrm{U})$ sont équivalentes.

Soient pr_1 la projection de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ sur le premier facteur et $\sigma : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ le morphisme de composantes pr_1 et μ. Pour tout S-préschéma T, $\sigma(\mathrm{T})$ est l'appli- **288**
cation $(x, y) \mapsto (x, xy)$; il s'ensuit que σ est un automorphisme. Le composé de cet automorphisme et de la projection pr_2 de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ sur le deuxième facteur est le morphisme multiplication. Lorsque G est *plat* sur S, pr_2 donc μ sont des morphismes *plats* ; lorsque G est *lisse* sur S, pr_2 donc μ sont des morphismes *lisses*, etc.

0.2. Nous supposons à partir de maintenant que S est le spectre d'un anneau local artinien A de corps résiduel k. Nous désignons par $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\mathrm{réd}}$ la catégorie des préschémas réduits sur k. Pour tout préschéma X sur A, le préschéma réduit $\mathrm{X}_{\mathrm{réd}}$ est un objet de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\mathrm{réd}}$ et le foncteur $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_{\mathrm{réd}}$ est adjoint à droite à l'inclusion de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\mathrm{réd}}$ dans $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{A}})$. Il s'ensuit que, pour tout A-groupe G, $\mathrm{G}_{\mathrm{réd}}$ est

(0) version 1.0 du 7/12/08 : ajouts dans 0.2, 0.6, 3.2, 3.3 à compléter, 5.1 déplacé, 5.3 à détailler

un groupe dans la catégorie $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$, [(1)] c.-à-d., pour tout k-préschéma T *réduit*, $\mathrm{G}_{\text{réd}}(\mathrm{T})$ est muni d'une structure de groupe, fonctorielle en T. On prendra garde que $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ n'est pas nécessairement un k-groupe, car la « multiplication » est seulement un morphisme de $(\mathrm{G}_{\text{réd}} \times_k \mathrm{G}_{\text{réd}})_{\text{réd}}$ vers $\mathrm{G}_{\text{réd}}$. Illustrons ceci par les exemples suivants. Soit k_0 un corps de caractéristique $p > 0$, et soient a une indéterminée, $t = a^p$, et $k = k_0(t) \subset k_0(a) = \mathrm{K}$.

Exemple 0.2.1. — Considérons le groupe additif $\mathbb{G}_{a,\,k} = \operatorname{Spec} k[\mathrm{X}]$ et soit G le sous-préschéma en groupes, fini sur k, défini par le polynôme additif $\mathrm{X}^{p^2} - t\mathrm{X}^p = \mathrm{X}^p(\mathrm{X}^{p^2-p} - t)$. Alors $\mathrm{G}_{\text{réd}} = \operatorname{Spec} k[\mathrm{X}]/\mathrm{X}(\mathrm{X}^{p^2-p} - t)$ est étale à l'origine. Si c'était un k-schéma en groupes, il serait lisse (cf. la proposition . 1.3.1 plus bas), or $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ n'est pas géométriquement réduit, donc ce n'est pas un k-préschéma en groupes.

Plus intéressant est l'exemple suivant, où G est connexe.

Exemple 0.2.2. — Soit I l'idéal de $\mathrm{A} = k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{U}, \mathrm{V}]$ engendré par

$$\mathrm{X}^p - t\mathrm{Y}^p \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}^p - t\mathrm{V}^p$$

et soit $\mathrm{G} = \operatorname{Spec} \mathrm{A}/\mathrm{I}$. Alors, G est un sous-$k$-préschéma en groupes de $\mathbb{G}^4_{a,\,k}$, de dimension 2, et G est irréductible, car

$$(\mathrm{G} \otimes_k \mathrm{K})_{\text{réd}} \cong \operatorname{Spec} \mathrm{K}[\mathrm{Y}, \mathrm{V}]$$

l'est. Soit J l'idéal de A engendré par I et $\mathrm{Q} = \mathrm{XV} - \mathrm{YU}$, et soit $\mathrm{B} = \mathrm{A}/\mathrm{J}$. On a $\mathrm{J} \subseteq \sqrt{\mathrm{I}}$ car $\mathrm{Q}^p \in \mathrm{I}$. D'autre part, sur les ouverts $\{\mathrm{Y} \neq 0\}$ et $\{\mathrm{V} \neq 0\}$, Spec B est régulier car le localisé $\mathrm{B}[\mathrm{Y}^{-1}]$ (resp. $\mathrm{B}[\mathrm{V}^{-1}]$) est isomorphe à $\mathrm{K}[\mathrm{Y}^{\pm 1}, \mathrm{V}]$ (resp. $\mathrm{K}[\mathrm{Y}, \mathrm{V}^{\pm 1}]$) ; le fermé complémentaire est le point $\mathfrak{m} = \{\mathrm{Y} = \mathrm{V} = 0 = \mathrm{X} = \mathrm{U}\}$, de codimension 2. Donc B est régulier en codimension 1, donc a fortiori vérifie les conditions (R0) et (S1), donc B est réduit. Par conséquent, $\mathrm{J} = \sqrt{\mathrm{I}}$ et

$$\mathrm{G}_{\text{réd}} \cong \operatorname{Spec} \mathrm{B}.$$

Alors, l'espace tangent à l'origine est de dimension 4, mais en tout point fermé de $\mathrm{G}_{\text{réd}} \otimes_k \overline{k}$ autre que l'origine, l'espace tangent est de dimension 3, défini par $d\mathrm{Q} = 0$. Par conséquent, $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ n'est pas un k-groupe.

[(2)] Toutefois, *si k est un corps parfait*, l'inclusion de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$ dans $(\mathbf{Sch}_{/k})$ commute aux produits de sorte que les groupes dans la catégorie $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$ s'identifient aux préschémas en groupes sur k dont le préschéma sous-jacent est réduit. Dans ce cas, si G est un k-groupe, $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ est un sous-préschéma en groupes de G ; ce sous-groupe n'est *pas invariant* dans G en général.

Par exemple, si k est un corps de caractéristique 3, le groupe constant $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_k$ opère de façon non triviale dans le groupe diagonalisable $\mathrm{D}_k(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ (I.4.1 et I.4.4) ; si G désigne le produit semi-direct de $\mathrm{D}_k(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ par $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_k$ défini par cette opération, $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ s'identifie à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_k$ et n'est pas invariant dans G.

---

(1) N.D.E. : On a ajouté les phrases qui suivent, ainsi que les exemples 0.2.1 et 0.2.2, signalés par M. Raynaud.

(2) N.D.E. : On a légèrement modifié la suite de 0.2, ainsi que 0.3.

Soient k un corps quelconque, $k^{p^{-\infty}}$ sa clôture parfaite, et H un groupe dans la catégorie $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$. Alors $(\mathrm{H} \otimes_k k^{p^{-\infty}})_{\text{réd}}$ est un préschéma en groupes sur le corps 289
parfait $k^{p^{-\infty}}$. Comme $\mathrm{H} \otimes_k k^{p^{-\infty}}$ et $(\mathrm{H} \otimes_k k^{p^{-\infty}})_{\text{réd}}$ ont même espace topologique sous-jacent, on voit que les groupes de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$ ont en commun avec les k-groupes certaines propriétés topologiques invariantes par extension du corps de base : par exemple, il résultera de 0.3 et des remarques qu'on vient de faire que tout groupe de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$ est séparé.

Nous rencontrerons dans la suite des groupes de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$ chaque fois que nous aurons affaire à une partie localement fermée non vide U d'un A-groupe G telle que $\mathrm{U} \cdot \mathrm{U} = \mathrm{U}$ et $\mathrm{U}^{-1} = \mathrm{U}$: en effet, le sous-préschéma réduit de G défini par U est un groupe de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$.

0.3. *Un A-groupe G est toujours séparé, car la section unité* $e : \operatorname{Spec} \mathrm{A} \to \mathrm{G}$ *est une immersion fermée.* En effet, soient x l'unique point de Spec A et η le morphisme structural $\mathrm{G} \to \operatorname{Spec} \mathrm{A}$. Comme $\eta \circ e = \mathrm{id}_{\operatorname{Spec} \mathrm{A}}$ alors, pour *tout* ouvert affine $\mathrm{U} = \operatorname{Spec} \mathrm{B}$ de G contenant $e(x)$, le morphisme $\mathrm{B} \to \mathrm{A}$ possède une section, donc est surjectif. Il en résulte que e est une immersion fermée. [3] Or, la diagonale de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}$ s'identifie au foncteur de $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{A}})^{\circ}$ à valeurs dans $(\mathbf{Ens})$ qui associe à tout préschéma S sur A l'image réciproque de l'élément neutre de G(S) par l'application $\varphi(\mathrm{S}) : (x, y) \mapsto x \cdot y^{-1}$ de $\mathrm{G}(\mathrm{S}) \times \mathrm{G}(\mathrm{S})$ dans G(S). On a par conséquent un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{G} \\ \mathrm{G} \arrow[u, "\text{morphisme diagonal}"] \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathrm{A} \arrow[u, "\text{section unité}"'] \end{tikzcd}$$

de sorte que le morphisme diagonal, qui est déduit d'une immersion fermée par changement de base, est lui-même une immersion fermée.

0.4. Soit G un A-groupe. Nous dirons qu'un point g de G est *strictement rationnel* 290
sur A s'il existe un A-morphisme $s : \operatorname{Spec} \mathrm{A} \to \mathrm{G}$ qui envoie le seul point de Spec A sur g. On sait qu'un tel s définit un automorphisme r_s du préschéma G sur A qu'on appelle translation à droite par s : pour tout morphisme $\pi : \mathrm{S} \to \operatorname{Spec} \mathrm{A}$, $r_s(\mathrm{S})$ est l'automorphisme de G(S) défini par : $x \mapsto x \cdot (\mathrm{G}(\pi)(s))$, pour tout $x \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$. De même, on note ℓ_s la translation à gauche par s, c'est-à-dire l'automorphisme de G défini par les égalités $(\ell_s(\mathrm{S}))(x) = (\mathrm{G}(\pi)(s)) \cdot x$, pour $x \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$.

Comme $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} k$ et G ont même espace topologique sous-jacent $\underline{\mathrm{G}}$, que $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} k$ est un k-groupe et que $s \otimes_{\mathrm{A}} k$ dépend seulement de g et non de s, on voit que les automorphismes de $\underline{\mathrm{G}}$ induits par r_s et ℓ_s (ou par $r_{s \otimes k}$ et $\ell_{s \otimes k}$) dépendent seulement de g et non de s ; lorsque P est une partie de $\underline{\mathrm{G}}$, nous pouvons donc noter $\mathrm{P} \cdot g$ et $g \cdot \mathrm{P}$ au lieu de $r_s(\mathrm{P})$ et $\ell_s(\mathrm{P})$, ce qui est conforme à 0.1.

[3] N.D.E. : Cet argument montre que si S est un préschéma discret, tout S-groupe est séparé, cf. $\mathrm{VI_B}$, 5.2 ; d'autre part (cf. $\mathrm{VI_B}$, 5.6.4), si S contient un point fermé s non isolé, le S-préschéma G obtenu en recollant deux exemplaires de S le long de l'ouvert $\mathrm{S} \setminus \{s\}$ n'est pas séparé sur S, mais est muni d'une structure de S-groupe.

0.5. Considérons maintenant *deux ouverts partout denses* U *et* V *d'un* A-*groupe localement de type fini* G. *Le produit* $\mathrm{U}\cdot\mathrm{V}$ (cf. 0.1) *est alors égal à tout l'espace sous-jacent à* G.

En effet, comme G et $\mathrm{G}\otimes_{\mathrm{A}} k$ ont même espace sous-jacent, on peut supposer, quitte à remplacer A par k et G par $\mathrm{G}\otimes_{\mathrm{A}} k$ que A est un corps k. Dans ce cas le morphisme multiplication est plat et localement de type fini (cf. 0.1), donc ouvert, de sorte que $\mathrm{U}\cdot\mathrm{V}$ est un ouvert de G. Si $\overline{k}$ est une clôture algébrique de k, on a évidemment $(\mathrm{U}\cdot\mathrm{V})\otimes_k \overline{k} = (\mathrm{U}\otimes_k \overline{k})\cdot(\mathrm{V}\otimes_k \overline{k})$. D'après SGA 1, VIII.4.6, il suffit donc de prouver qu'on a $\mathrm{G}\otimes_k \overline{k} = (\mathrm{U}\otimes_k \overline{k})\cdot(\mathrm{V}\otimes_k \overline{k})$ et on est ramené au cas où k est
291 algébriquement clos. Dans ce dernier cas, il suffit de prouver que $\mathrm{U}\cdot\mathrm{V}$ contient tout point fermé x de G; si k est algébriquement clos, un tel x est strictement rationnel et les ouverts partout denses $\mathrm{U}^{-1}x$ et V ont en commun un point fermé v; si u est l'élément de $\mathrm{G}(k)$ défini par l'égalité $x = uv$, alors $u^{-1}x$ appartient à $\mathrm{U}^{-1}x$ de sorte que u appartient à U, ce qui prouve l'assertion.

0.6. [4] Une variante de l'argument précédent donne le résultat ci-dessous, utilisé implicitement dans VIII, 6.7, voir aussi VI_{B}, 6.2.5.

Lemme 0.6.1. — *Soient* A *un anneau local artinien,* G *un* A-*préschéma en groupes, et* H *un sous-*A-*préschéma en groupes de* G. *Alors,* H *est* fermé.

Démonstration. Soit k le corps résiduel de A. Comme les espaces topologiques sous-jacents à G et H sont inchangés par le changement de base $\mathrm{A}\to k$, on peut supposer $\mathrm{A} = k$. Notons i l'immersion $\mathrm{H}\to\mathrm{G}$. Soit k' la clôture parfaite de k, et soit $i' : \mathrm{H}'\to\mathrm{G}'$ l'immersion obtenue par le changement de base $k\to k'$. Par descente (fpqc), il suffit de montrer que i' est fermée (cf. EGA IV_2, 2.6.2, ou SGA 1, VIII.4.6). Donc, on peut supposer k parfait. Alors, $\mathrm{H}_{\mathrm{réd}}$ est un sous-préschéma en groupes (cf. 0.2), et comme H et $\mathrm{H}_{\mathrm{réd}}$ ont même espace topologique sous-jacent, il suffit de montrer que $\mathrm{H}_{\mathrm{réd}}$ est fermé. On peut donc supposer H réduit. Soit Y le sous-préschéma réduit ayant $\overline{\mathrm{H}}$ comme espace sous-jacent; alors H est un sous-préschéma ouvert de Y (cf. EGA I, 5.2.3). Montrons d'abord que le morphisme $\mu : \mathrm{Y}\times_k\mathrm{H}\to\mathrm{G}$ se factorise à travers Y.

Soient $\gamma\in\mathrm{Y}\times_k\mathrm{H}$ et $\mathrm{L} = \kappa(\gamma)$. Soit γ_{L} le point rationnel de $\mathrm{Y}_{\mathrm{L}}\times_{\mathrm{L}}\mathrm{H}_{\mathrm{L}}$ défini dans le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Y}\times_k\mathrm{H}\times_k\operatorname{Spec}\mathrm{L} \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Y}_{\mathrm{L}}\times_{\mathrm{L}}\mathrm{H}_{\mathrm{L}} \arrow[r, "\mu_{\mathrm{L}}"] \arrow[d, "p"] & \mathrm{G}_{\mathrm{L}} \arrow[d, "q"] \\
\operatorname{Spec}\mathrm{L} \arrow[u, "\gamma\boxtimes\mathrm{id}"] \arrow[ur, "\gamma_{\mathrm{L}}"] \arrow[r, "\gamma"] & \mathrm{Y}\times_k\mathrm{H} \arrow[r, "\mu"] & \mathrm{G}
\end{tikzcd} ;$$

puisque $\mu(\gamma) = \mu(p(\gamma_{\mathrm{L}})) = q(\mu_{\mathrm{L}}(\gamma_{\mathrm{L}}))$, il suffit de montrer que $\mu_{\mathrm{L}}\in\mathrm{Y}_{\mathrm{L}}$. Comme γ_{L} est un point rationnel, il correspond à une paire de points rationnels $y\in\mathrm{Y}_{\mathrm{L}}$ et $h\in\mathrm{H}_{\mathrm{L}}$, et l'on a $\mu_{\mathrm{L}}(\gamma_{\mathrm{L}}) = r_h(y)$, où r_h est l'automorphisme de G_{L} de translation à droite par h. L'image inverse par r_h du fermé Y_{L} contient H_{L}, donc aussi son adhérence $\overline{\mathrm{H}_{\mathrm{L}}}$. Or,

[4]N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe.

comme la projection $G_L \to G$ est ouverte (cf. EGA IV_2, 2.4.9), H_L est dense dans Y_L, d'où $\overline{H_L} = Y_L$. Par conséquent, $\mu_L(\gamma_L) \in Y_L$, et ceci montre que $\mu(Y \times_k H) \subseteq Y$.

Soit maintenant $y \in Y$; montrons que $y \in H$. Soit $K = \kappa(y)$, soit y_K le point rationnel de Y_K correspondant au morphisme $\operatorname{Spec} K \to Y \times_k K$ de composantes y et id_K, et soit $z = c_K(y_K)$, où $c_K : G_K \to G_K$ est l'automorphisme d'inversion. D'après ce qui précède, H_K est dense dans Y_K, et l'on a $\mu_K(Y_K \times_K H_K) \subseteq Y_K$. On en déduit d'abord que $c_K(Y_K) \subseteq Y_K$, d'où $z \in Y_K$, puis que l'image inverse du fermé Y_K par les translations à gauche ℓ_{y_K} et ℓ_z contient H_K donc son adhérence $\overline{H_K} = Y_K$. Il en résulte que $\ell_{y_K}(Y_K)$ égale Y_K et contient donc comme ouverts denses $\ell_{y_K}(H_K)$ et H_K.

Il existe donc $h, h' \in H_K$ tels que $h' = \ell_{y_K}(h)$. Soit M un corps contenant K et $\kappa(h)$. Alors, avec les notations déjà utilisées, on a dans $G_M(M)$ l'égalité $h'_M = y_M \cdot h_M$, et donc $y_M = r_{h_M}^{-1}(h'_M)$ appartient à H_M, d'où finalement $y \in H$. Ceci prouve le lemme 0.6.1. [5] C.Q.F.D.

1. Propriétés locales d'un A-groupe localement de type fini

292

Nous allons voir d'abord que, si G est *localement de type fini* et *plat* sur A, on peut « rendre strictement rationnel tout point fermé de G » au moyen d'une extension *finie et plate* de la base.

1.1. Sauf mention expresse du contraire, nous supposerons à partir de maintenant que G est un A-groupe *localement de type fini*. Lorsque A est un corps, nous obtiendrons dans l'exposé VII_B des résultats très précis sur les anneaux locaux de G [6]. Nous nous contentons ici de quelques résultats élémentaires :

Proposition 1.1.1. — *Soit x un point d'un* A-*groupe* G localement de type fini *et* plat *sur* A. *Alors l'anneau local $\mathscr{O}_{G,x}$ est de* Cohen-Macaulay *et il existe un système $a_1, \dots, a_n$ de paramètres de $\mathscr{O}_{G,x}$ tel que $\mathscr{O}_{G,x}/(a_1, \dots, a_n)$ soit un* A-*module* fini et plat (*donc* fini et libre).

Nous supposons d'abord A égal à son corps résiduel k ; il suffit de prouver alors que $\mathscr{O}_{G,x}$ est de Cohen-Macaulay et on peut se limiter au cas où x est un point fermé (EGA 0_{IV}, 16.5.13). D'après le lemme 1.1.2 ci-dessous, G contient un point fermé y tel que $\mathscr{O}_{G,y}$ soit de Cohen-Macaulay. D'après SGA 1, I § 9, il revient au même de dire que, pour toute extension finie K du corps de base k et tout point $\overline{y}$ de $\overline{G} = G \otimes_k K$ au-dessus de y, $\mathscr{O}_{\overline{G},\overline{y}}$ est de Cohen-Macaulay. Si l'extension K a été choisie assez grande, i.e. si K contient une extension normale de k contenant les corps résiduels $\kappa(y)$ et $\kappa(x)$, alors $\overline{y}$ est (strictement) rationnel sur K ainsi que tout point $\overline{x}$ de $\overline{G}$ au-dessus 293

[5] N.D.E. : On notera que la démonstration de 0.6.1, tout comme celle de 0.5, est une extension au cas des A-préschémas en groupes d'arguments bien connus pour les groupes algébriques sur un corps algébriquement clos, pour lesquels il suffit de considérer les points rationnels.

[6] N.D.E. : par exemple, qu'ils sont toujours *intersection complète*, et *lisses* si la caractéristique résiduelle est nulle (références à préciser...).

de x [7]. Comme l'automorphisme $r_{\overline{x}} \circ (r_{\overline{y}})^{-1}$ applique $\overline{y}$ sur $\overline{x}$, il s'ensuit que $\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{G}},\overline{x}}$, donc $\mathscr{O}_{\mathrm{G},x}$ (SGA 1, I § 9) sont de Cohen-Macaulay.

Lorsque A est de nouveau supposé quelconque, le raisonnement précédent s'applique à $k \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{G}$ de sorte que $k \otimes_{\mathrm{A}} \mathscr{O}_{\mathrm{G},x}$ est de Cohen-Macaulay. Si $a_1, \dots, a_n$ est une suite d'éléments de $\mathscr{O}_{\mathrm{G},x}$ dont l'image dans $k \otimes_{\mathrm{A}} \mathscr{O}_{\mathrm{G},x}$ est un système de paramètres, il résulte de SGA 1, IV.5.7 ou de EGA 0_{IV}, 15.1.16, que $a_1, \dots, a_n$ est une suite $\mathscr{O}_{\mathrm{G},x}$-régulière et que $\mathscr{O}_{\mathrm{G},x}/(a_1, \dots, a_n)$ est fini et plat (donc fini et libre) sur A.

Lemme 1.1.2. — *Tout préschéma non vide* X*, localement de type fini* *sur un anneau artinien* A*, contient un point fermé x dont l'anneau local est de* Cohen-Macaulay*.*

On peut évidemment supposer X affine d'algèbre B et raisonner par récurrence sur dim X (l'assertion est claire si X est discret, tous les anneaux locaux étant alors artiniens). Comme B est de type fini sur A, si dim B > 0, B contient un élément a non inversible et non diviseur de 0 [8]. Le sous-préschéma fermé $\mathrm{X}' = \operatorname{Spec} \mathrm{B}/(a)$ de X est alors de dimension strictement inférieure à dim X et contient par hypothèse de récurrence un point fermé x tel que $\mathscr{O}_{\mathrm{X}',x}$ soit de Cohen-Macaulay. Comme $\mathscr{O}_{\mathrm{X}',x} = \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}/(a)$ et a est non inversible et non diviseur de 0 dans $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$, alors $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est de Cohen-Macaulay (voir aussi EGA IV_2, 6.11.3).

Proposition 1.2. — *Soient* A *un anneau local artinien,* G *un* A*-groupe* localement de
294 type fini *et* plat *sur* A *et x un point* fermé *de* G*. Il existe alors une* A*-algèbre* A′ locale, finie et libre *sur* A *telle que tout point de* $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$ *au-dessus de x soit* strictement rationnel *sur* A′*.*

[9] En effet, soit k_1 une extension normale de degré fini de k contenant le corps résiduel $\kappa(x)$ de x. D'après le lemme V.4.1.1, il existe une A-algèbre A_1 locale, finie et libre sur A, de corps résiduel k_1. Dans ce cas, (cf. N.D.E. (7)) tous les points $g_1, \dots, g_n$ de $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}_1$ au-dessus de $x \in \mathrm{G}$ ont k_1 pour corps résiduel (i.e. $g_1, \dots, g_n$ sont rationnels sur A_1 au sens de l'Exp. V, § 4.e)).

Soient donc $\mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_n$ les anneaux locaux de $g_1, \dots, g_n$. D'après 1.1.1, $\mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_n$ possèdent des quotients $\mathrm{B}'_1, \dots, \mathrm{B}'_n$ qui sont artiniens et finis et libres sur A_1. Posons $\mathrm{A}' = \mathrm{B}'_1 \otimes_{\mathrm{A}_1} \dots \otimes_{\mathrm{A}_1} \mathrm{B}'_n$. Alors A′, ainsi que chaque $\mathrm{B}_i \otimes_{\mathrm{A}_1} \mathrm{A}'$, est locale, finie et libre sur A_1, et, pour $i = 1, \dots, n$, l'on a des homomorphismes surjectifs

$$\mathrm{B}_i \otimes_{\mathrm{A}_1} \mathrm{A}' \twoheadrightarrow \mathrm{B}'_i \otimes_{\mathrm{A}_1} \mathrm{A}' \twoheadrightarrow \mathrm{A}',$$

le second étant induit par l'application de multiplication $\mathrm{B}'_i \otimes_{\mathrm{A}_1} \mathrm{B}'_i \twoheadrightarrow \mathrm{B}'_i$. Par conséquent, A′ répond à la question.

---

[7] N.D.E. : En effet, l'hypothèse sur K entraîne que, pour toute extension L de K, tout k-morphisme $\kappa(x) \to \mathrm{L}$ (resp. $\kappa(y) \to \mathrm{L}$) se factorise à travers K ; par conséquent, tous les points de $\mathrm{G} \otimes_k \mathrm{K}$ au-dessus de x ou y ont K pour corps résiduel, i.e. sont (strictement) rationnels sur K.

[8] N.D.E. : En effet, B est un anneau noethérien de Jacobson (cf. Bourbaki, *Alg. comm.*, § V.3.4). Si tout élément non inversible est diviseur de zéro, alors tout idéal premier est un idéal premier associé de B, donc, en particulier, B n'a qu'un nombre *fini* d'idéaux maximaux $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$. Comme B est un anneau de Jacobson, l'intersection des $\mathfrak{m}_i$ est le nilradical de B, et il s'ensuit que chaque $\mathfrak{m}_i$ est un idéal premier *minimal* de B, de sorte que dim B = 0.

[9] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

1.3. Soit e l'*élément neutre* (ou *origine*) de G, c'est-à-dire l'image du seul point de Spec A par la section unité Spec A $\to$ G. Par définition même, e est strictement rationnel sur A.

Proposition 1.3.1. — *Soient* G *un groupe* localement de type fini *et* plat *sur un anneau artinien* A *et* K *la* clôture parfaite *du corps résiduel k de* A*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$G \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ est réduit.*

(i bis) *Si $\mathscr{O}_{\mathrm{G},e}$ est l'anneau local de l'origine de* G*, $\mathscr{O}_{\mathrm{G},e} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ est réduit.*

(ii) G *est lisse sur* A*.*

(ii bis) G *est lisse sur* A *à l'origine.*

Au moyen de SGA 1, II.2.1, on se ramène tout de suite au cas où A est un corps 295
(A $= k$). Les implications (i) $\Rightarrow$ (i bis), (ii) $\Rightarrow$ (ii bis), (ii) $\Rightarrow$ (i) et (ii bis) $\Rightarrow$ (i bis) sont évidentes, de sorte qu'il suffit de prouver que (i bis) entraîne (ii). Or, si $\overline{k}$ désigne la clôture algébrique de k, il résulte de (i bis) que $\mathscr{O}_{\mathrm{G},e} \otimes_k \overline{k}$ est réduit. De plus, si x est un point fermé quelconque de $\overline{\mathrm{G}} = \mathrm{G} \otimes_k \overline{k}$, il y a exactement un $\overline{k}$-morphisme $s : \operatorname{Spec} \overline{k} \to \mathrm{G} \otimes_k \overline{k}$ dont l'image est x ; la translation à droite r_s induit alors un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{G},e} \otimes_k \overline{k}$ sur $\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{G}},x}$ de sorte que $\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{G}},x}$, donc $\overline{\mathrm{G}}$ sont réduits. Donc, comme $\overline{\mathrm{G}}$ est localement de type fini sur $\overline{k}$, il contient au moins un point y fermé dans $\overline{\mathrm{G}}$ et lisse sur $\overline{k}$. Comme, d'autre part, les anneaux locaux des points fermés de G sont tous isomorphes à $\mathscr{O}_{\mathrm{G},e} \otimes_k \overline{k}$, on voit que tous ces anneaux locaux sont réguliers, de sorte que $\overline{\mathrm{G}}$ est lisse sur $\overline{k}$, donc G lisse sur k.

2. Composantes connexes d'un A-groupe localement de type fini 296

2.1. Considérons d'abord un A-groupe quelconque G et soit G$'$ la composante connexe de l'origine e de G. Cette composante connexe est évidemment fermée de sorte que nous pouvons l'identifier au sous-préschéma fermé *réduit* de G qui a G$'$ pour espace sous-jacent. [(10)]

Proposition 2.1.1. — *Pour toute extension* K *du corps résiduel k de* A*,* $\mathrm{G}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ *a pour espace sous-jacent la composante connexe de l'origine dans le* K*-groupe* $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ (*i.e.* G$'$ *est* géométriquement connexe).

Soit en effet $(\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K})'$ la composante connexe de l'origine dans $\mathrm{G} \otimes {}_{\mathrm{A}}\mathrm{K}$. Comme l'image de $(\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K})'$ dans G est connexe et contient l'élément neutre de G, cette image est contenue dans G$'$ de sorte que $(\mathrm{G}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{K})'$ est contenu dans l'image réciproque $\mathrm{G}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ de G$'$ dans $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$. La proposition résulte donc de la connexité de $\mathrm{G}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ qui est prouvée dans le lemme 2.1.2 :

Lemme 2.1.2. — *Soient* X *et* Y *deux préschémas connexes sur un corps k. Si* X *contient un point rationnel,* $\mathrm{X} \times_k \mathrm{Y}$ *est connexe.*

[(10)] N.D.E. : On verra plus loin (2.2) que G$'$ est un groupe dans la catégorie $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$.

Nous donnons ci-dessous une démonstration directe de ce résultat de EGA IV_2 (4.5.8 et 4.5.14).

Supposons d'abord Y non vide, connexe et affine d'algèbre B. Dans ce cas, $\mathrm{X}\times_k \mathrm{Y}$ est le spectre de la $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-algèbre quasi-cohérente $\mathscr{B} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}}\otimes_k \mathrm{B}$. Nous voulons montrer que toute partie U de $\mathrm{X}\times_k \mathrm{Y}$ qui est ouverte, fermée et non vide, coïncide avec
297 $\mathrm{X}\times_k \mathrm{Y}$. Or, U est affine sur X et a pour $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-algèbre affine un facteur direct de $\mathscr{B}$. Il résulte donc du lemme 2.1.3 ci-dessous que l'image de U dans X est ouverte et fermée, i.e. coïncide avec X tout entier. Cette image contient en particulier un point rationnel x de X, de sorte que U rencontre l'image réciproque de x dans $\mathrm{X}\times_k \mathrm{Y}$. Comme cette dernière est isomorphe à Y, donc est connexe, U contient cette image réciproque. Le même résultat serait valable pour le complémentaire de U dans $\mathrm{X}\times_k \mathrm{Y}$, si U était distincte de $\mathrm{X}\times_k \mathrm{Y}$, ce qui serait absurde.

Si Y est maintenant un k-préschéma quelconque, ce qui précède montre que les fibres de la projection canonique $\mathrm{X}\times_k \mathrm{Y}\to \mathrm{Y}$ sont connexes. Si x est un point rationnel de X, ces fibres rencontrent toutes le sous-préschéma $\{x\}\times_k \mathrm{Y}$ qui est lui-même connexe, d'où la proposition.

Lemme 2.1.3. — *Soient* X *un préschéma et* $\mathscr{A}$ *une* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-algèbre* quasi-cohérente *qui est un facteur direct d'un* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-module libre. L'image de* $\operatorname{Spec}\mathscr{A}$ *dans* X *est alors ouverte et fermée.*

Soit V cette image. Il est clair que V est contenue dans le support de $\mathscr{A}$. Réciproquement, si x appartient au support de $\mathscr{A}$, alors $\mathscr{A}_x$ est non nul et est un $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$-module libre, d'après Kaplansky [(11)]. Par conséquent la fibre de $\operatorname{Spec}\mathscr{A}$ en x, qui est affine d'algèbre $\mathscr{A}_x\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}}\kappa(x)$, n'est pas vide. On voit donc que l'image de $\operatorname{Spec}\mathscr{A}$ coïncide avec le support de $\mathscr{A}$.

Si s est la section unité de $\mathscr{A}$, l'égalité $s_x = 0$ entraîne que s, donc $\mathscr{A}$, sont nuls
298 dans un voisinage du point x. Donc le support de $\mathscr{A}$ est fermé. [(12)] D'autre part, *« le support d'un module projectif est ouvert ».* En effet, soient $\mathscr{P}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module quasi-cohérent localement projectif, $\mathscr{P}^* = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}}(\mathscr{P},\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ le $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module dual, et x un point de X tel que $\mathscr{P}_x\neq 0$. Quitte à remplacer X par un un voisinage ouvert affine de x suffisamment petit, on peut supposer que $\mathscr{P}$ est facteur direct d'un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module libre. Alors, le morphisme naturel

$$\mathscr{P}^*\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}}\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}\longrightarrow(\mathscr{P}_x)^* := \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}}(\mathscr{P}_x,\mathscr{O}_{\mathrm{X},x})$$

est un isomorphisme. Comme $\mathscr{P}_x$ est non nul et libre sur $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$, il existe $p\in\mathscr{P}_x$ et $\phi\in(\mathscr{P}_x)^*$ tels que $\phi(x)=1$. D'après ce qui précède, il existe un voisinage ouvert U de x tels que p et ϕ proviennent de sections $\widetilde{p}\in\mathscr{P}(\mathrm{U})$ et $\widetilde{\phi}\in\mathscr{P}^*(\mathrm{U})$, et l'égalité $\widetilde{\phi}(\widetilde{p})=1$ montre que $\widetilde{p}_y\neq 0$ pour tout $y\in\mathrm{U}$.

(11)N.D.E. : cf. I. Kaplansky, *Projective modules*, Ann. of Maths. **68** (1958), 372–377 ; voir aussi Bourbaki, *Alg. comm.*, § II.3, Ex. 3.
(12)N.D.E. : On a corrigé l'original dans ce qui suit.

2.2. Les notations étant toujours celles de 2.1, il est clair que G' est un k-préschéma réduit. Le lemme 2.1.2 montre que $\mathrm{G}' \times_k \mathrm{G}'$ est connexe, de sorte que $(\mathrm{G}' \times_k \mathrm{G}')_{\text{réd}}$ est le sous-préschéma réduit de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}$ qui a pour espace sous-jacent la composante connexe de l'origine. En particulier, le morphisme multiplication $\mu : \mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ induit un morphisme $\mu' : (\mathrm{G}' \times_k \mathrm{G}')_{\text{réd}} \to \mathrm{G}'$ qui fait de G' un groupe dans $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$.

2.2.bis. — [13] On rappelle (cf. Exp. V) que, si P est un préschéma, on note $\underline{\mathrm{P}}$ l'espace topologique sous-jacent à P. Alors, on définit un sous-A-foncteur G^0 de G en posant, pour tout A-préschéma S,

$$\mathrm{G}^0(\mathrm{S}) = \{u \in \mathrm{G}(\mathrm{S}) \mid u(\underline{\mathrm{S}}) \subseteq \underline{\mathrm{G}'}\}.$$

Soit $c : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ le morphisme d'inversion ; comme $c(\underline{\mathrm{G}'}) = \underline{\mathrm{G}'}$, on a $c \circ u \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$ pour tout $u \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$. D'autre part, si $u, v \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$, alors $u \boxtimes v$ envoie $\underline{\mathrm{S}}$ dans le sous-espace de $\underline{\mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}}$ formé des points dont les deux projections appartiennent à $\underline{\mathrm{G}'}$; ce sous-espace s'identifie à l'espace sous-jacent à $\mathrm{G}' \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}'$, qui est connexe d'après le lemme 2.1.2. Par conséquent, $\mu \circ (u \boxtimes v)$ envoie $\underline{\mathrm{S}}$ dans $\underline{\mathrm{G}'}$. Ceci montre que G^0 est un sous-A-foncteur *en groupes* de G.

Si la composante connexe de e est un *ouvert* de $\underline{\mathrm{G}}$, alors le sous-foncteur G^0 est *représentable* par le sous-préschéma induit par G sur cet ouvert, qui est donc un *sous-préschéma en groupes* de G ; on le notera également G^0. Dans ce cas, avec les notations de 2.1, on a $\mathrm{G}' = (\mathrm{G}^0)_{\text{réd}}$ et les espaces topologiques $\underline{\mathrm{G}'}$ et $\underline{\mathrm{G}^0}$ coïncident. [14]

2.3. Conformément à nos conventions de 1.1, nous supposons de nouveau à partir de maintenant que G est *localement de type fini* sur A. Alors G est localement noethérien, donc *localement connexe* [15], de sorte que la composante connexe $\underline{\mathrm{G}'}$ de l'élément neutre est ouverte dans G.

Nous noterons alors G^0 le sous-préschéma induit par G sur cet ouvert. D'après
2.2.bis, G^0 est un *sous-préschéma en groupes* de G que nous appellerons *la composante* **299**
neutre de G ; pour tout A-préschéma S on a donc :

$$\mathrm{G}^0(\mathrm{S}) = \{u \in \mathrm{G}(\mathrm{S}) \mid u(\underline{\mathrm{S}}) \subseteq \underline{\mathrm{G}^0} = \underline{\mathrm{G}'}\}.$$

Soient G^α une composante connexe quelconque de G et $\nu^\alpha : \mathrm{G}^\alpha \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0 \to \mathrm{G}$ le morphisme défini par les égalités

$$\nu^\alpha(\mathrm{S})(g, \gamma) = g\gamma g^{-1},$$

pour tout $\mathrm{S} \in (\mathbf{Sch}_{/\mathrm{A}})$, $g \in \mathrm{G}^\alpha(\mathrm{S})$, $\gamma \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$. Si e est l'origine de G, la restriction de ν^α à $\mathrm{G}^\alpha \times_{\mathrm{A}} \{e\}$ est le morphisme nul ; comme $\mathrm{G}^\alpha \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0$ est connexe d'après 2.1.2, on voit que ν^α se factorise à travers G^0 de sorte que G^0 est un A-*sous-groupe invariant*

[13] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe, afin de faire le lien avec VI_{B}, § 3.

[14] N.D.E. : Dans cet exposé, la notation G^0 est réservée au cas où la composante connexe de e est ouverte ; dans VI_{B}, § 3, cette composante connexe sera notée $\underline{\mathrm{G}^0}$ dans tous les cas. C'est une notation légèrement abusive, mais qui est compatible avec ce qui précède lorsque la composante connexe est l'espace topologique sous-jacent à un sous-préschéma en groupes *ouvert* G^0 de G.

[15] N.D.E. : En effet, dans un espace noethérien, les composantes connexes sont en nombre fini, donc chacune est *ouverte* ; voir aussi EGA I, 6.1.9.

de G (car ce qui précède entraîne que, pour tout A-préschéma S, $G^0(S)$ est un sous-groupe invariant de G(S)).

Proposition 2.4. — *La composante* neutre *d'un* A*-groupe* G *localement de type fini est* géométriquement irréductible *et* de type fini *sur* A.

Soit $\overline{k}$ la clôture algébrique du corps résiduel k de A. Montrons d'abord que G^0 est géométriquement irréductible, c'est-à-dire que $G^0 \otimes_A \overline{k}$ est irréductible. D'après 2.2, $(G \otimes_A \overline{k})_{\text{réd}}$ est un $\overline{k}$-groupe localement de type fini et réduit, donc lisse sur $\overline{k}$ (1.3.1). A fortiori les anneaux locaux de $(G \otimes_A \overline{k})_{\text{réd}}$ sont intègres, de sorte que les composantes connexes de $G \otimes_A \overline{k}$, en particulier $G^0 \otimes_A \overline{k}$, sont irréductibles.

Montrons maintenant que G^0 est de type fini sur A. Comme G^0 est localement de type fini sur A, il suffit de prouver que G^0 est quasi-compact. Pour cela, soit V un ouvert affine de G^0. Comme G^0 est irréductible, cet ouvert est dense dans G^0 de sorte que $V \cdot V$ coïncide avec G^0 (0.5) ; comme $V \cdot V$ est l'image de $V \times_A V$ par le morphisme multiplication, $V \cdot V$ est quasi-compact.

300 ***Corollaire 2.4.1***. — *Toute composante connexe de* G *est* irréductible [16] *et* de type fini *sur* A.

On peut supposer en effet A égal à son corps résiduel k. Soit alors H une composante connexe de G, x un point fermé de H, $\kappa(x)$ le corps résiduel de x et k' l'extension normale de k engendrée par $\kappa(x)$. La projection canonique $\pi : H \otimes_k k' \to H$ est ouverte et fermée ; [17] par conséquent, si C est une composante connexe de $H \otimes_k k'$, la projection $C \to H$ est surjective, donc C contient un point $y \in \pi^{-1}(x)$, et un tel point est rationnel sur k' (cf. la démonstration de 1.2), de sorte que C est l'image de $G^0 \otimes_k k'$ par la translation r_y. Or G^0 est de type fini sur k, d'après 2.4, et $\pi^{-1}(x)$ est fini (de cardinal $\leqslant [k' : k]$), donc $H \otimes_k k'$ est de type fini sur k', et donc H est de type fini sur k.

Si H n'était pas irréductible, on pourrait choisir x de telle façon que x appartienne à deux composantes irréductibles distinctes. L'anneau local $\mathscr{O}_{H,x}$ aurait alors deux idéaux premiers minimaux distincts, ainsi que l'anneau local de tout point y de $H \otimes_k k'$ au-dessus de x ([18]comme $\mathscr{O}_y$ est fini sur $\mathscr{O}_x$, le morphisme $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_y \to \operatorname{Spec} \mathscr{O}_x$ est surjectif, et de plus, si $\mathfrak{p} \in \mathscr{O}_x$, les idéaux premiers de $\mathscr{O}_y$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ sont *incomparables* : c'est le « going up theorem » de Cohen-Seidenberg, cf. Bourbaki, *Alg. comm.*, § V.2, Cor. 1 de la Prop. 1, et Th. 1). Or, nous venons de voir que $H \otimes_k k'$ est la somme directe d'un certain nombre d'exemplaires de $G^0 \otimes_k k'$, qui est irréductible.

3. Construction de groupes-quotients (cas des groupes de type fini)

301

[16] N.D.E. : On prendra garde qu'une composante connexe non-neutre n'est pas *géométriquement connexe* en général. Par exemple, si $k = \mathbb{R}$, le groupe $\boldsymbol{\mu}_{3,\mathbb{R}}$, représenté par $\mathbb{R}[X]/(X^3 - 1)$, a deux composantes connexes : $\{e\} = \operatorname{Spec} \mathbb{R}$ et $C = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 1)$, et $C \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ a deux composantes.

[17] N.D.E. : Dans ce qui suit, on a corrigé et détaillé l'original.

[18] N.D.E. : On a corrigé la référence qui suit.

3.1. Soient A un anneau local artinien et $u : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ un homomorphisme de A-groupes. Si $\mu : \mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{F} \to \mathrm{F}$ et $\nu : \mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ désignent les morphismes de multiplication et λ le morphisme composé

$$\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \xrightarrow{u\times \mathrm{G}} \mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \xrightarrow{\nu} \mathrm{G} \quad ,$$

on rappelle que le quotient à gauche $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ de G par F est le conoyau du $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{A}})$-groupoïde G_* décrit ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{F}\times\lambda"] \arrow[r, "\mu\times\mathrm{G}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{pr}_{2,3}"'] & \mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \arrow[r, shift left, "\lambda"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_2"'] & \mathrm{G} \end{tikzcd}$$

(pr_2 et $\mathrm{pr}_{2,3}$ sont les projections de $\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}$ et $\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}}(\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G})$ sur les deuxièmes facteurs). Nous dirons que G_* est le groupoïde de base G défini par u (confer Exp. V, § 2.a ; comme dans l'exposé V, nous ne suivons pas dans cet exposé la convention de IV, 4.6.15).

Comme l'unique A-morphisme $\mathrm{F} \to \operatorname{Spec} \mathrm{A}$ est universellement ouvert (EGA IV_2, 2.4.9), pr_2 est un morphisme ouvert ; il en va donc de même pour λ qui est composé de pr_2 et de l'automorphisme σ de $\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}$ qui est défini par les formules suivantes : $\sigma(\mathrm{S})(x, y) = (x, u(\mathrm{S})(x) \cdot y)$ où S est un A-préschéma variable, x et y appartenant à F(S) et G(S). On voit de la même façon que pr_2 et λ sont plats lorsque F est plat sur A.

Remarquons aussi pour terminer ces préliminaires que tout A-morphisme s :
$\operatorname{Spec} \mathrm{A} \to \mathrm{G}$ définit un automorphisme du groupoïde G_* qui induit sur G, $\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}$ **302**
et $\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}$, les automorphismes r_s, $\mathrm{id}_{\mathrm{F}} \times_{\mathrm{A}} r_s$ et $\mathrm{id}_{\mathrm{F}} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{id}_{\mathrm{F}} \times_{\mathrm{A}} r_s$, respectivement. Nous noterons encore r_s cet automorphisme de G_* et nous dirons que r_s est la translation à droite définie par s (confer 0.4).

3.2 Théorème. — *Soient* F *et* G *des groupes* plats *et* localement de type fini *sur un anneau local artinien* A. *Soit* $u : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *un homomorphisme de* A*-groupes* quasi-compact *et de noyau* fini sur A. *Alors :*

(i) *Le quotient à gauche* $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ *de* G *par* F *existe dans* $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{A}})$ *et la suite*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \arrow[r, shift left, "\lambda"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_2"'] & \mathrm{G} \arrow[r, "p"] & \mathrm{F}\backslash\mathrm{G} \end{tikzcd}$$

est exacte dans la catégorie de tous les espaces annelés.

(ii) *Le morphisme canonique* $\mathrm{G} \to \mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ *est* surjectif *et* ouvert, *et* $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ *est une somme directe de préschémas* de type fini *sur* A.

(iii) *Le morphisme canonique* $\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \to \mathrm{G} \times_{(\mathrm{F}\backslash\mathrm{G})} \mathrm{G}$ *est* surjectif.

(iv) *Si* u *est un* monomorphisme [19], $\mathrm{F}\times_{\mathrm{A}}\mathrm{G}\to\mathrm{G}\times_{(\mathrm{F}\backslash\mathrm{G})}\mathrm{G}$ *est un* isomorphisme *et* $\mathrm{G}\to\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ *est* fidèlement plat, [20] *de sorte que* $\mathrm{G}\to\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ *est un* F*-torseur localement trivial pour la topologie* (fppf).

Dans la démonstration de ce théorème, A' désignera une A-algèbre locale, finie et libre sur A. Si R est une relation faisant intervenir A', nous dirons que « $\mathrm{R}(\mathrm{A}')$ est vraie quand A' est assez grande » s'il existe une algèbre A_1 locale, finie et libre sur A
303 telle que la relation $\mathrm{R}(\mathrm{A}')$ soit vérifiée pour chaque algèbre A' locale, finie et libre sur A_1.

Nous allons d'abord prouver le théorème lorsque F *et* G *sont de type fini sur* A.

3.2.1. — Supposons un instant que tout point de G possède un voisinage ouvert et saturé W tel que le groupoïde induit par G_* sur W possède une quasi-section (cf. V § 6). Le théorème 3.2 résulte alors de V.6.1 ; de plus, comme on suppose G *de type fini* sur A, alors $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ l'est aussi, d'après V.6.1 (ii). Nous allons montrer qu'en outre *toute partie finie de* $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ *est alors contenue dans un ouvert affine.*

Si U est une quasi-section du groupoïde induit par G_* sur un ouvert saturé W de G, alors $\mathrm{U}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$ est une quasi-section du $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{A}'})$-groupoïde induit par $\mathrm{G}_*\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$ sur $\mathrm{W}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$. De plus, si U_* est le $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{A}})$-groupoïde induit par G_* sur U, alors $\mathrm{U}_*\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$ s'identifie au $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{A}'})$-groupoïde induit par $\mathrm{G}_*\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$ dans $\mathrm{U}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$. [21]

Il résulte alors des démonstrations de l'exposé V que la construction du quotient $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ commute à l'extension $\mathrm{A}\to\mathrm{A}'$ de la base du type considéré ici. [22]

Soient donc $x_1,\dots,x_n$ des points de $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ que nous pouvons supposer fermés [23] et $g_1,\dots,g_n$ des points fermés de G se projetant sur $x_1,\dots,x_n$; soient V un ouvert affine partout dense de $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$, U l'image réciproque de V dans G et soit A' une A-algèbre assez grande pour les besoins de notre cause. Alors l'image réciproque de $g_1,\dots,g_n$ dans $\mathrm{G}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$ est formée de points $g'_1,\dots,g'_p$ qui sont strictement rationnels sur A' (1.2) ; en outre, si A' est assez grande, l'ouvert partout dense $\bigcap_i(\mathrm{U}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}')^{-1}\cdot g'_i$ contient un point x strictement rationnel sur A'. On a donc $x\in(\mathrm{U}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}')^{-1}\cdot g'_i$ d'où $g'_i\in(\mathrm{U}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}')\cdot x$. Comme $(\mathrm{U}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}')\cdot x$ est l'image de $\mathrm{U}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$ par un automorphisme
304 du groupoïde $\mathrm{G}_*\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$, alors l'image $(\mathrm{V}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}')\cdot x$ de $(\mathrm{U}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}')\cdot x$ dans $(\mathrm{F}\backslash\mathrm{G})\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$ est l'image de $\mathrm{V}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$ par l'automorphisme induit sur $(\mathrm{F}\backslash\mathrm{G})\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$. Donc $(\mathrm{V}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}')\cdot x$ est un ouvert affine de $(\mathrm{F}\backslash\mathrm{G})\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$ contenant les images $x'_1,\dots,x'_p$ de $g'_1,\dots,g'_p$.

[19] N.D.E. : dans ce cas, u est une *immersion fermée*, cf. $\mathrm{VI_B}$, 1.4.2, et l'hypothèse que G soit plat peut être supprimée, cf. le paragraphe 3.3.

[20] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit

[21] N.D.E. : Ce qui précède est valable pour *tout* changement de base $\mathrm{A}\to\mathrm{A}'$.

[22] N.D.E. : Ceci est détaillé en 4.6 plus loin : il s'agit de voir que la formation de l'image directe par les morphismes p, λ et pr_2 commute aux changements de base *plats* $\mathrm{A}\to\mathrm{A}'$. Comme F et G sont *de type fini* sur A artinien, les morphismes f en question sont tous quasi-compacts et quasi-séparés, et l'égalité $f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'=f'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}'})$ (avec des notations évidentes) découle de EGA IV_1, 1.7.21.

[23] N.D.E. : En effet, soient $y_1,\dots,y_n$ des points arbitraires de $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$; comme $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ est de type fini sur A, chaque y_i a dans son adhérence un point fermé x_i, et tout ouvert contenant x_i contient y_i.

Considérons alors la relation d'équivalence sur $(F\backslash G)\otimes_A A'$ définie par la projection $(F\backslash G)\otimes_A A' \to (F\backslash G)$:

$$\begin{tikzcd}(F\backslash G)\otimes_A A'\otimes_A A' \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & (F\backslash G)\otimes_A A' \arrow[r] & F\backslash G\end{tikzcd} \quad ,$$

où d_0 et d_1 sont induits par les deux injections canoniques de A' dans $A'\otimes_A A'$. Comme A' est une A-algèbre finie et libre, disons de rang n, alors d_0 et d_1 sont finis et localement libres de rang n ; par conséquent, on peut appliquer le raisonnement de l'Exp. V, 5.b (tiré de la démonstration de SGA 1, VIII.7.6). On obtient ainsi que $x'_1,\dots,x'_p$ sont contenus dans un ouvert affine *saturé* W' contenu dans l'ouvert affine $(V\otimes_A A')\cdot x$. L'image de W' dans $F\backslash G$ contient alors $x_1,\dots,x_n$ et est un ouvert affine de $F\backslash G$, d'après V, 4.1 (ii).

3.2.2. — Pour toute algèbre A' locale, finie et libre sur A, désignons maintenant par $U(A')$ l'ensemble des points de $G\otimes_A A'$ ayant un voisinage ouvert et saturé W tel que le groupoïde induit par $G_*\otimes_A A'$ sur W possède une quasi-section. Il est bien clair que $U(A')$ est saturé pour les opérations de $G(\operatorname{Spec} A')$ sur $G\otimes_A A'$. Nous allons voir que, lorsque A' est assez grande, $U(A')$ est égal à $G\otimes_A A'$.

La preuve se fait par récurrence sur $\dim(G-U(A))$ [24] : soient $g_1,\dots,g_n$ des points fermés appartenant aux diverses composantes irréductibles de $G-U(A)$; si A' est assez grande, les points $g'_1,\dots,g'_p$ de $G\otimes_A A'$ se projetant sur $g_1,\dots,g_n$ sont strictement rationnels sur A' ; de même, $U(A)\otimes_A A'$ contient un point strictement rationnel x (d'après V 8.1, U(A) n'est pas vide). Alors, $U(A')$ contient $(U(A)\otimes_A A')\cdot x^{-1}g'_i$ pour 305
tout i ; donc $U(A')$ contient $g'_1,\dots,g'_p$ et on a

$$\dim(G\otimes_A A' - U(A')) < \dim(G - U(A)).$$

L'hypothèse de récurrence entraîne alors l'existence d'une algèbre A'' sur A' telle qu'on ait $U(A'') = (G\otimes_A A')\otimes_{A'} A'' = G\otimes_A A''$.

3.2.3. — Nous sommes maintenant en mesure de prouver l'existence de $F\backslash G$ quand F et G sont de type fini sur A. Soit A' assez grande sur A pour que $U(A')$ coïncide avec $G\otimes_A A'$ (confer 3.2.2). Nous poserons $A'' = A'\otimes_A A'$ et, pour tout A-préschéma X, nous désignerons par X' et X'' les produits fibrés $X\otimes_A A'$ et $X\otimes_A A''$. D'après 3.2.1 et 3.2.2, les quotients $F'\backslash G'$ et $F''\backslash G''$ existent et on a le diagramme commutatif

[24] N.D.E. : Ici, on a conservé la notation $G - U(A)$ pour le complémentaire de U(A) dans G.

suivant, où les deux premières lignes et colonnes sont *exactes* :

$$
(*) \qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{F}'' \times_{\mathrm{A}''} \mathrm{G}'' \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}_2''"] \arrow[r, shift right, "\lambda''"'] \arrow[d, shift right, "w_1"'] \arrow[d, shift left, "w_2"] & \mathrm{G}'' \arrow[r, "p''"] \arrow[d, shift right, "v_1"'] \arrow[d, shift left, "v_2"] & \mathrm{F}'' \setminus \mathrm{G}'' \arrow[d, shift right, "u_1"'] \arrow[d, shift left, "u_2"] \\
\mathrm{F}' \times_{\mathrm{A}'} \mathrm{G}' \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}_2'"] \arrow[r, shift right, "\lambda'"'] \arrow[d, "h"] & \mathrm{G}' \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "g"] & \mathrm{F}' \setminus \mathrm{G}' \\
\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[r, shift right, "\lambda"'] & \mathrm{G} &
\end{tikzcd}
\quad .
$$

Dans ce diagramme, pr_2' et λ' (resp. pr_2'' et λ'') sont obtenus à partir de pr_2 et λ par des changements de base évidents ; les morphismes g et h sont induits par l'injection canonique $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$. On y désigne par p' et p'' les morphismes canoniques ; les morphismes v_1, v_2 et w_1, w_2 sont induits par les deux injections canoniques de A' dans A''. Enfin, comme la construction du quotient $\mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}'$ commute aux deux
306 changements de base $f_1, f_2 : \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}'' \rightrightarrows \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}'$, on a, en notant $\pi' : \mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}' \to \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}'$ le morphisme structural, des isomorphismes canoniques, pour $i = 1, 2$:

$$\tau_i : \mathrm{F}''\backslash\mathrm{G}'' \xrightarrow{\sim} (\mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}') \underset{\pi', f_i}{\times} \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}'' \quad ,$$

et le morphisme u_i est composé de τ_i et de la projection $(\mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}') \times_{\pi', f_i} \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}'' \to \mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}'$.

Or, lorsqu'on a un diagramme du type $(*)$, les deux premières lignes et colonnes étant exactes, on vérifie facilement que $\mathrm{Coker}(\mathrm{pr}_2, \lambda)$ existe si et seulement si il en va de même pour $\mathrm{Coker}(u_1, u_2)$, et ces deux conoyaux s'identifient. L'existence de $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ résultera donc de celle de $\mathrm{Coker}(u_1, u_2)$.

Or il résulte de la compatibilité de la formation de $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ avec les extensions de la base considérées ici (cf. N.D.E. (22) dans 3.2.1, et 4.6 plus loin) que le morphisme composé

$$(\mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}') \times_{\pi', f_1} \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}'' \xrightarrow{\tau_1^{-1}} \mathrm{F}''\backslash\mathrm{G}'' \xrightarrow{\tau_2} (\mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}') \times_{\pi', f_2} \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}''$$

est une donnée de descente sur $\mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}'$ relativement à $f : \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}' \to \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}$. D'après 3.2.1 et SGA 1, VIII.7.6, cette donnée de descente est effective, c'est-à-dire que $\mathrm{Coker}(u_1, u_2)$ existe (on pourrait d'ailleurs utiliser directement le théorème 4.1 de l'Exp. V).

3.2.4. — Pour terminer la preuve du théorème 3.2 dans le cas où F et G sont de type fini sur A, il reste à étudier le quotient $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$. D'après V 6.1, les assertions (ii), (iii) et (iv) « deviennent vraies » après le changement de base $f : \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}' \to \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}$; d'après EGA IV_2, 2.6.1, 2.6.2 et 2.7.1, ces assertions étaient donc vraies avant le changement de base. Enfin, pour prouver la deuxième assertion de (i), il n'y a qu'à se reporter à V § 6.c).

3.3. [25] Dans le théorème 3.2, l'hypothèse que G soit plat peut être supprimée, lorsque $u : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ est un *monomorphisme*. Cette généralisation est évoquée dans la remarque 9.3 b) de l'Exp. $\mathrm{VI_B}$, et aussi dans [**Ray67a**], Exemple a) i), p. 82. La démonstration, qu'on trouve dans le théorème 4 de [**An73**], découle du théorème 3.2 et du théorème suivant de Grothendieck (mentionné dans [**Ray67a**], Th. 1 ii) et démontré dans [**DG70**], III.2.7.1). Si X est un préschéma et R une relation d'équivalence dans X, on notera $\widetilde{\mathrm{X/R}}$ le *faisceau* (fppf) *quotient* de X par R (cf. IV.4.4.9).

Théorème 3.3.1 (Grothendieck). — *Soient* A *un anneau,* X *un* A*-préschéma, et* $d_0, d_1 : \mathrm{R} \to \mathrm{X}$ *une* A*-relation d'équivalence dans* X*, telle que* d_i *soit* fidèlement plat, de présentation finie*. Soit* X_0 *un sous-préschéma fermé saturé de* X*, défini par un idéal nilpotent, et soit* R_0 *la relation d'équivalence induite par* R *sur* X_0*. Alors, si le faisceau-quotient* (fppf) $\widetilde{\mathrm{X}_0/\mathrm{R}_0}$ *est* représentable *par un* A*-préschéma, il en est de même de* $\widetilde{\mathrm{X/R}}$

Pour la démonstration, on renvoie à [**DG70**], III.2.7.1. Revenons maintenant au cas où A est un anneau *local artinien.* Soit $u : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ un morphisme *quasi-compact* entre A-groupes *localement de type fini*, et supposons de plus que u soit un *monomorphisme.* Alors, d'après $\mathrm{VI_B}$, 1.4.2, u est une *immersion fermée.*

On peut maintenant énoncer la variante suivante du théorème 3.2.

Théorème 3.3.2. — *Soient* A *un anneau local artinien,* G *un* A*-groupe* localement de type fini*,* F *un sous-groupe* fermé *de* G*,* plat *sur* A*. Alors :*

(i) *Le faisceau-quotient* (fppf) $\widetilde{\mathrm{G/F}}$ *est représentable par un* A*-préschéma* G/F *; de plus, la suite*

$$\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \rightrightarrows \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G/F}$$

est exacte dans la catégorie de tous les espaces annelés.

(ii) *Le morphisme canonique* $\mathrm{G} \to \mathrm{G/F}$ *est* fidèlement plat *et* localement de présentation finie*.*

(iii) *Le morphisme canonique* $\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \to \mathrm{G} \times_{(\mathrm{G/F})} \mathrm{G}$ *est un* isomorphisme*, de sorte que* $\mathrm{G} \to \mathrm{G/F}$ *est un* F*-torseur localement trivial pour la topologie* (fppf)*.*

(iv) G/F *est une somme directe de* A*-préschémas* de type fini*.*

Sauf pour (iv), ceci résulte de ce qui précède.

Lemme 3.3.3. — G/F *est une somme directe de* A*-préschémas* de type fini*.*

A COMPLÉTER ...

4. Construction de groupes-quotients (cas général)

307

Nous supposons maintenant satisfaites les hypothèses du théorème 3.2, F et G n'étant pas nécessairement de type fini sur A.

[25] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe.

4.1. Considérons tout d'abord une composante connexe G^α de G et montrons que *le saturé* $\overline{G^\alpha}$ *de* G^α *pour la relation d'équivalence définie par le groupoïde* G_* *est une partie ouverte et fermée de* G (autrement dit est la réunion de certaines composantes connexes de G).

Ce saturé est l'image de $F \times_A G^\alpha$ par λ, donc est ouvert dans G (confer § 3.1). Si k est le corps résiduel de A et $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, il reste à montrer que l'image de $(F \times_A G^\alpha) \otimes_A k$ par $\lambda \otimes_A k$ est fermée dans $G \otimes_A k$, ou encore, d'après SGA 1, VIII.4.4, que l'image de $(F \times_A G^\alpha) \otimes_A \overline{k}$ par $\lambda \otimes_A \overline{k}$ est fermée. Comme $G^\alpha \otimes_A \overline{k}$ est la réunion d'un nombre fini de composantes connexes de $G \otimes_A \overline{k}$, on est ramené au cas où A est un corps algébriquement clos, ce que nous allons supposer. Dans ce cas, $\overline{G^\alpha}$ est la réunion des images de G^α par les translations à gauche $\ell_{u(x)}$, où x parcourt les points fermés de F ; l'assertion résulte donc de ce que ces images sont des composantes connexes de G.

4.2. Prenons en particulier pour G^α la composante connexe G^0 de l'origine de G. Alors $\overline{G^0}$ contient évidemment l'image de F par u qui n'est autre que la classe d'équivalence de l'origine. D'autre part, si F^β est une composante connexe de F, $F^\beta \times_A G^0$ est connexe (2.1.2) de sorte que l'image de $F^\beta \times_A G^0$ par λ est contenue dans la composante connexe de $u(F^\beta)$ dans G. Autrement dit, $\overline{G^0}$ *est la réunion des composantes connexes qui rencontrent l'image de* F.

308 On remarquera aussi que le sous-préschéma ouvert de G qui a $\overline{G^0}$ pour espace sous-jacent est un sous-groupe de G (que nous notons encore $\overline{G^0}$) : en effet le morphisme inversion de G conserve l'image de F et permute les composantes connexes de G qui rencontrent cette image ; il suffit donc de montrer que $\nu : G \times_A G \to G$ applique $\overline{G^0} \times_A \overline{G^0}$ dans $\overline{G^0}$ et pour cela on peut supposer que A est un corps algébriquement clos (avec les notations de 4.1, $\overline{G^0} \otimes_A \overline{k}$ s'identifie en effet au saturé de $(G \otimes_A \overline{k})^0$ par la relation d'équivalence définie par l'homomorphisme $u \otimes_A \overline{k}$) ; si G^γ et G^δ sont alors des composantes connexes de $\overline{G^0}$, $G^\gamma \times_A G^\delta$ est connexe et son image par ν rencontre l'image de F ; par conséquent, $u(G^\gamma \times_A G^\delta)$ est contenu dans une composante connexe de G rencontrant $u(F)$. C.Q.F.D.

4.3. Il résulte de ce qui précède que le groupoïde G_* de base G défini par u est la *somme directe* des groupoïdes $\overline{G^\alpha_*}$ induits par G_* sur les différentes parties ouvertes et fermées de G de la forme $\overline{G^\alpha}$. Le conoyau de G_* est donc la somme directe des conoyaux de ces groupoïdes $\overline{G^\alpha_*}$, qu'on est amené à étudier séparément.

Considérons tout d'abord le groupoïde $\overline{G^0_*}$ induit par G_* sur $\overline{G^0}$. Il est clair que $\overline{G^0_*}$ est le groupoïde de base $\overline{G^0}$ défini par l'homomorphisme de F dans $\overline{G^0}$ induit par u (§ 3.1). Le conoyau dont nous voulons prouver l'existence s'identifie donc à $F\backslash\overline{G^0}$. Considérons d'autre part le groupoïde

$$\overline{G^0_2} \overset{\ell'_2}{\underset{\ell'_0}{\overset{\xrightarrow{\quad}}{\underset{\xrightarrow{\quad}}{\xrightarrow{\ \ell'_1\ }}}}} \overline{G^0_1} \underset{\ell_0}{\overset{\ell_1}{\rightrightarrows}} \overline{G^0_0} = \overline{G^0}$$

induit par $\overline{\mathrm{G}^0_*}$ sur G^0. Si l'on se reporte à la construction explicitée en V § 3.b), l'objet noté alors $\mathrm{Y}_0 \times_{\mathrm{X}_0} \mathrm{X}_1$ n'est autre que $\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0$, de sorte que G^0_1 est l'image réciproque de G^0 par le morphisme $\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0 \to \overline{\mathrm{G}^0}$ induit par λ. 309

Je dis que cette image réciproque est $\mathrm{F}_0 \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0$, où l'on note F_0 l'image réciproque de G^0 par u. En effet, si F^β est une composante connexe de F_0, $\mathrm{F}^\beta \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0$ est connexe (2.1.2) et $\lambda(\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0)$ est contenu dans G^0 ; réciproquement, si F^β est une composante connexe de F non contenue dans F_0, l'image de $\mathrm{F}^\beta \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0$ est encore connexe et contient $u(\mathrm{F}^\beta)$; si $u(\mathrm{F}^\beta)$ n'est pas contenu dans G^0, $\lambda(\mathrm{F}^\beta \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0)$ ne rencontre pas G^0.

Il résulte de ce qui précède que le groupoïde G^0_* induit par G_* sur G^0 est le groupoïde de base G^0 défini par l'homomorphisme $\mathrm{F}_0 \to \mathrm{G}^0$ induit par u. Comme G^0, et donc F_0, sont de type fini sur A, alors, d'après le paragraphe 4, G^0_* possède un conoyau qui n'est autre que $\mathrm{F}_0\backslash\mathrm{G}^0$.

Je dis maintenant que $\mathrm{F}_0\backslash\mathrm{G}^0$ *s'identifie à* $\mathrm{F}\backslash\overline{\mathrm{G}^0}$. En effet, la démonstration est analogue à celle de la première partie de l'assertion (i) du lemme V § 6.1 ; considérons le diagramme :

$$\overline{\mathrm{G}^0} \xleftarrow{\ v\ } \mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0 \xrightarrow{\ \mathrm{pr}_2\ } \mathrm{G}^0 \quad ,$$

où v est le morphisme induit par λ. Comme pr_2 possède une section, pr_2 est un épimorphisme effectif universel de sorte que $\mathrm{F}_0\backslash\mathrm{G}^0$ coïncide avec $\mathrm{Coker}(v_0, v_1)$, où

$$\begin{tikzcd} \mathrm{V}_2 \arrow[r, shift left=2, "v'_2"] \arrow[r, "v'_1"] \arrow[r, shift right=2, "v'_0"'] & \mathrm{V}_1 \arrow[r, shift left, "v_1"] \arrow[r, shift right, "v_0"'] & \mathrm{V} = \mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0 \end{tikzcd}$$

est l'image réciproque par pr_2 du groupoïde G^0_* (cf. V § 3.a), c'est-à-dire également l'image réciproque par le morphisme composé $\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0 \xrightarrow{\text{inclusion}} \mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \overline{\mathrm{G}^0} \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \overline{\mathrm{G}^0}$ de $\overline{\mathrm{G}^0_*}$. 310

De même, comme v est fidèlement plat et quasi-compact, $\mathrm{F}\backslash\overline{\mathrm{G}^0}$ coïncide avec le conoyau de l'image réciproque de $\overline{\mathrm{G}^0_*}$ par le changement de base v. Or cette image réciproque est isomorphe à V_* d'après l'Exp. V, § 3.c ; il résulte de là que l'inclusion canonique de G^0_* dans $\overline{\mathrm{G}^0_*}$ induit un isomorphisme de $\mathrm{F}_0\backslash\mathrm{G}^0$ sur $\mathrm{F}\backslash\overline{\mathrm{G}^0}$.

On remarque enfin que : *la construction de* $\mathrm{F}\backslash\overline{\mathrm{G}^0}$ *commute aux changements de base finis et localement libres*, parce qu'il en va de même pour $\mathrm{F}_0\backslash\mathrm{G}^0$ (cf. N.D.E. (22) et 4.6 plus loin).

4.4. Il reste à construire le conoyau du groupoïde $\overline{\mathrm{G}^\alpha_*}$ lorsque G^α est une composante connexe quelconque de G. Si A′ est une A-algèbre locale, finie et libre assez grande (confer 3.2), $\mathrm{G}^\alpha \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$ est la réunion d'un nombre fini de composantes connexes $\mathrm{G}'_1, \ldots, \mathrm{G}'_n$ de $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$ qui possèdent toutes un point strictement rationnel. Pour tout i, il existe donc une translation à droite r_i de $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$ qui applique $\mathrm{G}^0 \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$ sur G'_i ; cette translation induit un isomorphisme du groupoïde $\overline{\mathrm{G}^0_*} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$ sur $\overline{(\mathrm{G}'_i)}_*$, de sorte que le groupoïde induit par $\mathrm{G}_* \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$ sur le saturé de G'_i possède un conoyau.

Comme $(\overline{\mathrm{G}^\alpha})_* \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$ est la somme directe d'un certain nombre d'entre les $(\overline{\mathrm{G}'_i})_*$, alors $(\overline{\mathrm{G}^\alpha})_* \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$ possède un conoyau ; ce conoyau est la somme directe d'un certain nombre d'exemplaires de $(\mathrm{F}_0 \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}')\backslash(\mathrm{G}^0 \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}')$ de sorte que toute partie finie de ce conoyau est contenue dans un ouvert affine ; de plus, la construction de ce conoyau
311 commute aux extensions finies et localement libres de la base (cf. N.D.E. 22 et 4.6 plus loin). On voit donc comme en 3.2.3 que ce conoyau est de la forme $\mathrm{Y} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$, où Y est un conoyau de $(\overline{\mathrm{G}^\alpha})_*$.

4.5. Nous avons donc construit F\G et montré qu'il est somme directe de préschémas de type fini sur A. Les autres assertions du théorème 3.2 se ramènent directement à des assertions concernant les groupoïdes $\overline{\mathrm{G}^\alpha_*}$. Comme en V § 6, la seconde assertion de (i) découle de la première et de (ii) et (iii), donc il suffit de prouver (ii), (iii) et (iv). Comme A′ est une A-algèbre locale, finie et libre, le morphisme $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ est fidèlement plat et de présentation finie, donc, d'après SGA 1, VIII (3.1, 4.6, 5.4), il suffit de vérifier les assertions correspondantes dans le cas du groupoïde $\overline{\mathrm{G}^\alpha_*} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$. Or celui-ci est isomorphe à la somme directe d'un nombre fini d'exemplaires de $\overline{\mathrm{G}^0_*} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$ (confer 4.4), de sorte qu'on est ramené au groupoïde $\overline{\mathrm{G}^0_*}$.

Pour ce dernier on continue de calquer la preuve établie en V § 6, comme on a commencé à le faire en 4.3.

4.6. Ajoutons pour terminer ce paragraphe quelques remarques concernant le lemme 6.1 et le § 9.a) de l'exposé V : *avec les hypothèses et les notations de* V § 9.a), nous cherchons une condition sous laquelle la construction du conoyau du $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$-groupoïde X_* commute à une extension $\pi : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ de la base. Comme les conoyaux de X_* et X'_* s'identifient aux conoyaux des groupoïdes U_* et U'_* induits par X_* et X'_* sur les quasi-sections U et U′, on est ramené au cas d'un $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$-groupoïde vérifiant les hypothèses du théorème V.4.1. Si $p : \mathrm{U} \to \mathrm{Y}$ est le morphisme canonique de U sur le conoyau Y de U_*, nous voulons que la suite de $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}$-modules

$$(*) \qquad \mathscr{O}_{\mathrm{Y}'} \longrightarrow p'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{U}'}) \rightrightarrows (pu_1)'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{U}'_1}) = (pu_0)'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{U}'_1})$$

soit exacte. [26] Comme on s'est placé sous les hypothèses de V.4.1, u_0 et u_1 sont finis et localement libres ; et, d'après V.4.1 (ii), p est entier. Alors, p et $p \circ u_i$ sont affines,
312 donc séparés et quasi-compacts.

Par conséquent, si S′ est *plat* sur S, il résulte de EGA III_1, 1.4.15 (compte-tenu de la correction $\mathrm{Err}_{\mathrm{III}}$ 25 dans EGA III_2), que la suite $(*)$ s'identifie à l'image réciproque de la suite

$$(**) \qquad \mathscr{O}_{\mathrm{Y}} \longrightarrow g_*(\mathscr{O}_{\mathrm{U}_0}) \rightrightarrows g_* u_{1*}(\mathscr{O}_{\mathrm{U}_1}) = g_* u_{0*}(\mathscr{O}_{\mathrm{U}_1}) \quad .$$

Comme $(**)$ est une suite exacte, on voit que : *la construction du conoyau de* X_* *commute aux extensions plates de la base lorsque* X_* *possède une quasi-section.* [27]

[26] N.D.E. : Dans ce qui suit, on a modifié l'original, les hypothèses supplémentaires faites sur X_* étant superflues.

[27] N.D.E. : Il en est de même lorsque X_* possède localement des quasi-sections, par exemple sous les hypothèses de V.7.1 ou V § 9, 7.1.bis.

4.7. Considérons maintenant le cas du groupoïde G_* du théorème 3.2 lorsqu'on suppose provisoirement F et G de type fini sur A. D'après 3.2.2 il existe une algèbre A' locale, finie et libre sur A telle que le groupoïde $G_* \otimes_A A'$ possède « localement » des quasi-sections. Pour toute extension $T \to \operatorname{Spec} A$ de la base, la suite

$$(F''\backslash G'') \times_{\operatorname{Spec} A} T \rightrightarrows (F'\backslash G') \times_{\operatorname{Spec} A} T \longrightarrow (F\backslash G) \times_{\operatorname{Spec} A} T$$

déduite du diagramme $(*)$ de 3.2.3 est exacte. Si l'on suppose de plus T plat sur Spec A, alors $(F''\backslash G'') \times_{\operatorname{Spec} A} T$ et $(F'\backslash G') \times_{\operatorname{Spec} A} T$ s'identifient respectivement, d'après 4.6, aux conoyaux des groupoïdes

$$(G_* \otimes_A A'') \underset{\operatorname{Spec} A}{\times} T \qquad \text{et} \qquad (G_* \otimes_A A') \underset{\operatorname{Spec} A}{\times} T.$$

Le diagramme déduit de 3.2.3 $(*)$ par le changement de base $T \to \operatorname{Spec} A$ montre alors que $(F\backslash G) \times_{\operatorname{Spec} A} T$ s'identifie au conoyau de $G_* \times_{\operatorname{Spec} A} T$. Un raisonnement analogue est valable dans le cas général :

Sous les hypothèses du théorème 3.2*, pour tout* A*-préschéma plat* T*, on peut identifier* $(F\backslash G) \times_{\operatorname{Spec} A} T$ *au quotient à gauche de* $G \times_{\operatorname{Spec} A} T$ *par* $F \times_{\operatorname{Spec} A} T$.

5. Compléments

313

5.1. Nous reprenons les notations du § 3 et les hypothèses du théorème 3.2 ; on a alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
F \times_A G \times_A G \arrow[r, "F\times\nu"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{pr}_2\times G"'] \arrow[d, shift left, "\lambda\times G"] & F \times_A G \arrow[d, shift right, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[d, shift left, "\lambda"] \\
G \times_A G \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\mathrm{can.}\times G"'] & G \arrow[d, "\mathrm{can.}"] \\
(F\backslash G) \times_A G \arrow[r, dashed, "\rho"] & F\backslash G
\end{tikzcd} \quad ,$$

qui satisfait aux égalités $\mathrm{pr}_2 \circ (F \times \nu) = \nu \circ (\mathrm{pr}_2 \times G)$ et $\lambda \circ (F \times \nu) = \nu \circ (\lambda \times G)$. En outre, comme G est supposé *plat* sur A, la suite verticale de gauche est exacte d'après 4.7, de sorte que ν induit un morphisme de A-préschémas :

$$\rho : (F\backslash G) \underset{A}{\times} G \longrightarrow F\backslash G \quad .$$

Ce morphisme ρ fait opérer G à droite sur $F\backslash G$ comme on le vérifie immédiatement ; de plus, le morphisme canonique $G \to F\backslash G$ commute aux opérations de G à droite sur G et $F\backslash G$.

5.2. Lorsque l'homomorphisme de A-groupes $u : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ est un *monomorphisme*, on peut retrouver 5.1 en se servant des résultats de l'exposé IV. En effet, le morphisme canonique $p : \mathrm{G} \to \mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ est fidèlement plat et ouvert d'après 3.2 ; il est donc couvrant pour la topologie (fpqc) (IV.6.3.1) et l'on peut appliquer les corollaires IV.5.2.2 et IV.5.2.4.

314 En particulier, *si nous supposons, en plus des hypothèses de* 3.2*, que u est l'inclusion dans* G *d'un sous-groupe* invariant F, *il existe sur* $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ *une et une seule structure de* A*-groupe telle que le morphisme canonique* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ *soit un homomorphisme de* A*-groupes.*

5.3. Nous allons maintenant passer en revue quelques énoncés de l'exposé IV.

5.3.1. — Les énoncés IV.5.2.7 et IV.5.3.1 se traduisent comme suit. Soient F et G deux groupes *localement de type fini* et *plats* sur A, F étant un sous-groupe *invariant fermé* de G. Les applications $\mathrm{H} \mapsto \mathrm{F}\backslash\mathrm{H}$ et $\mathrm{H}' \mapsto \mathrm{H}' \times_{(\mathrm{F}\backslash\mathrm{G})} \mathrm{G}$ définissent une *correspondance biunivoque* entre les A-sous-groupes *plats* de G contenant F et les A-sous-groupes *plats* de $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$. Dans cette bijection les sous-groupes *fermés* (resp. *invariants*) de G contenant F correspondent aux sous-groupes *fermés* (resp. *invariants*) de $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$.

5.3.2. — La proposition IV.5.2.9 implique le résultat suivant. Soient F, H et G des groupes *localement de type fini* et *plats* sur A ; on suppose $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}$, avec F fermé dans G et invariant dans H. Dans ces conditions, $\mathrm{F}\backslash\mathrm{H}$ opère librement à gauche sur $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$, le préschéma quotient $(\mathrm{F}\backslash\mathrm{H})\backslash(\mathrm{F}\backslash\mathrm{G})$ existe et on a un isomorphisme canonique de préschémas à groupe d'opérateurs G :

$$(\mathrm{F}\backslash\mathrm{H})\Big\backslash(\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}) = \mathrm{H}\backslash\mathrm{G} \quad .$$

5.3.3. — De IV.5.2.8, enfin, découle l'assertion que voici. Soient F, H et G des groupes
315 *localement de type fini* et *plats* sur A ; on suppose que F est contenu, *fermé et invariant* dans G, que H est contenu dans G et que $\mathrm{F} \cap \mathrm{H}$ est *plat* sur A. Soit alors $\mathrm{F} \overset{\tau}{\times}_{\mathrm{A}} \mathrm{H}$ le A-groupe qui a pour préschéma sous-jacent le produit $\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{H}$, la multiplication étant définie par le morphisme « $((x, l), (y, m)) \mapsto (xlyl^{-1}, lm)$ » ; de même, soit $u : \mathrm{H} \cap \mathrm{F} \to \mathrm{F} \overset{\tau}{\times}_{\mathrm{A}} \mathrm{H}$ le monomorphisme $x \mapsto (x^{-1}, x)$ et soit $\mathrm{F} \cdot \mathrm{H}$ le quotient $(\mathrm{F} \cap \mathrm{H})\backslash(\mathrm{F} \overset{\tau}{\times}_{\mathrm{A}} \mathrm{H})$. Dans ces conditions il existe un isomorphisme canonique

$$\mathrm{F}\backslash(\mathrm{F} \cdot \mathrm{H}) = (\mathrm{F} \cap \mathrm{H})\backslash\mathrm{H} \quad .$$

5.4. Soit $u : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ un homomorphisme *quasi-compact* de groupes *localement de type fini* et *plats* sur A ; supposons que le noyau de u soit également *plat* sur A. Dans ce cas, le groupe quotient $(\operatorname{Ker} u)\backslash\mathrm{F}$ existe d'après le théorème 3.2 et 5.2 ; de plus, d'après IV.5.2.6, u induit un *monomorphisme*

$$v : (\operatorname{Ker} u)\backslash\mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G} \quad ,$$

et $(\operatorname{Ker} u)\backslash\mathrm{F}$ est plat sur A d'après 3.2 (iv). D'autre part, $(\operatorname{Ker} u)\backslash\mathrm{F}$ s'identifie au *faisceau* (fpqc) quotient de $\widetilde{\mathrm{F}}$ par $\operatorname{Ker} \widetilde{u}$ (confer 5.2) ; il en résulte que $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ s'identifie à $((\operatorname{Ker} u)\backslash\mathrm{F})\backslash\mathrm{G}$, car le faisceau quotient $\widetilde{\mathrm{F}}\backslash\widetilde{\mathrm{G}}$ pour la topologie canonique s'identifie au faisceau quotient $((\mathrm{Ker}\,\widetilde{u})\backslash\widetilde{\mathrm{F}})\backslash\widetilde{\mathrm{G}}$. A fortiori v induit un isomorphisme de $(\mathrm{Ker}\,u)\backslash\mathrm{F}$ sur l'image réciproque dans G du point distingué de $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ (de sorte que v est une immersion fermée ; confer $\mathrm{VI_B}$). Lorsque F et G sont des A-groupes commutatifs, cette image réciproque est l'*image* de u dans la catégorie des A-groupes abéliens, alors que $(\mathrm{Ker}\,u)\backslash\mathrm{F}$ est la *coimage* de u. D'où :

Théorème. — *La catégorie des groupes commutatifs de type fini sur un corps est abélienne.*

En effet, lorsque A est un corps, $\mathrm{Ker}\,u$ est plat sur A quelque soit u.

5.5. Soit G un groupe *localement de type fini* et *plat* sur un anneau artinien local **316**
A. On sait que la composante connexe de l'origine G^0 est un sous-groupe invariant de G (2.3). Ce sous-groupe G^0 opère à gauche sur toutes les composantes connexes G^α de G de sorte que $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}$ est la somme directe des $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}^\alpha$. En particulier, la composante connexe de l'origine dans $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}$ n'est autre que $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}^0 \cong \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}$ et $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G} \to \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}$ est un isomorphisme local à l'origine ; par conséquent, $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}$ est non ramifié sur Spec A (cf. Exp. $\mathrm{VI_B}$, 2.7 [(28)]) ; comme $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}$ est également plat sur Spec A d'après le théorème 3.2 (iv), on voit que $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}$ *est un groupe étale sur* Spec A.

5.6. Soient maintenant k un corps *parfait* et G un groupe *localement de type fini* sur k. Nous avons vu (0.2) que $\mathrm{G_{réd}}$ est alors un sous-schéma en groupes de G. De plus, la classe d'équivalence de l'origine de G pour l'opération de $\mathrm{G_{réd}}$ à gauche sur G est tout l'espace sous-jacent à G. Il résulte donc du théorème 3.2 que le quotient $\mathrm{G_{réd}}\backslash\mathrm{G}$ est le spectre d'une k-algèbre finie et locale. [(29)]

Proposition. — *Soit* $u : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *un homomorphisme de groupes* localement de type fini *sur un corps* parfait k. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) u *est* plat.

(ii) $u^0 : \mathrm{F}^0 \to \mathrm{G}^0$ *est* dominant *et le morphisme* $v : \mathrm{F_{réd}}\backslash\mathrm{F} \to \mathrm{G_{réd}}\backslash\mathrm{G}$ *induit par* u *est* plat.

[(30)] Considérons en effet le diagramme commutatif suivant : **317**

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u"'] & \mathrm{F_{réd}}\backslash\mathrm{F} \arrow[d, "v"] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "q"] & \mathrm{G_{réd}}\backslash\mathrm{G} \end{tikzcd} \quad ,$$

où p et q désignent les projections canoniques. D'après 3.2 (iv), p et q sont fidèlement plats ; par conséquent, si u est plat, $qu = vp$ est plat, donc également v.

(28) N.D.E. : L'original renvoyait à $\mathrm{VI_A}$, § 3.3, paragraphe qui n'existe pas dans le Lecture Notes 151.
(29) N.D.E. : En effet, d'après 3.2, $\mathrm{G_{réd}}\backslash\mathrm{G}$ a un seul point et est un k-préschéma de type fini ; c'est donc le spectre d'une k-algèbre locale de dimension finie (cf. EGA I, 6.4.4).
(30) N.D.E. : On a détaillé la preuve de (ii) ⇒ (i), et l'on n'a gardé que la partie utile du diagramme ci-dessous.

Réciproquement, supposons v plat et u^0 dominant, et montrons que u est plat. Soit R la k-algèbre finie locale dont $\mathrm{G}_{\mathrm{réd}}\backslash\mathrm{G}$ est le spectre, et soit $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. Soient ν et η les points génériques de F^0 et G^0 ; puisque u^0 est dominant, $u(\nu) = \eta$. Comme G^0 et F^0 sont de type fini sur k (cf. 2.4), on a des homomorphismes locaux d'anneaux locaux *noethériens* :

$$(*) \qquad \mathrm{R} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{G},\eta} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{F},\nu} \quad .$$

Notons que

$$\mathscr{O}_{\mathrm{G},\eta}/\mathfrak{m}\mathscr{O}_{\mathrm{G},\eta} \cong \mathscr{O}_{\mathrm{G}_{\mathrm{réd}},\eta} = \kappa(\eta) \quad ,$$

de sorte que le morphisme d'anneaux

$$\frac{\mathscr{O}_{\mathrm{G},\eta}}{\mathfrak{m}\mathscr{O}_{\mathrm{G},\eta}} \longrightarrow \frac{\mathscr{O}_{\mathrm{F},\nu}}{\mathfrak{m}\mathscr{O}_{\mathrm{F},\nu}}$$

est plat. D'autre part, comme p, q et v sont plats, F et G sont plats sur R. Par conséquent, d'après SGA 1, IV.5.9, appliqué à $(*)$ et au module $\mathrm{M} = \mathscr{O}_{\mathrm{F},\nu}$, on obtient que $\mathscr{O}_{\mathrm{F},\nu}$ est plat sur $\mathscr{O}_{\mathrm{G},\eta}$, c.-à-d., u est plat au point générique ν de F^0. Donc, d'après $\mathrm{VI_B}$, 1.3, u est plat.

Bibliographie

(31)

[An73] S. Anantharaman, *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension* 1, Mém. Soc. Math. France **33** (1973), 5-79.

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[Ray67a] M. Raynaud, *Passage au quotient par une relation d'équivalence plate*, pp. 78-85 *in* : Proc. Conf. Local Fields (Driebergen) (éd. T. A. Springer), Springer-Verlag, 1967.

[Ray67b] M. Raynaud, *Sur le passage au quotient par un groupoïde plat*, C. R. Acad. Sci. Paris (Sér. A) **265** (1967), 384-387.

(31) N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé