EXPOSÉ $\mathrm{VII_B}$

ÉTUDE INFINITÉSIMALE DES SCHÉMAS EN GROUPES

par P. Gabriel

B) Groupes formels

L'étude des groupes formels est habituellement d'une simplicité extrême. Si cela n'apparaît pas clairement dans les pages qui suivent, la responsabilité en incombe à un arithméticien, qui prétend connaître des groupes formels sur « autre chose que des corps ». [1] Nous avons donc déroulé pour les groupes formels « localement libres sur des limites projectives d'anneaux artiniens » les généralités qu'on énonce d'habitude pour les groupes formels définis sur un corps. Pour une étude plus détaillée de ces derniers, nous renvoyons au séminaire de géométrie algébrique 1964/65 de Heidelberg-Strasbourg. [2] **476**

0. Rappels sur les anneaux et modules pseudocompacts

Ce paragraphe contient quelques préliminaires techniques ; nous y rappelons et complétons quelques résultats de [**CA**] (*Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France 90, 1962).

0.1. Un anneau *pseudocompact* à gauche est un anneau topologique avec élément unité, séparé et complet, qui possède une base de voisinages de 0 formée d'idéaux à **477**
gauche $\mathfrak{l}$ de colongueur finie (i.e. $\mathrm{long}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/\mathfrak{l}) < +\infty$). Nous allons supposer ici que A est commutatif, de sorte qu'il n'y a pas à distinguer « entre la gauche et la droite ».

---

(0) version 1.0 du 20 janvier 2010

(1) N.D.E. : L'intérêt des groupes formels sur un anneau local noethérien complet apparaît, par exemple, dans les travaux de Lubin et Tate (cf. [**LT65**]). L'étude des groupes formels sur une base arbitraire, et des questions de relèvement et de déformation, en particulier pour les groupes de Barsotti-Tate (« groupes p-divisibles ») a donné lieu a une abondante littérature, cf. par exemple [**LT66, Ta67, Gr74, Me72, La75, Fo77, Il85, Br00**] ; en particulier, les résultats du présent exposé sont en grande partie repris dans le chapitre I de [**Fo77**].

(2) N.D.E. : Les éditeurs ont seulement trouvé trace d'un tel séminaire daté 1965/66 et intitulé « Groupes algébriques linéaires », mais la notion de groupe formel n'y apparaît pas.

En particulier, les quotients $A/\mathfrak{l}$ sont des anneaux artiniens et A s'identifie à la limite projective topologique de ces anneaux qu'on munit de la topologie discrète.

Un anneau local noethérien complet $(A, \mathfrak{m})$ est évidemment pseudocompact [(3)].

0.1.1. — Tout idéal fermé I de A est l'intersection des idéaux ouverts qui le contiennent. [(4)] Tout idéal fermé maximal est donc ouvert. De plus, si $\mathfrak{l}$ est un idéal ouvert de A, les idéaux maximaux de $A/\mathfrak{l}$ correspondent biunivoquement aux idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ qui contiennent $\mathfrak{l}$; ces derniers sont donc ouverts et fermés. Par conséquent, tout idéal fermé maximal est un idéal maximal *ouvert* (et donc fermé) ; la réciproque étant évidente. On notera $\Upsilon(A)$ l'ensemble de ces idéaux.

Si $\mathfrak{l}$ est un idéal ouvert de A et si $\mathfrak{m} \in \Upsilon(A)$, le localisé $(A/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}}$ est donc un anneau local si $\mathfrak{m}$ contient $\mathfrak{l}$ et est nul sinon. Comme l'anneau $A/\mathfrak{l}$ est artinien, il est produit direct d'un nombre fini d'anneaux locaux, ce qu'on peut écrire

$$A/\mathfrak{l} \simeq \prod_{\mathfrak{m} \in \Upsilon(A)} (A/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}} .$$

On tire de là des isomorphismes « canoniques »

$$A \simeq \varprojlim_{\mathfrak{l}} (A/\mathfrak{l}) \simeq \varprojlim_{\mathfrak{l}} \prod_{\mathfrak{m}} (A/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}} \simeq \prod_{\mathfrak{m}} \varprojlim_{\mathfrak{l}} (A/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}} \simeq \prod_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}} ,$$

où l'on a posé :

$$A_{\mathfrak{m}} = \varprojlim_{\mathfrak{l}} (A/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}} .$$

Cette *composante locale* $A_{\mathfrak{m}}$ est une limite projective filtrante d'anneaux locaux artiniens, munis de la topologie discrète ; c'est donc un anneau local qui est pseudocompact pour la topologie de la limite projective. [(5)] 478

0.1.2. — Soit $\mathfrak{r}(A)$ l'intersection des idéaux maximaux ouverts de A, c'est-à-dire le produit cartésien des idéaux $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ lorsqu'on identifie A à $\prod_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}}$. Pour tout idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de A, l'image de $\mathfrak{r}(A)$ dans $A/\mathfrak{l}$ est contenue dans le radical de $A/\mathfrak{l}$. Une certaine puissance de cette image est donc nulle, de sorte que $\mathfrak{r}(A)^n$ est contenu dans $\mathfrak{l}$ lorsque n est assez grand. La suite des $\mathfrak{r}(A)^n$ tend donc vers 0.

Il en va de même de la suite des x^n, lorsque x appartient à $\mathfrak{r}(A)$. Autrement dit, tout élément de $\mathfrak{r}(A)$ est topologiquement nilpotent et la réciproque est claire. Il s'ensuit que la suite de terme général $1 + x + \cdots + x^n$ est convergente et converge vers $1/(1 - x)$ lorsque $x \in \mathfrak{r}(A)$. Cela montre que $\mathfrak{r}(A)$ est le radical de Jacobson de A, c.-à-d., l'intersection de *tous* les idéaux maximaux de A (cf. Bourbaki, *Algèbre*, Chap. 8, § 6, th. 1). [(6)]

---

(3)N.D.E. : (lorsqu'on le munit de la topologie $\mathfrak{m}$-adique)

(4)N.D.E. : En effet, si $x \notin I$, il existe un idéal ouvert $\mathfrak{l}$ tel que $(x + \mathfrak{l}) \cap I = \varnothing$, alors $I + \mathfrak{l}$ est un idéal ouvert ne contenant pas x. D'autre part, dans ce qui suit, on a explicité le fait que tout idéal « fermé maximal » est maximal et *ouvert*.

(5)N.D.E. : Cette topologie est a priori *moins fine* que la topologie $\mathfrak{m}$-adique sur $A_{\mathfrak{m}}$, cf. 0.1.2.

(6)N.D.E. : En effet, soit $x \in \mathfrak{r}(A)$; si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal ne contenant pas x, il existe $y \in A$ tel que $1 - xy \in \mathfrak{m}$, or $xy \in \mathfrak{r}(A)$ donc $1 - xy$ est inversible, d'où une contradiction. Notons la conséquence suivante : si $\Upsilon(A)$ est un ensemble *fini* $\{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r\}$, les $\mathfrak{m}_i$ sont *tous* les idéaux maximaux de A.

Remarques. — [7] a) Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier *ouvert* de A alors, comme $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ est artinien, $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal. Par conséquent, $\Upsilon(\mathrm{A})$ égale l'ensemble des idéaux *premiers ouverts* de A.

b) Chaque $\mathfrak{m}\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ est un *idéal de définition* de $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$, i.e. un idéal *ouvert* I tel que la suite des I^n tende vers 0 (cf. EGA 0_{I}, 7.1.2). Par conséquent, $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}\mathrm{A}_{\mathfrak{m}})$, muni de l'anneau topologique $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$, est un schéma *formel affine* au sens de EGA I, 10.1.2.

c) L'anneau topologique A est *admissible* au sens de EGA 0_{I}, 7.1.2, si et seulement si $\mathfrak{r}(\mathrm{A})$ est *ouvert* (donc un idéal de définition), et ceci a lieu si et seulement si $\Upsilon(\mathrm{A})$ est *fini*. Dans ce cas, le schéma formel affine $\mathrm{Spf}(\mathrm{A}) = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathfrak{r}(\mathrm{A}))$ (EGA I, 10.1.2) a $\Upsilon(\mathrm{A})$, muni de la topologie discrète, comme espace sous-jacent, et le faisceau structural a pour anneau de sections sur une partie E de $\Upsilon(\mathrm{A})$ le produit $\prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{E}} \mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$.

d) Soit A un anneau pseudocompact arbitraire. Dans 1.1, l'espace $\Upsilon(\mathrm{A})$ est muni de la topologie discrète et du faisceau d'anneaux dont l'anneau des sections sur toute partie E est $\prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{E}} \mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$. D'après b), tout point admet alors un voisinage ouvert qui est un schéma formel affine, donc ceci définit un *schéma formel* (EGA I, 10.4.2), qu'on notera $\mathrm{Spf}(\mathrm{A})$. (Pour que ce schéma formel soit affine, il faut qu'il soit quasi-compact, donc que $\Upsilon(\mathrm{A})$ soit fini, et en ce cas $\mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ coïncide avec la définition de EGA I, 10.1.2).

0.1.3. — Si A et B sont deux anneaux pseudocompacts, un *homomorphisme* de A dans B est, par définition, une application *continue* compatible avec l'addition, la multiplication et les éléments unité. Un tel homomorphisme envoie un élément topologiquement nilpotent de A sur un élément topologiquement nilpotent de B ; il applique donc le radical $\mathfrak{r}(\mathrm{A})$ de A dans le radical $\mathfrak{r}(\mathrm{B})$ de B.

0.2. Soit A un anneau pseudocompact (commutatif). Un A-*module pseudocompact* M est un A-module [8] topologique, séparé et complet, qui possède une base de voisinages de 0 formée de sous-modules M′ tels que M/M′ soit de longueur finie sur A.

Si M et N sont deux A-modules pseudocompacts, un *morphisme* de M dans N est par définition une application A-linéaire continue. On notera $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M},\mathrm{N})$ le groupe **479**
de ces morphismes.

Proposition 0.2.A. — [9] (i) *Les* A-*modules pseudocompacts forment une catégorie* abélienne*, qu'on notera* **PC**(A). (*En particulier, pour tout morphisme* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$*,* Im($f$) *est un sous-module complet, donc* fermé *dans* N).

(ii) *Les* A-*modules pseudocompacts de longueur finie* (*dont la topologie est donc discrète*) *forment un système de cogénérateurs de* **PC**(A).

---

(7) N.D.E. : On a ajouté ces remarques, afin de pouvoir comparer la définition du *spectre formel* Spf(A) donnée en 1.1, avec celles de EGA I, 10.1.2 et 10.4.2.

(8) N.D.E. : Tous les modules sont supposés unitaires, c.-à-d., tels que $1 \cdot m = m$ pour tout $m \in \mathrm{M}$.

(9) N.D.E. : On a mis en évidence les résultats de ce paragraphe dans la proposition qui suit, et l'on a indiqué ensuite les étapes de la démonstration, cf. [**CA**, IV, § 3] ou [**DG70**, V, § 2].

(iii) *Les produits infinis et limites projectives filtrantes sont exacts, c.-à-d.,* **PC**(A) *vérifie l'axiome* (AB5*). [10]

Pour la commodité du lecteur, indiquons brièvement les étapes de la démonstration. D'abord, on a le lemme suivant ([**CA**, IV, § 3, Lemme 1] ; pour la démonstration, voir [**BEns**], III, § 7.4, th. 1 et exemple 2) :

Lemme 0.2.B. — *Soient* B *un anneau,* I *un ensemble ordonné* filtrant, (M_i) *et* (N_i) *deux systèmes projectifs de* B*-modules à gauche, indexés par* I*. Soit* (s_i) *un morphisme de systèmes projectifs* $(\mathrm{M}_i) \to (\mathrm{N}_i)$*, tel que* s_i *soit surjectif et de noyau* artinien *pour tout* i*. Alors, l'application*

$$\varprojlim s_i : \varprojlim \mathrm{M}_i \longrightarrow \varprojlim \mathrm{N}_i$$

est surjective.

Corollaire 0.2.C **(**[**CA**, IV, § 3, Prop. 10 & 11]). — *Soient* M *un* A*-module pseudocompact,* (M_i) *une famille filtrante décroissante de sous-modules fermés de* M.

(i) *L'application canonique* $\mathrm{M} \to \varprojlim \mathrm{M}/\mathrm{M}_i$ *est* surjective *et a pour noyau* $\bigcap_i \mathrm{M}_i$.

(ii) *Pour tout sous-module fermé* N *de* M*, on a* $\mathrm{N} + \bigcap_i \mathrm{M}_i = \bigcap_i (\mathrm{N} + \mathrm{M}_i)$.

Démonstration. Soit (L_j) la famille filtrante décroissante des sous-modules ouverts de M. Comme les limites projectives sont exactes à gauche, on a le diagramme commutatif et exact ci-dessous, où p est un isomorphisme puisque M est complet :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{M} \arrow[r, "p", "\sim"'] \arrow[d, "g"] & \varprojlim_j \mathrm{M}/\mathrm{L}_j \arrow[d, "s"] \\
0 \arrow[r] & \varprojlim_{i,j} (\mathrm{M}_i + \mathrm{L}_j)/\mathrm{M}_i \arrow[r] & \varprojlim_i \mathrm{M}/\mathrm{M}_i \arrow[r, "r"] & \varprojlim_{i,j} \mathrm{M}/(\mathrm{M}_i + \mathrm{L}_j)
\end{tikzcd}$$

De plus, pour chaque j, la famille de sous-modules $(\mathrm{M}_i + \mathrm{L}_j)/\mathrm{L}_j$ admet un plus petit élément, puisque M/L_j est artinien, et donc chaque morphisme $s_j : \mathrm{M}/\mathrm{L}_j \to \varprojlim_i \mathrm{M}/(\mathrm{L}_j + \mathrm{M}_i)$ est surjectif. Alors, d'après le lemme précédent, le morphisme s est surjectif. Donc r est surjectif. D'autre part, on a les égalités

$$\varprojlim_{i,j} (\mathrm{M}_i + \mathrm{L}_j)/\mathrm{M}_i = \varprojlim_i \varprojlim_j (\mathrm{M}_i + \mathrm{L}_j)/\mathrm{M}_i = \varprojlim_i \mathrm{M}_i/\mathrm{M}_i = 0,$$

car M_i est fermé donc est l'intersection des $\mathrm{M}_i + \mathrm{L}_j$. Il en résulte que r est un isomorphisme et que g est surjectif. Enfin, le noyau de g est la limite projective des M_i, i.e. leur intersection. Ceci prouve le point (i).

Déduisons-en le point (ii). Comme N est un sous-module fermé (donc séparé et complet), c'est un module pseudocompact pour la topologie induite par celle de M. Donc, d'après (i), les morphismes f et g dans le diagramme commutatif et exact ci-dessous sont surjectifs :

[10] N.D.E. : cf. [**Gr57**] ; on peut aussi consulter, par exemple, [**Po73**, § 2.8] ou [**We95**, Append. A.4].

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{N} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathrm{M} \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \mathrm{M}/\mathrm{N} \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \varprojlim_i \mathrm{N}/(\mathrm{N}\cap \mathrm{M}_i) \arrow[r] & \varprojlim_i \mathrm{M}/\mathrm{M}_i \arrow[r] & \varprojlim_i \mathrm{M}/(\mathrm{N}+\mathrm{M}_i) &
\end{tikzcd}.$$

Alors, d'après le « lemme du serpent », la suite $0 \to \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} g \to \operatorname{Ker} h \to 0$ est exacte, et l'égalité $\mathrm{N} + \bigcap\limits_i \mathrm{M}_i = \bigcap\limits_i (\mathrm{N}+\mathrm{M}_i)$ en résulte.

On peut maintenant démontrer la proposition 0.2.A. Soit $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ un morphisme de A-modules pseudocompacts et soit (L_j) (resp. (N_i)) l'ensemble filtrant décroissant des sous-modules ouverts de M (resp. N). On munit $\mathrm{K} = \operatorname{Ker}(f)$ et M/K (resp. $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Coker}(f)$) de la topologie induite par celle de M (resp. N). Alors, K et $\operatorname{Im}(f)$ sont séparés, et K est un sous-module fermé de M, donc K est complet et M/K séparé. De plus, d'après 0.2.C (i), le morphisme $\mathrm{M}/\mathrm{K} \to \varprojlim_j \mathrm{M}/(\mathrm{K}+\mathrm{L}_j)$ est surjectif, donc un isomorphisme, i.e. M/K est pseudocompact.

Montrons que le morphisme continu bijectif $\mathrm{M}/\mathrm{K} \to \operatorname{Im}(f)$ est bicontinu. Identifiant M/K à $\operatorname{Im}(f)$, il s'agit de montrer que la topologie quotient $\mathcal{Q}$ est plus fine que la topologie $\mathcal{T}$ induite par celle de N. Soit $\mathrm{P} = (\mathrm{K}+\mathrm{L}_j)/\mathrm{K}$ un sous-module de M/K ouvert pour $\mathcal{Q}$. Comme $\mathrm{M}/(\mathrm{K}+\mathrm{L}_j)$ est artinien, la famille $\mathrm{N}_i + \mathrm{P}$ a un plus petit élément $\mathrm{N}_{i_0} + \mathrm{P}$. Comme les N_i sont ouverts, donc fermés, pour $\mathcal{T}$ donc aussi pour $\mathcal{Q}$, il résulte de 0.2.C (ii) que

$$\mathrm{N}_{i_0} + \mathrm{P} = \bigcap_i (\mathrm{N}_i + \mathrm{P}) = \mathrm{P} + \bigcap_i \mathrm{N}_i = \mathrm{P},$$

d'où $\mathrm{N}_{i_0} \subseteq \mathrm{P}$. Ceci montre que P est ouvert pour $\mathcal{T}$, et $\mathrm{M}/\mathrm{K} \to \operatorname{Im}(f)$ est donc un isomorphisme de modules pseudocompacts.

En particulier, $\operatorname{Im}(f)$ est complet pour $\mathcal{T}$, donc *fermé* dans N. Alors, d'après 0.2.C (i) à nouveau, le morphisme $\operatorname{Coker}(f) \to \varprojlim_i \mathrm{N}/(\operatorname{Im}(f)+\mathrm{N}_i)$ est un isomorphisme, i.e. $\operatorname{Coker}(f)$ est pseudocompact. Ceci prouve que $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ est une catégorie abélienne.

Les limites projectives arbitraires existent dans $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$: si (M_i) est un système projectif de modules pseudocompacts, la limite projective des M_i a pour module sous-jacent la limite projective des modules sous-jacents, pour topologie celle de la limite projective. Si l'on a une famille de suites exactes dans $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{K}_i \longrightarrow \mathrm{M}_i \longrightarrow \mathrm{Q}_i \longrightarrow 0$$

alors la suite $0 \to \prod_i \mathrm{K}_i \to \prod_i \mathrm{M}_i \to \prod_i \mathrm{Q}_i \to 0$ est exacte.

D'autre part, tout module pseudocompact M est un sous-module du produit $\prod_{\mathrm{L}} \mathrm{M}/\mathrm{L}$, où L parcourt les sous-modules ouverts de M, donc les objets de longueur finie forment un système de cogénérateurs de $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$. (De plus, tout objet de longueur n est isomorphe à un quotient A^n/L, où L est un sous-module ouvert de A^n de colongueur n ; ces quotients forment donc un *ensemble* de cogénérateurs.) Ceci prouve 0.2.A (ii).

Montrons enfin que l'exactitude des limites projectives filtrantes découle de 0.2.C. [11] Comme les limites projectives sont exactes à gauche, il suffit de montrer que si $f_i : \mathrm{M}_i \to \mathrm{N}_i$

[11] N.D.E. : Ceci est vrai, plus généralement, dans toute catégorie abélienne admettant des produits infinis, voir par exemple [**Po73**, Chap. 2, Th. 8.6] ou [**Mi65**, III, 1.2–1.9]. Dans le cas présent, les propriétés de la catégorie $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ permettent de donner une démonstration un peu plus simple.

est un système projectif filtrant de surjections, le morphisme

$$f : \mathrm{M} = \varprojlim \mathrm{M}_i \longrightarrow \mathrm{N} = \varprojlim \mathrm{N}_i$$

est surjectif. Notons L_i le noyau de $q_i : \mathrm{N} \to \mathrm{N}_i$; on a $\bigcap_i \mathrm{L}_i = 0$. D'après 0.2.C (i), l'application canonique $\mathrm{N} \to \varprojlim \mathrm{N}/\mathrm{L}_i$ est un isomorphisme. Donc, remplaçant N_i par N/L_i et M_i par $f_i^{-1}(\mathrm{N}/\mathrm{L}_i)$, on peut supposer que $q_i : \mathrm{N} \to \mathrm{N}_i$ est surjectif, pour tout i.

Soient N' un sous-module ouvert de N contenant $f(\mathrm{M})$ et ρ la projection $\mathrm{N} \to \mathrm{N}/\mathrm{N}'$. D'après 0.2.C (ii), on a $\mathrm{N}' = \bigcap_i (\mathrm{N}' + \mathrm{L}_i)$. Comme $\mathrm{S} = \mathrm{N}/\mathrm{N}'$ est artinien, on en déduit qu'il existe un indice i tel que $\mathrm{L}_i \subseteq \mathrm{N}'$; donc ρ se factorise par un morphisme $\rho_j : \mathrm{N}_j \to \mathrm{S}$, pour tout $j \geqslant i$. Soit M_i' le noyau de $\rho_i \circ f_i$. Notant p_ℓ et $p_{\ell j}$ les projections $\mathrm{M} \to \mathrm{M}_\ell$ et $\mathrm{M}_j \to \mathrm{M}_\ell$, pour $\ell \leqslant j$, on a, d'après le lemme qui suit :

$$p_i(\mathrm{M}) = \bigcap_{j \geqslant i} p_{ij}(\mathrm{M}_j). \tag{†}$$

Comme $p_i(\mathrm{M}) \subseteq \mathrm{M}_i'$ et $\mathrm{M}_i/\mathrm{M}_i'$ est artinien, on déduit de 0.2.C (ii) qu'il existe un indice j tel que $p_{ij}(\mathrm{M}_j) \subseteq \mathrm{M}_i'$. Alors $\rho_j \circ f_j = 0$, et comme f_j est surjectif, ceci entraîne $\rho = 0$, d'où $\mathrm{N}' = \mathrm{N}$. Ceci prouve que f est surjectif, modulo le lemme ci-dessous (cf. [**Po73**, Chap. 2, Lemma 8.8] ou [**Mi65**, III, Prop. 1.7] pour l'énoncé dual).

Lemme 0.2.D. — *Avec les notations précédentes, on a* $p_i(\mathrm{M}) = \bigcap_{j \geqslant i} p_{ij}(\mathrm{M}_j)$.

En effet, remplaçant I par $\{j \in \mathrm{I} \mid j \geqslant i\}$, on peut supposer que i est le plus petit élément de I. Soient Q le produit de I copies de M_i et $\delta : \mathrm{M}_i \to \mathrm{Q}$ l'application diagonale. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p_i"'] & \mathrm{P} = \prod_{\ell \in \mathrm{I}} p_{i\ell}(\mathrm{M}_\ell) \arrow[d, hook] \\ \mathrm{M}_i \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{Q} \end{tikzcd}$$

où π est le produit des $p_{i\ell} \circ p_\ell = p_i$. Pour tout $j \geqslant i$, soit $\mathrm{P}_j' = \prod_{\ell \not\leqslant j} p_{i\ell}(\mathrm{M}_\ell)$, identifié à un sous-module de P. Comme $p_{ij}(\mathrm{M}_j) = \bigcap_{i \leqslant \ell \leqslant j} p_{i\ell}(\mathrm{M}_\ell)$, on obtient que :

$$\bigcap_\ell p_{i\ell}(\mathrm{M}_\ell) = \delta^{-1}(\pi(\mathrm{P})) = \delta^{-1}(\pi(\mathrm{M}) + \mathrm{P}_j').$$

Compte-tenu de 0.2.C (ii) et de l'égalité $\bigcap_j \mathrm{P}_j' = 0$, on en déduit :

$$\bigcap_\ell p_{i\ell}(\mathrm{M}_\ell) = \delta^{-1}\left(\bigcap_j (\pi(\mathrm{M}) + \mathrm{P}_j')\right) = \delta^{-1}(\pi(\mathrm{M})) = p_i(\mathrm{M}).$$

Ceci prouve le lemme, et achève la démonstration de la proposition 0.2.A. C.Q.F.D.

(12) Soient (**Ab**) la catégorie des groupes abéliens et **LF**(A) la sous-catégorie pleine de **PC**(A) formée des objets *de longueur finie*. Pour tout objet M de **PC**(A), notons $\mathbf{h}_c^{\mathrm{M}}$ le foncteur :

$$\mathbf{LF}(\mathrm{A}) \longrightarrow (\mathbf{Ab}), \qquad \mathrm{N} \mapsto \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

(12) N.D.E. : On a inséré dans ce paragraphe la proposition 0.2.E et le corollaire 0.2.F, qui seront utiles en 0.2.2. (Dans l'original, ces résultats figuraient en 0.3).

D'après [**CA**], II, § 4, th. 1, lemme 4 et cor. 1, on a les résultats suivants. (13)

Proposition 0.2.E. — *Le foncteur* $\mathrm{M} \mapsto \mathbf{h}_c^{\mathrm{M}}$ *est une* anti-équivalence *de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ *sur la catégorie* $\mathbf{Lex}(\mathbf{LF}(\mathrm{A}), (\mathbf{Ab}))$ *des foncteurs exacts à gauche* $\mathbf{LF}(\mathrm{A}) \to (\mathbf{Ab})$.

Corollaire 0.2.F. — (i) *Un objet* P *de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ *est* projectif *si et seulement si le foncteur* $\mathbf{h}_c^{\mathrm{P}}$ *est exact* (*c.-à-d., si et seulement si le foncteur* $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{P}, -)$ *est exact sur* $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$).

(ii) *Soit* (M_i) *un système projectif filtrant* (14) *d'objets de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$. *Pour tout objet* $\mathrm{N} \in \mathbf{LF}(\mathrm{A})$, *on a un isomorphisme fonctoriel en* N :

$$\mathrm{Hom}_c(\varprojlim \mathrm{M}_i, \mathrm{N}) \cong \varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}_i, \mathrm{N}).$$

(iii) *Toute limite projective filtrante et tout produit* (14) *d'objets projectifs de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ *est un objet projectif de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$.

0.2.1. — Chaque composante locale $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ de A est un facteur direct de A, donc un objet projectif de $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ (A est manifestement projectif). De plus, $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ a $\mathrm{S}_{\mathfrak{m}} = \mathrm{A}_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ pour unique quotient simple, donc est indécomposable. D'autre part, tout objet simple de $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ est isomorphe à un unique $\mathrm{S}_{\mathfrak{m}}$. D'après [**CA**, IV, § 3, cor. 1 du th. 3] (15), on a donc :

Proposition. — (i) *Tout objet projectif de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ *est produit direct d'objets projectifs indécomposables, uniquement déterminés* (*à isomorphisme près*).

(ii) *Les objets projectifs indécomposables sont exactement les* $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$, *pour* $\mathfrak{m} \in \Upsilon(\mathrm{A})$.

Définition. — Un A-module pseudocompact M est dit *topologiquement libre* s'il est isomorphe au produit d'une famille (A_i) d'exemplaires de A.

Dans ce cas, une famille (m_i) d'éléments de M est appelée une *pseudobase* de M si les applications A-linéaires de A_i dans M qui envoient l'élément unité de A_i sur m_i se prolongent en un isomorphisme de $\prod_i \mathrm{A}_i$ sur M.

0.2.2. — (16) Si M est un A-module pseudocompact, on notera $\mathrm{M}^{\dagger}$ le A-module (sans topologie) $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}, \mathrm{A})$.

---

(13) N.D.E. : En effet, $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ a un ensemble de cogénérateurs artiniens, les limites projectives filtrantes y sont exactes, et $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$ est la sous-catégorie des objets artiniens. La catégorie duale $\mathbf{PC}(\mathrm{A})^0$ a donc un ensemble de générateurs noethériens, et les limites inductives filtrantes y sont exactes. D'après la démonstration de [**CA**, II, § 4, th. 1], le foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}, -)$ est une anti-équivalence de $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ sur $\mathbf{Lex}(\mathbf{LF}(\mathrm{A}), (\mathbf{Ab}))$. De même, lemme 4 et cor. 1 de *loc. cit.*énoncent des résultats « *duaux* » de ceux du corollaire 0.2.F. Pour une démonstration « directe », voir [**DG70**], V, § 2, th. 3.1, lemme 3.5, cor. 3.3 & 3.4.

(14) N.D.E. : Comme tout produit infini est une limite projective filtrante de produits finis, tout foncteur additif qui commute aux limites projectives filtrantes commute aussi aux produits infinis.

(15) N.D.E. : Ceci renvoie aux énoncés « duaux », établis dans *loc. cit.*, § 2, Th. 2 et § 1, Prop. 2 ; pour une démonstration « directe », voir [**DG70**], V, § 2, Th. 4.5 et Exemple 4.6 b).

(16) N.D.E. : On a détaillé les résultats de ce paragraphe, qui jouent un rôle important dans la suite (cf. 1.2.3, 1.3.5, 2.2.1, etc.)

Réciproquement, si N est un A-module, on note $N^* = \mathrm{Hom}_A(N, A)$ son dual, muni de la topologie de la convergence ponctuelle, c.-à-d., une base de voisinages de 0 dans N^* est formée par les sous-modules suivants, où $x \in N$ et $\mathfrak{l}$ est un idéal ouvert de A :

$$\mathscr{V}(x, \mathfrak{l}) = \{f \in N^* \mid f(x) \in \mathfrak{l}\}.$$

Ceci fait de N^* un A-module pseudocompact. Si A est artinien (auquel cas on peut prendre ci-dessus $\mathfrak{l} = 0$), on déduit de 0.2.F :

480 ***Proposition***. — *Lorsque* A *est* artinien*, les foncteurs*

$$P \mapsto P^{\dagger} \qquad et \qquad Q \mapsto Q^* ,$$

où P (*resp.* Q) *est un objet projectif de* $\mathbf{PC}(A)$ (*resp. un* A*-module projectif*)*, établissent une* anti-équivalence *entre la catégorie des* A*-modules pseudocompacts projectifs et celle des* A*-modules projectifs.* (17)

En particulier, *lorsque* A *est un corps* k, $P \mapsto P^{\dagger}$ est une anti-équivalence de la catégorie de tous les k-modules pseudocompacts (on parle aussi de *k-espaces vectoriels linéairement compacts*) sur celle des k-espaces vectoriels. (18)

0.3. (19) Soient L et M deux A-modules pseudocompacts. Le foncteur

$$\mathbf{LF}(A) \longrightarrow (\mathbf{Ab}), \qquad N \mapsto \mathrm{Bil}_c(L \times M, N),$$

où $\mathrm{Bil}_c(L \times M, N)$ désigne le groupe abélien des applications A-bilinéaires continues de $L \times M$ dans N, est exact à gauche.

D'après 0.2.E, il existe donc un A-module pseudocompact $L \mathbin{\widehat{\otimes}_A} M$, unique à isomorphisme unique près, qui représente ce foncteur, i.e. tel qu'on ait un isomorphisme fonctoriel, pour tout objet N de $\mathbf{LF}(A)$:

$$\mathrm{Hom}_c(L \mathbin{\widehat{\otimes}_A} M, N) \simeq \mathrm{Bil}_c(L \times M, N).$$

De plus, $L \mathbin{\widehat{\otimes}_A} M$ s'identifie à la limite projective $P = \widehat{L \otimes_A M}$ des A-modules (discrets) $(L/L') \otimes_A (M/M')$, où L' et M' parcourent respectivement les sous-modules ouverts de L et de M.

En effet, soit $\varphi : L \times M \to N$ une application bilinéaire continue de $L \times M$ dans un A-module (discret) de longueur finie N. D'après le lemme 0.3.1 ci-dessous, il existe des sous-modules ouverts L' et M' de L et M tels que $\varphi(L' \times M) = \varphi(L \times M') = \{0\}$.
481 Cela signifie que l'application $\overline{\varphi} : L \otimes_A M \to N$, qui est induite par φ, est de la forme $\varphi' \circ p$, où p est la projection canonique de $L \otimes_A M$ sur $(L/L') \otimes_A (M/M')$. Si l'on note $\widehat{\varphi}$ la composée :

$$P \longrightarrow (L/L') \otimes_A (M/M') \xrightarrow{\varphi'} N,$$

(17) N.D.E. : Rappelons d'autre part que, sur un anneau *artinien*, un module est projectif si, et seulement si, il est plat, voir par exemple $\mathrm{VI_B}$, N.D.E. (38) ou 0.3.7 plus loin.

(18) N.D.E. : On notera que la *somme directe dans* $\mathbf{PC}(k)$ d'une famille $(V_i)_{i \in I}$ de k-espaces vectoriels linéairement compacts est $(\prod_{i \in I} V_i^{\dagger})^*$.

(19) N.D.E. : On a modifié ce paragraphe, en tenant compte des ajouts faits en 0.2.

on voit que l'application $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ est une bijection fonctorielle de $\mathrm{Bil}_c(\mathrm{L}\times\mathrm{M},\mathrm{N})$ sur $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{P},\mathrm{N})$, d'où $\mathrm{P}\cong \mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}$.

Le module pseudocompact $\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}$ est donc le séparé complété de $\mathrm{L}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$, pour la topologie linéaire définie par les noyaux des projections canoniques de $\mathrm{L}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ sur $(\mathrm{L}/\mathrm{L}')\otimes_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}/\mathrm{M}')$, et on l'appellera le *produit tensoriel complété* de L et M.

Si x et y appartiennent à L et M, l'image de $x\otimes_{\mathrm{A}} y$ dans $\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}$ sera notée $x\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,y$.

0.3.1. Lemme. — *Soient* L, M *et* N *des* A*-modules pseudocompacts,* N *étant de longueur finie. Si* $\varphi:\mathrm{L}\times\mathrm{M}\to\mathrm{N}$ *est une application* A*-bilinéaire continue, il existe des sous-modules ouverts* L' *et* M' *de* L *et* M *tels que* $\varphi(\mathrm{L}'\times\mathrm{M})=\varphi(\mathrm{L}\times\mathrm{M}')=\{0\}$.

En effet, $\varphi^{-1}(0)$ est un voisinage ouvert de $(0,0)$, donc contient un ouvert de la forme $\mathrm{L}_1\times\mathrm{M}_1$, où L_1 et M_1 sont des sous-modules ouverts de L et M. Comme L/L_1 est de longueur finie, il existe des éléments $x_1,\dots,x_r$ de L tels que $\mathrm{L}_1+\mathrm{A}x_1+\cdots+\mathrm{A}x_r=\mathrm{L}$. Si $\mathrm{M}'\subseteq\mathrm{M}_1$ est « assez petit », on a aussi $\varphi(x_i,\mathrm{M}')=0$ pour tout i, parce que l'application $y\mapsto\varphi(x_i,y)$ est continue ; on tire de là $\varphi(\mathrm{L},\mathrm{M}')=\{0\}$; de même, $\varphi(\mathrm{L}',\mathrm{M})=\{0\}$ si L' est assez petit.

0.3.1.1. Remarque. — [20] Le produit tensoriel complété vérifie la condition usuelle d'associativité : si L, M, P sont des A-modules pseudocompacts, on a un isomorphisme canonique
$$(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{M})\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{P}\simeq\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}(\mathrm{M}\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{P});$$
en effet, ces deux objets représentent le foncteur qui associe à tout objet N de $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$ le groupe abélien des applications A-trilinéaires continues de $\mathrm{L}\times\mathrm{M}\times\mathrm{P}$ dans N.

0.3.2. — Soient $\mathrm{L}'\xrightarrow{f}\mathrm{L}\xrightarrow{g}\mathrm{L}''\to 0$ une suite exacte et M un objet de $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$. Il est clair que pour tout objet N de $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$, les suites induites :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Bil}_c(\mathrm{L}''\times\mathrm{M},\mathrm{N}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Bil}_c(\mathrm{L}\times\mathrm{M},\mathrm{N}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Bil}_c(\mathrm{L}'\times\mathrm{M},\mathrm{N}) \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}''\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M},\mathrm{N}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M},\mathrm{N}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}'\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M},\mathrm{N})
\end{tikzcd}$$

sont exactes. D'après 0.2.E, ceci équivaut à dire que la suite 482

$$(*)\qquad \mathrm{L}'\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}\xrightarrow{f\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{M}}\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\mathrm{M}\xrightarrow{g\,\widehat{\otimes}\mathrm{M}}\mathrm{L}''\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\mathrm{M}\to 0$$

est exacte. Donc :

Corollaire. — *Le foncteur produit tensoriel complété est exact à droite.*

Prenons en particulier pour L l'anneau A, pour f l'inclusion d'un idéal fermé $\mathfrak{a}$ dans A, pour g la projection canonique de A sur $\mathrm{A}/\mathfrak{a}$. On peut alors identifier $\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}$ à M au moyen de l'application $x\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,m\mapsto xm$. Comme l'image de $\mathfrak{a}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}$ est fermée dans M (cf. 0.2.A) et que l'image de $\mathfrak{a}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ est partout dense dans $\mathfrak{a}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}$, l'image

[20] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

de $f \widehat{\otimes}_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ n'est autre que l'adhérence $\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}}$ de $\mathfrak{a}\mathrm{M}$ dans M. La suite $(*)$ entraîne donc l'isomorphisme :

$$(\mathrm{A}/\mathfrak{a}) \widehat{\otimes}_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}/\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}}.$$

0.3.3. Lemme de Nakayama. — *Soient* A *un anneau pseudocompact,* M *un* A*-module pseudocompact et* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* A *contenu dans le radical* $\mathfrak{r}(\mathrm{A})$*. L'égalité* $\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}} = \mathrm{M}$ *entraîne alors* $\mathrm{M} = 0$*.*

En effet, supposons $\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}} = \mathrm{M}$. [21] Soient M' un sous-module ouvert de M et M'' le quotient M/M'. Comme M'' est discret, $\mathfrak{a}\mathrm{M}''$ est fermé dans M'', donc égal à $\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}''}$. D'après 0.3.2, l'application canonique de $\mathrm{M}/\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}}$ dans $\mathrm{M}''/\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}''}$ est surjective, de sorte qu'on a $\mathfrak{a}\mathrm{M}'' = \overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}''} = \mathrm{M}''$. Puisque M'' est un A-module de type fini et $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}(\mathrm{A})$, ceci entraîne $\mathrm{M}'' = 0$, d'après le lemme de Nakayama usuel. Par conséquent, tout sous-module ouvert M' de M est égal à M, donc M est nul [22].

483 ***0.3.4***. — On tire du lemme de Nakayama les conséquences habituelles :

Corollaire. — *Soient* $\mathfrak{a}$ *un idéal fermé contenu dans* $\mathfrak{r}(\mathrm{A})$ *et* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *un morphisme de* A*-modules pseudocompacts.*

(i) *f est surjectif si l'application induite* $f' : \mathrm{M}/\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}} \to \mathrm{N}/\overline{\mathfrak{a}\mathrm{N}}$ *l'est.*

(ii) *Si* N *est projectif, f est inversible si f' l'est.*

En effet, (i) résulte du lemme 0.3.3 appliqué à $\operatorname{Coker} f$. Pour (ii), supposons f' inversible. Alors, d'après (i), f est surjectif, donc possède une section ; on applique alors 0.3.3 à $\operatorname{Ker} f$.

Lorsque A est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, on peut aussi déduire de 0.3.3 le *théorème d'échange* qui suit :

Théorème. — *Si* M *est un* A*-module topologiquement libre de pseudobase* $(m_i)_{i\in\mathrm{I}}$ (0.2.1) *et* N *un facteur direct* (*fermé*) *de* M*, il existe une pseudobase de* M *formée d'éléments de* N *et de certains* m_i*.*

En effet, cela est clair lorsque A est un corps (se servir alors de la dualité de 0.2.2 et appliquer le théorème d'échange habituel) ; par conséquent, $\mathrm{N}/\mathfrak{m}\mathrm{N}$ a pour supplémentaire un module topologiquement libre sur $\mathrm{A}/\mathfrak{m}$ de pseudobase $(\overline{m}_i)_{i\in\mathrm{J}}$, où $\overline{m}_i$ est l'image de m_i dans $\mathrm{M}/\mathfrak{m}\mathrm{M}$ et J une partie de I. Si P désigne le produit direct $\prod_{i\in\mathrm{J}} \mathrm{A}m_i$, l'application canonique de $\mathrm{N}\oplus\mathrm{P}$ dans M est « bijective modulo $\mathfrak{m}$ » ; elle est donc bijective d'après ce qui précède (pour une autre preuve voir [**CA**, IV, § 2, prop. 8]).

0.3.5. — Considérons maintenant trois A-modules pseudocompacts L, M et N, où N est de longueur finie. Munissant le A-module $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M},\mathrm{N})$ de la topologie discrète, tout élément ψ de $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}, \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M},\mathrm{N}))$ définit une application bilinéaire continue
484 $\psi' : (\ell, m) \mapsto \psi(\ell)(m)$ de $\mathrm{L}\times\mathrm{M}$ dans N. On obtient ainsi un isomorphisme naturel

[21] N.D.E. : Quitte à remplacer $\mathfrak{a}$ par son adhérence, on peut supposer $\mathfrak{a}$ *fermé*.
[22] N.D.E. : puisqu'égal à la limite projective des $\mathrm{M}/\mathrm{M}' = 0$.

$$\mathrm{Hom}_c(\mathrm{L},\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M},\mathrm{N})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\mathrm{M},\mathrm{N}), \tag{1}$$

donc une autre caractérisation de $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M},\mathrm{N})$, qu'on va utiliser lorsque M est la limite projective d'un système projectif filtrant de A-modules pseudocompacts M_i. Alors, d'après (1) et 0.2.F (ii), on a des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\varprojlim \mathrm{M}_i,\mathrm{N}) &\simeq \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L},\mathrm{Hom}_c(\varprojlim \mathrm{M}_i,\mathrm{N}))\\ &\simeq \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L},\varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}_i,\mathrm{N})).\end{aligned} \tag{2}$$

De plus, comme le module $\varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}_i,\mathrm{N})$ est discret, toute application continue de source L se factorise par un quotient de longueur finie de L. Par conséquent, l'application naturelle ci-dessous est un isomorphisme :

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L},\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}_i,\mathrm{N})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L},\varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}_i,\mathrm{N})). \tag{3}$$

Enfin, d'après (1) et 0.2.F (ii) à nouveau, on a des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned}\varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L},\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}_i,\mathrm{N})) &\simeq \varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}_i,\mathrm{N})\\ &\simeq \mathrm{Hom}_c(\varprojlim(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}_i),\mathrm{N}).\end{aligned} \tag{4}$$

Combinant les isomorphismes (2), (3), (4), on obtient :

Proposition. — *Soit* (M_i) *un système projectif filtrant d'objets de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$*, et soit* L (*resp.* N) *un objet de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ (*resp.* $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$)*. On a un isomorphisme fonctoriel en* N *:*

$$\mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\varprojlim \mathrm{M}_i,\mathrm{N}) \simeq \mathrm{Hom}_c(\varprojlim(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}_i),\mathrm{N}),$$

et donc un isomorphisme :

$$\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\varprojlim \mathrm{M}_i \simeq \varprojlim(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}_i).$$

D'où : le produit tensoriel complété commute aux limites projectives filtrantes*.*

0.3.6. — En particulier, [23] *le produit tensoriel complété commute aux produits infinis.* Par exemple, comme l'anneau A est le produit de ses composantes locales $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ (0.1.1), tout A-module pseudocompact M ($\simeq \mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}$) s'identifie au produit des modules $\mathrm{M}_{\mathfrak{m}} = \mathrm{A}_{\mathfrak{m}}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}$ (les *composantes locales* de M).

De même, soient M et N deux A-modules pseudocompacts. On rappelle (cf. 0.2.2) que $\mathrm{M}^\dagger$ désigne $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M},\mathrm{A})$. Considérons l'application

$$\varphi : \ \mathrm{M}^\dagger \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}^\dagger \longrightarrow (\mathrm{M}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{N})^\dagger$$

qui associe à un élément $f \otimes g$ de $\mathrm{M}^\dagger \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}^\dagger$ l'application $m\,\widehat{\otimes}\,n \mapsto f(m)g(n)$ de $\mathrm{M}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{N}$ dans A. Cette application φ est bijective lorsque M est isomorphe à A.

Corollaire. — *Lorsque* A *est* artinien*,* φ *est un isomorphisme chaque fois que* M *est topologiquement libre* (*ou plus généralement projectif*)*.*

En effet, pour N fixé, le foncteur $\mathrm{M} \mapsto (\mathrm{M}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{N})^\dagger$ (resp. $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^\dagger \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}^\dagger$) transforme tout produit direct en somme directe, d'après ce qui précède et 0.2.F.

[23] N.D.E. : cf. N.D.E. (14).

Remarque 0.3.6.A. — [24] En utilisant 0.2.F de façon similaire, on obtient aussi le résultat suivant : *Soient* A *un anneau pseudocompact,* M, Q *des objets de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$, *et* N *un objet de* $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$. *On suppose* Q projectif *; alors on a des isomorphismes naturels :*

$$\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M},\mathrm{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Q}^\dagger,\mathrm{M}^\dagger), \qquad \mathrm{Q}^\dagger\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{N} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_c(\mathrm{Q},\mathrm{N}).$$

0.3.7. — Pour tout $\mathfrak{m}\in\Upsilon(\mathrm{A})$, le foncteur $\mathrm{M}\mapsto \mathrm{A}_{\mathfrak{m}}\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ est évidemment exact.
485 Comme tout A-module pseudocompact projectif P est un produit de modules de la forme $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$, il en résulte que le foncteur $\mathrm{M}\mapsto \mathrm{P}\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ est exact lorsque P est projectif. La réciproque est vraie :

Proposition. — *Soient* A *un anneau pseudocompact,* P *un* A*-module pseudocompact. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) P *est un objet projectif de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$.

(ii) *Chaque composante locale* $\mathrm{P}_{\mathfrak{m}}$ *est un* $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$*-module topologiquement libre.*

(iii) *Le foncteur* $\mathrm{M}\mapsto \mathrm{P}\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ *est exact.*

En effet, l'équivalence de (i) et (ii) résulte de 0.2.F (iii) et 0.2.1, et l'on vient de voir que (ii) ⇒ (iii). Supposons le foncteur $\mathrm{M}\mapsto \mathrm{P}\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ exact. Comme $\mathrm{P}\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ est le produit de ses composantes locales :

$$(\mathrm{P}\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\mathrm{M})_{\mathfrak{m}} \simeq \mathrm{P}_{\mathfrak{m}}\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}}\mathrm{M}_{\mathfrak{m}}\,,$$

on est ramené au cas où l'anneau A est local. On va prouver alors que P est *topologiquement libre.*

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A ; alors $\mathrm{P}/\overline{\mathfrak{m}\mathrm{P}}$ est un espace vectoriel linéairement compact sur $\mathrm{A}/\mathfrak{m}$, donc un produit d'exemplaires de $\mathrm{A}/\mathfrak{m}$. Il y a donc une famille $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'exemplaires de A et un isomorphisme $\varphi:\prod_{i\in\mathrm{I}}(\mathrm{A}_i/\mathfrak{m})\xrightarrow{\sim}\mathrm{P}/\overline{\mathfrak{m}\mathrm{P}}$. Comme $\prod_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i$ est projectif, il y a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{P} \arrow[d, "q"] \\
\prod_{i\in\mathrm{I}}(\mathrm{A}_i/\mathfrak{m}) \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] & \mathrm{P}/\overline{\mathfrak{m}\mathrm{P}}
\end{tikzcd}$$

où p et q désignent les projections canoniques. Appliquant le lemme de Nakayama à $\mathrm{Coker}\,\psi$ et notant que $(\mathrm{A}/\mathfrak{m})\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\psi$ n'est autre que φ, on voit que ψ est surjectif.

Posant alors $\mathrm{B}=\prod_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i$ et $\mathrm{N}=\mathrm{Ker}\,\psi$, on a le diagramme commutatif et exact qui suit.

486 Le « lemme du serpent » appliqué aux deux premières lignes montre alors que, dans la ligne du bas, le morphisme $(\mathrm{A}/\mathfrak{m})\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\mathrm{N}\to(\mathrm{A}/\mathfrak{m})\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ est un monomorphisme.

[24] N.D.E. : On a ajouté cette remarque, qui sera utile en 2.3.1.

Mais alors, comme φ est un isomorphisme, $(\mathrm{A}/\mathfrak{m})\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{N}$ est nul ; d'où $\mathrm{N} = 0$ (0.3.3) et ψ un isomorphisme. [25]

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, rounded corners] & \\
 & \mathfrak{m}\underset{\mathrm{A}}{\widehat{\otimes}}\mathrm{N} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{m}\underset{\mathrm{A}}{\widehat{\otimes}}\mathrm{B} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{m}\underset{\mathrm{A}}{\widehat{\otimes}}\mathrm{P} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{A}\underset{\mathrm{A}}{\widehat{\otimes}}\mathrm{N} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{A}\underset{\mathrm{A}}{\widehat{\otimes}}\mathrm{B} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & \mathrm{A}\underset{\mathrm{A}}{\widehat{\otimes}}\mathrm{P} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & (\mathrm{A}/\mathfrak{m})\underset{\mathrm{A}}{\widehat{\otimes}}\mathrm{N} \arrow[r] & (\mathrm{A}/\mathfrak{m})\underset{\mathrm{A}}{\widehat{\otimes}}\mathrm{B} \arrow[r, "\varphi"] & (\mathrm{A}/\mathfrak{m})\underset{\mathrm{A}}{\widehat{\otimes}}\mathrm{P} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}\quad.$$

0.3.8. Corollaire. — *Soient* A *un anneau local, noethérien, complet et* P *un* A-*module pseudocompact. Alors* P *est topologiquement libre si et seulement si* P *est plat sur* A.

En effet, l'application canonique de $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{P}$ dans $\mathrm{M}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{P}$ est bijective lorsque M est égal à A, donc lorsque M est noethérien (prendre une présentation finie de M et utiliser l'exactitude à droite du produit tensoriel et du produit tensoriel complété). Or P est plat si et seulement si le foncteur $\mathrm{M}\mapsto\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{P}$ est exact quand M parcourt les modules noethériens. De même, on a vu dans la démonstration de la proposition 0.3.7 que P est topologiquement libre si la suite

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{P} \longrightarrow (\mathrm{A}/\mathfrak{m})\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{P} \longrightarrow 0$$

est exacte. Donc P est topologiquement libre si et seulement si le foncteur $\mathrm{M}\mapsto\mathrm{M}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{P}$ est exact quand M parcourt les modules noethériens. Le corollaire résulte 487
donc de l'égalité $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{P} = \mathrm{M}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{P}$ ci-dessus.

0.4. Soit k un anneau pseudocompact ; une k-algèbre topologique est un anneau topologique A (avec élément unité et commutatif), muni d'un morphisme d'anneaux topologiques $k\to\mathrm{A}$. On dit que A est une k-algèbre *profinie* si le k-module topologique sous-jacent est pseudocompact.

Dans ce cas, soit $\mathfrak{l}$ un k-sous-module ouvert de A. L'application composée

$$\varphi:\ \mathrm{A}\times\mathrm{A}\xrightarrow{\text{mult.}}\mathrm{A}\xrightarrow{\text{can.}}\mathrm{A}/\mathfrak{l}$$

est continue, donc, d'après le lemme 0.3.1, il existe un k-sous-module ouvert $\mathfrak{n}$ de A tel que $\varphi(\mathrm{A}\times\mathfrak{n}) = 0$. Cela signifie que $\mathfrak{l}$ contient l'idéal ouvert $\mathrm{A}\mathfrak{n}$ et entraîne que A est *un anneau pseudocompact.*

[25] N.D.E. : Une démonstration tout-à-fait analogue, utilisant le « lemme de Nakayama nilpotent », montre que si A est *artinien* et P un A-module plat, chaque composante locale de P est un A-module libre (cf. [**BAC**, II, § 3.2, cor. 2 de la prop. 5]).

De même, soit M un A-module topologique dont le k-module sous-jacent est pseudocompact. Si M′ est un k-sous-module ouvert de M, le lemme 0.3.1 appliqué à l'application

$$\mathrm{A} \times \mathrm{M} \xrightarrow{\text{mult.}} \mathrm{M} \xrightarrow{\text{can.}} \mathrm{M}/\mathrm{M}'$$

montre que M′ contient un A-sous-module ouvert, donc que M est aussi un A-*module pseudocompact.* [26] Réciproquement :

Lemme. — *Soient* A *une k-algèbre profinie et* M *un* A*-module pseudocompact. Alors, le k-module* $\mathrm{M}_{|k}$ *obtenu par restriction des scalaires est pseudocompact.*

En effet, tout A-module pseudocompact de longueur finie est isomorphe à un quotient A^n/L (où L est un sous-module ouvert de A^n), donc est un k-module pseudocompact. Comme $\mathrm{M}_{|k}$ est une limite projective de tels modules, c'est un k-module pseudocompact.

0.4.1. — Si A et B sont deux k-algèbres profinies, un *morphisme* de A dans B est, par définition, un homomorphisme continu de k-algèbres. On notera $\mathbf{Alp}_{/k}$ la catégorie des k-algèbres profinies.

Elle possède évidemment des limites projectives : l'algèbre sous-jacente à une limite
488 projective est la limite projective des algèbres sous-jacentes ; la topologie est celle de la limite projective.

Elle possède aussi des *limites inductives finies* [27] : par exemple, si $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ et $g : \mathrm{A} \to \mathrm{C}$ sont deux morphismes de k-algèbres profinies, la somme amalgamée de B et C sous A a $\mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}} \mathrm{C}$ pour A-module topologique sous-jacent (d'après 0.4, f et g munissent B et C de structures de A-module pseudocompact) ; la multiplication de $\mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}} \mathrm{C}$ est évidemment telle que $(b \mathbin{\widehat{\otimes}} c)(b' \mathbin{\widehat{\otimes}} c') = (bb') \mathbin{\widehat{\otimes}} (cc')$ si $b, b' \in \mathrm{B}$ et $c, c' \in \mathrm{C}$.

0.4.2. Définition. — Une k-algèbre profinie C sera dite de *longueur finie* si le k-module sous-jacent est de longueur finie (donc discret) ; nous noterons $\mathbf{Alf}_{/k}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Alp}_{/k}$ formée des k-algèbres de longueur finie. [28]

Pour toute k-algèbre profinie A, on notera $\mathbf{h}^{\mathrm{A}}$ le foncteur :

$$\mathbf{Alf}_{/k} \longrightarrow (\mathbf{Ens}), \qquad \mathrm{C} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(\mathrm{A}, \mathrm{C}).$$

Il est clair que $\mathbf{h}^{\mathrm{A}}$ est un foncteur exact à gauche [29]. De plus, les projections canoniques $\mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathfrak{I}$ (où $\mathfrak{I}$ parcourt les idéaux ouverts de A), induisent, pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$ un isomorphisme canonique

$$\varinjlim_{\mathfrak{I}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alf}_{/k}}(\mathrm{A}/\mathfrak{I}, \mathrm{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(\mathrm{A}, \mathrm{C}),$$

[26] N.D.E. : On a ajouté le lemme qui suit, cf. la N.D.E. (33) dans la proposition 0.5.
[27] N.D.E. : On verra en 0.4.2 qu'elle possède des limites inductives arbitraires.
[28] N.D.E. : Attention, k n'est un objet de $\mathbf{Alf}_{/k}$ que si k est artinien, cf. 1.2.2 plus loin.
[29] N.D.E. : c.-à-d., qui commute aux limites projectives finies.

fonctoriel en C. Cela signifie que $\mathbf{h}^{\mathrm{A}}$ est la limite inductive des foncteurs représentables $\mathbf{h}^{\mathrm{A}/\mathfrak{I}}$, c.-à-d.,

$$(*)\qquad \mathbf{h}^{\mathrm{A}} \simeq \varinjlim_{\mathfrak{I}} \mathbf{h}^{\mathrm{A}/\mathfrak{I}}\,.$$

Si B est une autre k-algèbre profinie, les propriétés générales du bifoncteur Hom et l'isomorphisme $\mathrm{Hom}(\mathbf{h}^{\mathrm{C}}, \mathbf{h}^{\mathrm{B}}) = \mathbf{h}^{\mathrm{B}}(\mathrm{C})$ pour C de longueur finie, donnent des isomorphismes :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(\mathrm{B}, \mathrm{A}) &\simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(\mathrm{B}, \mathrm{A}/\mathfrak{I})\\ &\simeq \varprojlim \mathrm{Hom}(\mathbf{h}^{\mathrm{A}/\mathfrak{I}}, \mathbf{h}^{\mathrm{B}})\\ &\simeq \mathrm{Hom}(\varinjlim_{\mathfrak{I}} \mathbf{h}^{\mathrm{A}/\mathfrak{I}}, \mathbf{h}^{\mathrm{B}})\,;\end{aligned}$$

combiné avec $(*)$ ceci montre que le foncteur contravariant $\mathrm{A} \mapsto \mathbf{h}^{\mathrm{A}}$ est *pleinement* **489**
fidèle. En fait :

Proposition. — *Le foncteur* $\mathrm{A} \mapsto \mathbf{h}^{\mathrm{A}}$ *est une* anti-équivalence *de* $\mathbf{Alp}_{/k}$ *sur la catégorie des foncteurs exacts à gauche de* $\mathbf{Alf}_{/k}$ *dans* $(\mathbf{Ens})$.

Il suffit en effet, d'après ce qui précède, de montrer que tout foncteur exact à gauche $\mathbf{F} : \mathbf{Alf}_{/k} \to (\mathbf{Ens})$ est isomorphe à un foncteur du type $\mathbf{h}^{\mathrm{A}}$; pour cela, on peut construire A comme suit (cf. TDTE II, § 3).

Comme $\mathbf{F}$ est exact à gauche, il y a, pour toute k-algèbre de longueur finie C et pour tout élément ξ de $\mathbf{F}(\mathrm{C})$, une plus petite sous-algèbre C' de C telle que ξ appartienne à l'image de $\mathbf{F}(\mathrm{C}')$ dans $\mathbf{F}(\mathrm{C})$. Si l'on a $\mathrm{C}' = \mathrm{C}$, on dit que le couple (C, ξ) est *minimal.*

Les couples minimaux forment une catégorie si l'on prend pour morphismes de (C, ξ) dans (D, η) les homomorphismes φ de C dans D tels que $(\mathbf{F}\varphi)(\xi) = \eta$; il est clair qu'un tel φ est une surjection et que la catégorie des couples minimaux est « filtrante à gauche ». De plus, on peut se restreindre aux couples (C, ξ) tels que C appartienne à un ensemble contenant des k-algèbres de longueur finie de chaque type d'isomorphisme [(30)]. Donc, le foncteur $(\mathrm{C}, \xi) \mapsto \mathrm{C}$, qui a pour catégorie de départ celle des couples minimaux et pour catégorie d'arrivée celle des k-algèbres profinies, possède une limite projective ; on prend pour A cette limite projective.

Corollaire. — *La catégorie* $\mathbf{Alp}_{/k}$ *possède des limites inductives infinies.*

En effet, la catégorie des foncteurs exacts à gauche de $\mathbf{Alf}_{/k}$ vers $(\mathbf{Ens})$ possède des limites projectives, qui sont définies « argument par argument », c.-à-d., si $(\mathbf{F}_i)$ est un système projectif de tels foncteurs, on a, pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$:

$$(\varprojlim \mathbf{F}_i)(\mathrm{C}) = \varprojlim \mathbf{F}_i(\mathrm{C})\,. \qquad {}^{(31)}$$

[(30)] N.D.E. : En effet, tout k-module discret de longueur n est isomorphe à k^n/L, où L est un sous-module ouvert de k^n de colongueur n. Ensuite, on peut considérer *l'ensemble* des (classes d'isomorphisme de) structures de k-algèbre profinie sur chaque tel module.

[(31)] N.D.E. : Si $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est un système inductif de $\mathbf{Alp}_{/k}$, sa limite inductive dans $\mathbf{Alp}_{/k}$ est le séparé complété de la k-algèbre B, limite inductive des k-algèbres sous-jacentes, pour la topologie définie par les idéaux I tels que $\mathrm{I} \cap \mathrm{A}_i$ soit un idéal ouvert de A_i pour tout i, et $\mathrm{long}_k(\mathrm{B}/\mathrm{I}) < \infty$.

490 **0.5.** [32] Soit $\varphi : k \to \ell$ un homomorphisme d'anneaux pseudocompacts (cf. 0.1.3). On peut généraliser la construction de 0.3 comme suit.

Définition. — Pour tout k-module pseudocompact M, nous noterons $\mathrm{M}\,\widehat{\otimes}_k^{\ell}\,\ell$ (ou simplement $\mathrm{M}\,\widehat{\otimes}_k\,\ell$ si aucune confusion n'en résulte), le séparé complété de $\mathrm{M}\otimes_k \ell$ pour la topologie linéaire définie par les noyaux des projections :

$$\mathrm{M}\otimes_k \ell \longrightarrow (\mathrm{M}/\mathrm{M}')\otimes_k (\ell/\ell')\,,$$

où M' est un sous-module ouvert de M et ℓ' un idéal ouvert de ℓ. Alors, $\mathrm{M}\,\widehat{\otimes}_k^{\ell}\,\ell$ est un ℓ-module pseudocompact.

Si $m \in \mathrm{M}$ et $x \in \ell$, nous notons $m\,\widehat{\otimes}_k\,x$ l'image canonique de $m\otimes_k x$ dans $\mathrm{M}\,\widehat{\otimes}_k\,\ell$.

Remarque. — Si ℓ une k-algèbre profinie alors, d'après 0.4, tout sous-k-module ouvert de ℓ contient un idéal ouvert de ℓ ; par conséquent, $\mathrm{M}\,\widehat{\otimes}_k^{\ell}\,\ell$ coïncide avec le produit tensoriel complété (cf. 0.3) $\mathrm{M}\,\widehat{\otimes}_k\,\ell$ des k-modules pseudocompacts M et ℓ. On pourra donc utiliser sans ambiguïté, pour ℓ arbitraire, la notation $\mathrm{M}\,\widehat{\otimes}_k\,\ell$.

Si N est un ℓ-module pseudocompact, le k-module $\mathrm{N}_{|k}$ obtenu par restriction des scalaires est un k-module topologique, i.e. l'application $k\times\mathrm{N}\to\mathrm{N}$, $(t,n)\mapsto\varphi(t)n$ est continue. On notera $\mathrm{Hom}_k^c(\mathrm{M},\mathrm{N}_{|k})$ le groupe abélien des homomorphismes continus de k-modules de M dans $\mathrm{N}_{|k}$.

Proposition. — *Pour tout objet* N *de* $\mathbf{PC}(\ell)$*, on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{PC}(\ell)}(\mathrm{M}\,\widehat{\otimes}_k\,\ell,\mathrm{N}) \simeq \mathrm{Hom}_k^c(\mathrm{M},\mathrm{N}_{|k}).\qquad ^{(33)}$$

En effet, soit ϕ un homomorphisme continu $\mathrm{M}\to\mathrm{N}_{|k}$, alors l'application ϕ' : $\mathrm{M}\times\ell\to\mathrm{N}$, $(m,\lambda)\mapsto\lambda\phi(m)$ est continue et « bilinéaire » (c.-à-d., k-linéaire en le premier facteur et ℓ-linéaire en le second). Si N' un sous-ℓ-module ouvert de N, on montre comme dans le lemme 0.3.1 qu'il existe un sous-module ouvert M' de M et un idéal ouvert ℓ' de ℓ tels que $\phi'(\mathrm{M}'\times\ell)=0=\phi'(\mathrm{M}\times\ell')$. Il en résulte que ϕ induit un homomorphisme continu de ℓ-modules $\Phi : \mathrm{M}\,\widehat{\otimes}_k\,\ell\to\mathrm{N}$, tel que $\Phi(m\,\widehat{\otimes}\,\lambda)=\lambda\phi(m)$, pour tout $m\in\mathrm{M}$ et $\lambda\in\ell$.

Réciproquement, on associe à tout morphisme $f : \mathrm{M}\,\widehat{\otimes}_k\,\ell\to\mathrm{N}$ le morphisme $f' : m\mapsto f(m\,\widehat{\otimes}_k\,1)$ de M dans $\mathrm{N}_{|k}$.

On obtient alors, comme en 0.3.2, 0.3.5 et 0.3.1.1, le :

Corollaire. — *Le foncteur* $\mathbf{PC}(k)\to\mathbf{PC}(\ell)$, $\mathrm{M}\mapsto\mathrm{M}\,\widehat{\otimes}_k^{\ell}\,\ell$ *est exact à droite, et commute aux limites projectives filtrantes, c.-à-d., si* (M_i) *est un système projectif filtrant d'objets de* $\mathbf{PC}(k)$*, on a un isomorphisme canonique :*

$$(\varprojlim \mathrm{M}_i)\,\widehat{\otimes}_k^{\ell}\,\ell \simeq \varprojlim(\mathrm{M}_i\,\widehat{\otimes}_k^{\ell}\,\ell).$$

[32] N.D.E. : On a détaillé ce paragraphe.

[33] N.D.E. : Par conséquent, si ℓ est une k-algèbre *profinie*, le foncteur $\mathrm{M}\mapsto\mathrm{M}\,\widehat{\otimes}_k\,\ell$ est adjoint à gauche du foncteur de restriction des scalaires $\mathbf{PC}(\ell)\to\mathbf{PC}(k)$ (cf. lemme 0.4).

De plus, si M, N *sont des k-modules pseudocompacts, on a un isomorphisme canonique :*

$$(\mathrm{M}\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{N})\,\widehat{\otimes}_k\,\ell \cong (\mathrm{M}\,\widehat{\otimes}_k\,\ell)\,\widehat{\otimes}_\ell\,(\mathrm{N}\,\widehat{\otimes}_k\,\ell).$$

Enfin, si A est une k-algèbre profinie, il y a sur $\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_k\,\ell$ une et une seule structure de ℓ-algèbre profinie telle que, si $a, b \in \mathrm{A}$ et $\lambda, \mu \in \ell$,

$$(a\,\widehat{\otimes}_k\,\lambda)(b\,\widehat{\otimes}_k\,\mu) = (ab)\,\widehat{\otimes}_k(\lambda\mu).$$

On dit que $\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_k\,\ell$ est *l'algèbre déduite de* A *par l'extension des scalaires* $k \to \ell$.

1. Variétés formelles sur un anneau pseudocompact

491

1.1. On peut associer à tout anneau pseudocompact A un schéma formel (EGA I, 10.4.2) en procédant comme suit : l'espace topologique sous-jacent est l'ensemble $\Upsilon(\mathrm{A})$ des idéaux premiers ouverts (donc maximaux) de A, qu'on munit de la topologie discrète ; le faisceau structural a le produit cartésien $\prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{E}} \mathrm{A}_\mathfrak{m}$ pour espace des sections sur une partie E de $\Upsilon(\mathrm{A})$. Le schéma formel ainsi obtenu est noté Spf(A) (le *spectre formel* de A). [34]

Si A et B sont deux anneaux pseudocompacts, un *morphisme* de Spf(B) dans Spf(A) consiste en la donnée d'une application f de $\Upsilon(\mathrm{B})$ dans $\Upsilon(\mathrm{A})$ et d'une famille d'homomorphismes continus $f^\natural_y : \mathrm{A}_{f(y)} \to \mathrm{B}_y$, pour $y \in \Upsilon(\mathrm{B})$. Un tel morphisme induit un homomorphisme continu $f^\natural$ de $\mathrm{A} = \prod_{x\in\Upsilon(\mathrm{A})} \mathrm{A}_x$ dans $\mathrm{B} = \prod_{y\in\Upsilon(\mathrm{B})} \mathrm{B}_y$. La réciproque est vraie :

Proposition. — *Le foncteur contravariant* $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ *est pleinement fidèle.*

En effet, si $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un homomorphisme continu d'algèbres, l'image réciproque $\varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ d'un idéal maximal ouvert de B est un idéal premier ouvert de A, donc maximal dans A. On obtient donc une application $\mathfrak{n} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ de $\Upsilon(\mathrm{B})$ dans $\Upsilon(\mathrm{A})$, et φ induit un homomorphisme continu $\mathrm{A}_{\varphi^{-1}(\mathfrak{n})} \to \mathrm{B}_\mathfrak{n}$. Donc φ induit un morphisme de schémas formels $\mathrm{Spf}(\varphi) : \mathrm{Spf}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$. On vérifie facilement que $\mathrm{Spf}(\varphi)^\natural = \varphi$, et que $\mathrm{Spf}(f^\natural) = f$, pour tout morphisme $f : \mathrm{Spf}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$, d'où la proposition.

Bien que nous ne parlions ici que de schémas formels de la forme Spf(A), nous utiliserons le langage des schémas formels plutôt que celui des anneaux pseudocompacts, afin d'appuyer nos assertions sur une intuition géométrique.

1.2. Soit k un anneau pseudocompact.

Définition. — Nous appellerons *variété formelle* sur k tout schéma formel X au-dessus de $\mathrm{Spf}(k)$ qui est isomorphe à un k-schéma formel Spf(A) pour une certaine k-algèbre profinie A. 492

L'algèbre A est alors isomorphe à *l'algèbre affine* de X, c'est-à-dire à l'algèbre des sections du faisceau structural $\mathscr{O}_\mathrm{X}$ de X.

[34] N.D.E. : cf. Remarques 0.1.2.

D'après 1.1, le foncteur $A \mapsto \mathrm{Spf}(A)$ est une anti-équivalence de $\mathbf{Alp}_{/k}$ (0.4.1) sur la sous-catégorie pleine $\mathbf{Vaf}_{/k}$ de la catégorie des schémas formels sur $\mathrm{Spf}(k)$ dont les objets sont les k-variétés formelles. Donc, d'après le corollaire 0.4.2 :

Proposition. — *La catégorie $\mathbf{Vaf}_{/k}$ possède des limites projectives et inductives.* [35]

Soient par exemple Y, Z des k-variétés formelles au-dessus d'une même k-variété formelle X et soient A, B, C les algèbres affines de X, Y, Z ; d'après 0.4.1, l'algèbre affine du produit fibré $Y \times_X Z$ s'identifie à $B \widehat{\otimes}_A C$, de sorte que l'inclusion de $\mathbf{Vaf}_{/k}$ dans la catégorie de tous les k-schémas formels commute aux limites projectives finies (cf. EGA I, 10.7).

Les limites inductives de k-variétés formelles correspondent aux limites projectives de leurs algèbres affines. Soient, par exemple, d, e : $X \rightrightarrows Y$ une double-flèche de $\mathbf{Vaf}_{/k}$; l'algèbre affine de $\mathrm{Coker}(d, e)$ est isomorphe au noyau des homomorphismes induits sur les algèbres affines de X et Y ; mais on peut aussi donner de $\mathrm{Coker}(d, e)$ la construction suivante : l'espace topologique sous-jacent à $\mathrm{Coker}(d, e)$ est le conoyau des espaces sous-jacents [36] ; si p est la projection canonique de l'ensemble sous-jacent à Y sur le conoyau et si z appartient au conoyau, l'algèbre locale de $\mathrm{Coker}(d, e)$ en z est le noyau de la double-flèche

$$d^\natural, e^\natural : \prod_{p(y)=z} \mathscr{O}_{Y,y} \rightrightarrows \prod_{q(x)=z} \mathscr{O}_{X,x}$$

493 où l'on a posé $q = pd = pe$ et où $d^\natural$ et $e^\natural$ sont induits par les homomorphismes $d^\natural_x$ et $e^\natural_x$ (notations de 1.1).

Définition. — Si $\varphi : k \to \ell$ est un homomorphisme d'anneaux pseudocompacts et X une k-variété formelle d'algèbre affine A, le préschéma formel $X \times_{\mathrm{Spf}(k)} \mathrm{Spf}(\ell)$, obtenu par changement de base, est une ℓ-variété formelle, que nous noterons aussi $X \widehat{\otimes}_k \ell$ et qui a pour algèbre affine le produit tensoriel complété $A \widehat{\otimes}_k \ell$ (cf. 0.5 et EGA I, § 10).

Remarque. — Comme toute variété formelle sur k se décompose en variétés formelles sur les composantes locales de k, *nous supposerons dans certaines démonstrations que k est un anneau pseudocompact local.*

Donnons maintenant quelques exemples, en même temps que nous fixons notre terminologie.

1.2.1. — Un *k-foncteur* sera, par définition, un foncteur *covariant* de $\mathbf{Alf}_{/k}$ dans $(\mathbf{Ens})$. D'après 1.1 et 0.4.2, on peut identifier $\mathbf{Vaf}_{/k} \cong (\mathbf{Alp}_{/k})^0$ à une sous-catégorie pleine de la catégorie des k-foncteurs, en associant à toute k-variété formelle X le foncteur :

$$\mathbf{Alf}_{/k} \longrightarrow (\mathbf{Ens}), \qquad C \mapsto X(C) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{Spf}(C), X).$$

[35] N.D.E. : En particulier, les *conoyaux* existent dans $\mathbf{Vaf}_{/k}$.

[36] N.D.E. : c.-à-d., l'ensemble quotient de Y par les identifications $d(x) = e(x)$, pour tout $x \in X$, muni de la topologie quotient, qui est ici la topologie discrète.

Nous rencontrerons plus loin des k-foncteurs $\mathbf{F}$ qui associent à tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$ un module $\mathbf{F}(\mathrm{C})$ sur C et à tout morphisme $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ de $\mathbf{Alf}_{/k}$ une application k-linéaire $\mathbf{F}(\varphi) : \mathbf{F}(\mathrm{C}) \to \mathbf{F}(\mathrm{D})$ telle que, si $x \in \mathbf{F}(\mathrm{C})$ et $\lambda \in \mathrm{C}$:

$$\mathbf{F}(\varphi)(\lambda x) = \varphi(\lambda)\mathbf{F}(\varphi)(x)\,.$$

D'après I 3.1, un tel $\mathbf{F}$ est muni d'une structure de $\mathbf{O}_k$-module si l'on note $\mathbf{O}_k$ le k-foncteur en anneaux qui associe à tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$ l'anneau sous-jacent à C .

Définition. — Un $\mathbf{O}_k$-module $\mathbf{F}$ sera dit *admissible* [37] si tout morphisme $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ **494**
de $\mathbf{Alf}_{/k}$ induit une bijection de $\mathrm{D} \otimes_{\mathrm{C}} \mathbf{F}(\mathrm{C})$ sur $\mathbf{F}(\mathrm{D})$.

On dira que $\mathbf{F}$ est *plat* s'il est admissible et si, pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$, $\mathbf{F}(\mathrm{C})$ est un C-module plat. [38]

Par exemple, si M est un k-module (*pas nécessairement pseudocompact*), nous noterons $\mathbf{W}(\mathrm{M})$ le $\mathbf{O}_k$-module $\mathrm{C} \mapsto \mathrm{C} \otimes_k \mathrm{M}$; alors $\mathbf{W}(\mathrm{M})$ est plat lorsque M est plat sur k.

De plus, le foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathbf{W}(\mathrm{M})$ a pour adjoint à droite le foncteur qui associe à tout $\mathbf{O}_k$-module $\mathbf{F}$ le k-module $\varprojlim_{\mathfrak{l}} \mathbf{F}(k/\mathfrak{l})$, où $\mathfrak{l}$ parcourt les idéaux ouverts de k.

1.2.2. — Dans la suite, un $\mathbf{O}_k$-module sera toujours désigné par une lettre en caractères gras telle que $\mathbf{F}$; lorsque k est artinien, nous écrirons alors simplement F au lieu de $\mathbf{F}(k)$. Dans ce cas, il va de soi que le foncteur $\mathbf{F} \mapsto \mathrm{F}$ induit une équivalence de la catégorie des $\mathbf{O}_k$-modules plats sur celle des k-modules plats ! La terminologie que nous avons adoptée a donc seulement pour but de nous permettre de raisonner « comme si k était toujours artinien ».

Conformément à l'exposé I § 3.1, nous utiliserons des conventions analogues pour d'autres structures algébriques : ainsi, une $\mathbf{O}_k$-*algèbre* (resp. une $\mathbf{O}_k$-*coalgèbre*, resp. une $\mathbf{O}_k$-*algèbre de Lie*, resp. une $\mathbf{O}_k$-*p-algèbre de Lie*) consistera en la donnée d'un $\mathbf{O}_k$-module $\mathbf{M}$ et, pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$, d'une structure de C-algèbre (resp. de C-coalgèbre, resp. de C-algèbre de Lie, resp. de C-p-algèbre de Lie) sur $\mathbf{M}(\mathrm{C})$; on suppose de plus que, pour tout morphisme $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ de $\mathbf{Alf}_{/k}$, l'application de $\mathrm{D} \otimes_{\mathrm{C}} \mathbf{M}(\mathrm{C})$ dans $\mathbf{M}(\mathrm{D})$, qui est induite par $\mathbf{M}(\varphi)$, est un homomorphisme de D-algèbres (resp. de D-coalgèbres, etc.).

Notons enfin que, si $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont deux $\mathbf{O}_k$-modules, $\mathbf{F} \otimes_k \mathbf{G}$ désignera le $\mathbf{O}_k$-module $\mathrm{C} \mapsto \mathbf{F}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \mathbf{G}(\mathrm{C})$.

1.2.3. — Soit N un k-module *pseudocompact*. Nous notons $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{N})$ ou $\mathbf{N}^\dagger$ [39] le $\mathbf{O}_k$- **495**
module qui associe à tout $\mathrm{C} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alf}_{/k}$ le C-module $(\mathrm{C} \widehat{\otimes}_k \mathrm{N})^\dagger$ dual de $\mathrm{C} \widehat{\otimes}_k \mathrm{N}$ (0.2.2), c.-à-d., le C-module

$$\mathrm{Hom}_c(\mathrm{C} \widehat{\otimes}_k \mathrm{N}, \mathrm{C}) \cong \mathrm{Hom}_c(\mathrm{N}, \mathrm{C}_{|_k})\,,$$

[37] N.D.E. : On a introduit cette terminologie, cf. la N.D.E. (40) dans 1.2.3.
[38] N.D.E. : et donc *projectif*, puisque C est artinien.
[39] N.D.E. : On n'utilisera pas cette seconde notation, voir la N.D.E. (40).

où $\mathrm{C}_{|_k}$ désigne le k-module C obtenu par restriction des scalaires. Ce $\mathbf{O}_k$-module $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{N})$ sera appelé *le dual* de N.

Si $k_{\mathfrak{m}}$ est une composante locale de k, alors, pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$,

$$\mathrm{Hom}_c(k_{\mathfrak{m}}, \mathrm{C}_{|_k}) = \mathrm{C}_{\mathfrak{m}} = \mathrm{C} \otimes_k k_{\mathfrak{m}}$$

est un C-module projectif, et de plus on a $\mathrm{D} \otimes_{\mathrm{C}} \mathrm{C}_{\mathfrak{m}} = \mathrm{D}_{\mathfrak{m}}$, pour tout morphisme $\mathrm{C} \to \mathrm{D}$ de $\mathbf{Alf}_{/k}$; donc $\mathbf{V}_k^f(k_{\mathfrak{m}})$ est un $\mathbf{O}_k$-module plat (cf. 1.2.1).

Comme tout k-module pseudocompact projectif est un produit de modules $k_{\mathfrak{m}}$ (cf. Prop. 0.2.1), on déduit du corollaire 0.2.F que : $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{N})$ *est un* $\mathbf{O}_k$*-module plat lorsque* N *est un* k*-module pseudocompact projectif.*

Réciproquement, si $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_k$-module *admissible* (cf. 1.2.1) [40], nous appelons *dual de* $\mathbf{M}$ et nous notons $\Gamma^*(\mathbf{M})$ le k-module pseudocompact défini comme suit. Pour $\mathfrak{l}$ parcourant les idéaux ouverts de k, on munit chaque $k/\mathfrak{l}$-module

$$\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* = \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}), k/\mathfrak{l})$$

de la topologie décrite en 0.2.2, qui en fait un k-module pseudocompact. Comme $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}) \simeq \mathbf{M}(k/\mathfrak{l}') \otimes (k/\mathfrak{l})$ pour $\mathfrak{l} \supseteq \mathfrak{l}'$, on a des morphismes de transition :

$$\mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}'}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}'), k/\mathfrak{l}') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}'}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}'), k/\mathfrak{l}) = \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}), k/\mathfrak{l})$$

et par définition $\Gamma^*(\mathbf{M})$ est la limite projective de ce système projectif (filtrant) de k-modules pseudocompacts.

Proposition. — *Les foncteurs* $\mathrm{N} \mapsto \mathbf{V}_k^f(\mathrm{N})$ *et* $\mathbf{M} \mapsto \Gamma^*(\mathbf{M})$ *définissent une anti-équivalence entre la catégorie des* k*-modules pseudocompacts projectifs et celle des* $\mathbf{O}_k$*-modules plats* (cf. 0.2.2).

[41] *Démonstration.* D'une part, on a une transformation naturelle $\phi_{\mathrm{N}} : \mathrm{N} \to \Gamma^*(\mathbf{V}_k^f(\mathrm{N}))$. Comme le foncteur $\Gamma^* \circ \mathbf{V}_k^f$ commute aux produits, d'après 0.3.5 et 0.2.F, il suffit de vérifier que ϕ_{N} est un isomorphisme lorsque N est une composante locale $k_{\mathfrak{m}}$ de k. Dans ce cas, pour tout idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de k contenu dans $\mathfrak{m}$, le morphisme naturel

$$(k/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}}\left(\mathrm{Hom}_c(k_{\mathfrak{m}} \widehat{\otimes}\, k/\mathfrak{l},\ k/\mathfrak{l}),\ k/\mathfrak{l}\right)$$

est un isomorphisme, d'où le résultat.

D'autre part, soit $\mathbf{M}$ un $\mathbf{O}_k$-module plat. Montrons que $\Gamma^*(\mathbf{M}) = \varprojlim \mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*$ est un objet projectif de $\mathbf{PC}(k)$. Soit $\mathrm{N} \to \mathrm{N}'$ un morphisme surjectif entre objets de $\mathbf{LF}(k)$. D'après 0.2.F (i) et (ii), il suffit de montrer que l'application naturelle

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*, \mathrm{N}) \longrightarrow \varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*, \mathrm{N}')$$

[40] N.D.E. : Les éditeurs ne comprennent pas la définition qui suit si $\mathbf{M}$ n'est pas supposé *admissible*, d'où l'ajout de cette hypothèse. D'autre part, on a noté $\Gamma^*(\mathbf{M})$ au lieu de $\mathbf{M}^*$, afin d'éviter des confusions entre $\mathbf{M}^*$, le *module* dual du foncteur $\mathbf{M}$, et $\mathbf{N}^\dagger$, le *foncteur* dual du module N, cf. N.D.E. (39). Enfin, on a détaillé la construction de $\Gamma^*(\mathbf{M})$.

[41] N.D.E. : On a ajouté l'esquisse de démonstration qui suit. L'original indiquait : « Si $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_k$-module plat, il est clair que $\mathbf{M}$ n'est autre que le dual de $\mathbf{M}^*$, donc *les foncteurs* $\mathrm{N} \mapsto \mathbf{N}^*$ *et* $\mathbf{M} \mapsto \mathbf{M}^*$ *définissent une anti-équivalence*... »

est surjective. Mais ceci est clair, car N et N′ sont des $k/\mathfrak{l}_0$-modules, pour un certain idéal ouvert $\mathfrak{l}_0$; donc, si $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{l}_0$, tout morphisme $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* \to \mathrm{N}'$ se relève en un morphisme $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* \to \mathrm{N}$, puisque $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*$ est un objet projectif de $\mathbf{PC}(k/\mathfrak{l})$.

On a un morphisme $\psi : \mathbf{M} \to \mathbf{V}_k^f(\Gamma^*(\mathbf{M}))$ de foncteurs de $\mathbf{Alf}_{/k}$ dans $(\mathbf{Ens})$. Soit B un objet de $\mathbf{Alf}_{/k}$, montrons que

$$\psi(\mathrm{B}) :\ \mathbf{M}(\mathrm{B}) \longrightarrow \mathbf{V}_k^f(\Gamma^*(\mathbf{M}))(\mathrm{B}) = \mathrm{Hom}_c\Big(\varprojlim_{\mathfrak{l}} \big(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* \,\widehat{\otimes}_k\, \mathrm{B}\big), \mathrm{B}\Big) \tag{1}$$

est une bijection (dans l'égalité ci-dessus, on a utilisé le fait que $\widehat{\otimes}$ commute aux limites projectives filtrantes). Soit $\mathfrak{l}_0$ un idéal ouvert de k contenu dans le noyau de $k \to \mathrm{B}$. D'après le lemme ci-dessous, pour tout $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{l}_0$, on a un isomorphisme canonique de B-modules pseudocompacts :

$$\mathbf{M}(k/l)^* \,\widehat{\otimes}_k\, \mathrm{B} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}), \mathrm{B})$$

et, puisque $\mathbf{M}(\mathrm{B}) = \mathbf{M}(k/\mathfrak{l}) \otimes_{k/\mathfrak{l}} \mathrm{B}$, le terme de droite égale $\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathbf{M}(\mathrm{B}), \mathrm{B})$. Donc, le système projectif dans (1) est constant pour $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{l}_0$, et (1) se réduit au morphisme canonique

$$\mathbf{M}(\mathrm{B}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_c\big(\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathbf{M}(\mathrm{B}), \mathrm{B}),\ \mathrm{B}\big),$$

qui est un isomorphisme d'après 0.2.2, puisque B est artinien et $\mathbf{M}(\mathrm{B})$ un B-module projectif. Ceci prouve la proposition, modulo le lemme ci-dessous.

Lemme 1.2.3.A. — *Soient* A *un anneau pseudocompact,* B *un* A*-module pseudocompact, et* M *un* A*-module* (*sans topologie*) projectif*. On a un isomorphisme canonique de* A*-modules pseudocompacts*

$$\theta :\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A}) \,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\, \mathrm{B} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{B}). \tag{2}$$

Ici, $\mathrm{M}^* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A})$ est muni de la topologie définie en 0.2.2, et la topologie de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{B})$ est définie de façon analogue : une base de voisinages de 0 est formée par les sous-modules suivants, où $x \in \mathrm{M}$ et B′ est un sous-module ouvert de B :

$$\mathscr{H}(x, \mathrm{B}') = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{B}) \mid f(x) \in \mathrm{B}'\}.$$

Ceci étant, θ est évidemment un isomorphisme lorsque M = A ; de plus, les deux membres de (2), considérés comme foncteurs en M, transforment somme directes en produits (en particulier, commutent aux sommes directes finies). On obtient donc que (2) est un isomorphisme lorsque M est un A-module libre, puis lorsque M est projectif.

Remarque. — Revenons à l'énoncé de la proposition, et supposons de plus que N soit un k-module pseudocompact *topologiquement libre*. Dans ce cas, on peut choisir « de manière cohérente » des bases pour les C-modules $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{N})(\mathrm{C})$.

En effet, soient (n_i) une pseudobase de N (0.2.1) et n_i^{C} l'image canonique de n_i dans $\mathrm{C} \,\widehat{\otimes}_k\, \mathrm{N}$, pour $\mathrm{C} \in \mathbf{Alf}_{/k}$. Si l'on définit l'élément δ_i^{C} de $(\mathrm{C} \,\widehat{\otimes}_k\, \mathrm{N})^\dagger$ par les égalités $\delta_i^{\mathrm{C}}(n_i^{\mathrm{C}}) = 1$ et $\delta_i^{\mathrm{C}}(n_j^{\mathrm{C}}) = 0$ pour $i \neq j$, la famille (δ_i^{C}) est une base de $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{N})(\mathrm{C})$; en outre, pour tout morphisme $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ de $\mathbf{Alf}_{/k}$, $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{N})(\varphi)$ envoie δ_i^{C} sur δ_i^{D}.

1.2.4. — [42] Pour tout k-module pseudocompact E, soit $\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E})$ *l'algèbre symétrique complétée de* E, définie de la manière suivante. Soit $\mathrm{T}_k(\mathrm{E})$ la somme directe des k-modules pseudocompacts :

$$\widehat{\bigotimes}{}_k^n \mathrm{E} = \mathrm{E}\,\widehat{\otimes}_k \ldots \widehat{\otimes}_k \mathrm{E} \quad (n \geqslant 0\,; \quad \text{si } n = 0, \quad \widehat{\bigotimes}{}_k^0 \mathrm{E} = k)\,;$$

496 on fait de $\mathrm{T}_k(\mathrm{E})$ une k-algèbre graduée en définissant la multiplication de la façon habituelle ; soit alors $\mathrm{S}_k(\mathrm{E})$ le quotient de $\mathrm{T}_k(\mathrm{E})$ par l'idéal homogène qui a pour n-ième composante le k-sous-module fermé de $\widehat{\bigotimes}{}_k^n \mathrm{E}$ engendré par les éléments :

$$x_1 \,\widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes}\, x_i \,\widehat{\otimes}\, x_{i+1} \,\widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes}\, x_n - x_1 \,\widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes}\, x_{i+1} \,\widehat{\otimes}\, x_i \,\widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes}\, x_n.$$

Si l'on désigne par $\mathrm{S}_k^n(\mathrm{E})$ ce quotient, $\mathrm{S}_k(\mathrm{E})$ est évidemment une k-algèbre graduée de n-ième composante $\mathrm{S}_k^n(\mathrm{E})$.

On munit $\mathrm{S}_k(\mathrm{E})$ de la topologie linéaire définie par l'ensemble Υ des idéaux $\mathfrak{l}$ tels que $\mathrm{S}_k(\mathrm{E})/\mathfrak{l}$ soit un k-module de longueur finie et que $\mathrm{S}_k^n(\mathrm{E}) \cap \mathfrak{l}$ soit un sous-module ouvert de $\mathrm{S}_k^n(\mathrm{E})$ pour tout n. Alors, l'algèbre profinie $\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E})$ est le séparé complété de $\mathrm{S}_k(\mathrm{E})$ pour cette topologie. [43]

On note $\mathbb{V}_k^f(\mathrm{E})$ la k-variété formelle $\mathrm{Spf}(\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E}))$. *Elle représente le k-foncteur* $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{E})$*, c.-à-d., pour tout objet* C *de* $\mathbf{Alf}_{/k}$*, on a un isomorphisme canonique :*

$$\mathbf{V}_k^f(\mathrm{E})(\mathrm{C}) = \mathrm{Hom}_c(\mathrm{E}, \mathrm{C}_{|k}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E}), \mathrm{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{Spf}(\mathrm{C}), \mathbb{V}_k^f(\mathrm{E})).$$

Dans toute la suite, nous identifions $\mathbb{V}_k^f(\mathrm{E})$ au k-foncteur $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{E})$.

1.2.5. — D'après 1.2.4, le morphisme nul de E dans k est associé à un morphisme d'algèbres profinies $\pi : \widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E}) \to k$; ce morphisme π induit l'application nulle sur $\mathrm{S}_k^n(\mathrm{E})$ pour $n \geqslant 1$ et définit une section du morphisme structural $\mathbb{V}_k^f(\mathrm{E}) \to \mathrm{Spf}(k)$.

Nous noterons $\mathbb{V}_k^{f,0}(\mathrm{E})$ la variété formelle qui a pour points les images des points de $\mathrm{Spf}(k)$ par la section $\mathrm{Spf}(\pi)$ et qui a les mêmes algèbres locales que $\mathbb{V}_k^f(\mathrm{E})$ en ces points.

[42] N.D.E. : Dans ce paragraphe, on a modifié l'ordre, en définissant d'abord $\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E})$ et énonçant ensuite que $\mathbb{V}_k^f(\mathrm{E})$ représente $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{E})$.

[43] N.D.E. : Par exemple, soient k un corps, E un k-espace vectoriel pseudocompact, $\mathrm{V} = \mathrm{Hom}_c(\mathrm{E}, k)$; on a $\mathrm{E} \simeq \mathrm{V}^*$ (cf. 0.2.2). Pour tout sous-espace de dimension finie W de V, soit $\mathscr{F}(\mathrm{W})$ l'ensemble des points fermés du k-schéma $\mathbb{V}(\mathrm{W}) = \mathrm{Spec}\,\mathrm{S}_k(\mathrm{W}^*)$. Notons $\mathscr{F}(\mathrm{V})$ la limite inductive des $\mathscr{F}(\mathrm{W})$. Alors $\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E})$ est le produit pour $x \in \mathscr{F}(\mathrm{V})$ des k-algèbres pseudocompactes

$$\varprojlim_{\mathrm{W}} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{W},x}$$

où W parcourt les sous-espaces de V de dimension finie tels que $x \in \mathscr{F}(\mathrm{W})$, et $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{W},v}$ désigne le séparé complété de l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathbb{V}(\mathrm{W}),v}$ pour la topologie définie par les idéaux de codimension finie (qui coïncide ici avec la topologie $\mathfrak{m}$-adique). Si k est algébriquement clos et $(v_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une base de V, de sorte que E possède une pseudobase $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$, alors chaque $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{V},v}$ est isomorphe à l'anneau des séries formelles $k[[e_i, i \in \mathrm{I}]]$, muni de la topologie définie par les idéaux de codimension finie.

[44] Alors, l'algèbre affine de $\mathbb{V}_k^{f,0}(\mathrm{E})$ est le séparé complété de $\mathrm{S}_k(\mathrm{E})$ pour la topologie définie par les idéaux $\mathfrak{l} \in \Upsilon$ (cf. 1.2.4) *qui contiennent* $\mathrm{S}_k^n(\mathrm{E})$ *pour* n *assez grand.* On en déduit que c'est le produit infini :

$$k[[\mathrm{E}]] = k \times \mathrm{E} \times \mathrm{S}_k^2(\mathrm{E}) \times \mathrm{S}_k^3(\mathrm{E}) \times \cdots$$

D'autre part, soient C un objet de $\mathbf{Alf}_{/k}$, f un élément de $\mathbb{V}_k^f(\mathrm{C}) = \mathrm{Hom}_c(\mathrm{E}, \mathrm{C})$, et $f' : \widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E}) \to \mathrm{C}$ le morphisme de k-algèbres profinies correspondant à f. Alors $\mathrm{Ker}\, f'$ est un idéal ouvert, et f appartient à $\mathbb{V}_k^{f,0}(\mathrm{C})$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f'$ contient $\mathrm{S}_k^n(\mathrm{E})$ pour n assez grand, c.-à-d., si et seulement si $f(\mathrm{E})$ est contenu dans le radical $\mathfrak{r}(\mathrm{C})$ de C. Donc : *pour tout objet* C *de* $\mathbf{Alf}_{/k}$, *on a des isomorphismes canoniques :* 497

$$\mathbb{V}_k^{f,0}(\mathrm{E})(\mathrm{C}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(k[[\mathrm{E}]], \mathrm{C}) \simeq \mathrm{Hom}_c(\mathrm{E}, \mathfrak{r}(\mathrm{C})).$$

1.2.6. — Une k-variété formelle V est dite de *longueur finie* si son algèbre affine l'est. De même, si S est un préschéma, un S-préschéma X est dit *de longueur finie* si X est fini sur S et si l'image directe de $\mathscr{O}_\mathrm{X}$ sur S est un $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module de longueur finie. [45] Donc, se donner un S-préschéma de longueur finie X « est la même chose » que se donner un ensemble fini $\{s_1, \ldots, s_n\}$ de points fermés de S, et en chacun de ces points une $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s_i}$-algèbre de longueur finie.

On voit donc que les S-préschémas de longueur finie s'identifient aux variétés formelles de longueur finie sur le schéma formel $\widehat{\mathrm{S}} = \mathrm{Spf}(k)$ qui suit. L'espace topologique sous-jacent à $\widehat{\mathrm{S}}$ est l'ensemble des points fermés de S muni de la topologie discrète ; si s est un tel point fermé, le faisceau structural $\mathscr{O}_{\widehat{\mathrm{S}}}$ a pour fibre $\mathscr{O}_{\widehat{\mathrm{S}},s}$ en s le séparé complété $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{S},s}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ pour la topologie linéaire définie par les idéaux de colongueur finie (l'algèbre affine de $\widehat{\mathrm{S}}$ est donc le produit des $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{S},s}$, où s parcourt les points fermés de S, muni de la topologie produit).

Soit $\mathbf{Vaf}^{\ell f}_{/\widehat{\mathrm{S}}}$ la catégorie des variétés formelles de longueur finie sur $\widehat{\mathrm{S}}$ (identifiée à celle des S-préschémas de longueur finie). D'après 1.1 et 1.2.1, la catégorie $\mathbf{Vaf}_{/\widehat{\mathrm{S}}}$ des variétés formelles sur $\widehat{\mathrm{S}}$ est équivalente à celle des foncteurs contravariants exacts à gauche de $\mathbf{Vaf}^{\ell f}_{/\widehat{\mathrm{S}}}$ dans $(\mathbf{Ens})$.

En particulier, pour tout S-préschéma X, le foncteur $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})}(\mathrm{T}, \mathrm{X})$, de $\mathbf{Vaf}^{\ell f}_{/\widehat{\mathrm{S}}}$ vers $(\mathbf{Ens})$, est un tel foncteur exact à gauche, d'où : [46]

Definition et proposition. — *Pour tout* S*-préschéma* X*, il existe un objet* $\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$ *de* $\mathbf{Vaf}_{/\widehat{\mathrm{S}}}$*, unique à isomorphe près, tel que les foncteurs*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/\widehat{\mathrm{S}}}}(-, \widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}) \quad et \quad \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})}(-, \mathrm{X})$$

[44] N.D.E. : On a détaillé la suite de ce paragraphe.

[45] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[46] N.D.E. : On a amplifié la proposition qui suit, en y insérant le fait que le foncteur $\mathrm{X} \mapsto \widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$ commute aux limites projectives finies (dans l'original, ceci figurait dans la démonstration de 1.3.4 – la démonstration donnée ici est plus directe que l'originale). De plus, ce résultat sera utile dans la Section 2 sur les groupes formels.

aient même restriction à $\mathbf{Vaf}^{\ell f}_{/\widehat{\mathrm{S}}}$.

On peut décrire $\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$ *comme suit : l'espace topologique sous-jacent est formé des points* x *de* X *tels que le corps résiduel* $\kappa(x)$ *de* X *en* x *soit une extension finie du corps résiduel* $\kappa(s)$ *de l'image* s *de* x *dans* S *; la fibre de* $\mathscr{O}_{\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}}$ *en* x *est le séparé complété de l'anneau local* $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *pour la topologie linéaire définie par les idéaux de colongueur finie.*

On obtient ainsi un foncteur $\mathrm{X} \mapsto \widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$ *de* $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$ *vers* $\mathbf{Vaf}_{/\widehat{\mathrm{S}}}$, qui commute aux limites projectives finies.

On voit facilement que la variété formelle $\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$ définie plus haut a la propriété requise, et que la correspondance $\mathrm{X} \mapsto \widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$ est fonctorielle.

Posons $\mathscr{S} = (\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$ et $\mathscr{V} = \mathbf{Vaf}_{/\widehat{\mathrm{S}}}$, et notons $\widehat{\mathrm{X}}$ au lieu de $\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$. On sait (1.2) que $\mathscr{V}$ possède des limites projectives arbitraires. Soit $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ un système projectif dans $\mathscr{S}$ et supposons que $\mathrm{X} = \varprojlim \mathrm{X}_i$ existe dans $\mathscr{S}$ (ce qui est le cas si I est fini). Comme le foncteur qui associe à tout objet Y de $\mathscr{S}$ (resp. V de $\mathscr{V}$) le foncteur $\mathbf{h}_{\mathrm{Y}} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(-,\mathrm{Y})$ (resp. $\mathbf{h}_{\mathrm{V}} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(-,\mathrm{V})$) commute aux limites projectives, on a, pour tout S-préschéma T de longueur finie, des isomorphismes fonctoriels :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(\mathrm{T},\mathrm{X}) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(\mathrm{T},\mathrm{X}_i) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(\mathrm{T},\widehat{\mathrm{X}}_i) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(\mathrm{T},\varprojlim \widehat{\mathrm{X}}_i).$$

Par conséquent, le foncteur $\mathrm{X} \mapsto \widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$ commute aux limites projectives lorsqu'elles existent dans $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$; en particulier, il commute aux limites projectives finies.

498 ***1.3. Proposition***. — *Soient* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de variétés formelles sur* k, A *et* B *les algèbres affines de* X *et* Y, $g : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ *le morphisme induit par* f. *Alors* f *est un* monomorphisme *de* $\mathbf{Vaf}_{/k}$ *si et seulement si* g *est une* surjection.

[47] D'après 1.1, $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ est une anti-équivalence de $\mathbf{Alp}_{/k}$ sur $\mathbf{Vaf}_{/k}$, donc f est un monomorphisme si et seulement si g est un épimorphisme, et ceci est bien le cas si g est surjectif.

Réciproquement, supposons que g soit un épimorphisme et montrons qu'il est surjectif. Pour tout $\mathfrak{n} \in \Upsilon(\mathrm{B})$, posons $\mathrm{A}_{\mathfrak{n}} = \mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{B}}\,\mathrm{B}_{\mathfrak{n}}$; d'après 0.4, A est un B-module pseudocompact, donc est le produit des $\mathrm{A}_{\mathfrak{n}}$ (cf. 0.3.6). Alors, g est le produit des morphismes $g_{\mathfrak{n}} : \mathrm{B}_{\mathfrak{n}} \to \mathrm{A}_{\mathfrak{n}}$ déduits de g par changement de base. Ceux-ci sont encore des épimorphismes, ce qui nous ramène à démontrer le résultat lorsque B est local, d'idéal maximal $\mathfrak{n}$. Posons $\mathrm{K} = \mathrm{B}/\mathfrak{n}$.

D'après le lemme de Nakayama 0.3.3, il suffit de montrer que le morphisme $g\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{B}}\,\mathrm{K}$ est surjectif ; il est déduit de g par changement de base, donc est un épimorphisme de $\mathbf{Alp}_{/\mathrm{K}}$. On peut donc supposer que $\mathrm{B} = \mathrm{K}$ est un corps. Or f est un monomorphisme si et seulement si le morphisme diagonal $\mathrm{X} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$ est un isomorphisme, c'est-à-dire si l'homomorphisme $x\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{K}}\,x' \to xx'$ est un isomorphisme de $\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{K}}\,\mathrm{A}$ sur A. Comme K est un corps, cela implique $\mathrm{A} = \mathrm{K}$.

[47] N.D.E. : On a détaillé le début de la démonstration.

Remarque. — [48] Il résulte de la proposition que tout *monomorphisme* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ de variétés formelles est un *isomorphisme* de X *sur une sous-variété formelle* (nécessairement fermée !) de Y.

1.3.1. — La proposition précédente entraîne en particulier que *tout monomorphisme* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *de* $\mathbf{Vaf}_{/k}$ *est effectif* (cf. IV 1.3) [49]. Il n'en va pas de même pour les épimorphismes, comme on le voit facilement en modifiant un peu le contrexemple de l'Exp. V, § 2.c) [50] ; c'est pourquoi nous allons considérer une classe sympathique d'épimorphismes effectifs.

Lemme. — [51] *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de* k*-variétés formelles et soient* A, B *les algèbres affines de* X, Y *et* $f^\natural : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ *le morphisme induit par* f*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout* $x \in \mathrm{X}$*, l'homomorphisme* $f^\natural_x : \mathscr{O}_{\mathrm{Y},f(x)} \to \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *fait de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{Y},f(x)}$*-module pseudocompact* topologiquement libre*.*

(ii) *Pour tout* $y \in \mathrm{Y}$*, la composante locale* $\mathrm{A}_y = \prod_{f(x)=y} \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *est un* B_y*-module pseudocompact* topologiquement libre*.*

(iii) $f^\natural : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ *fait de* A *un* B*-module pseudocompact projectif.*

(iv) *Le foncteur* $\mathbf{PC}(\mathrm{B}) \to \mathbf{PC}(\mathrm{A})$*,* $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{B}} \mathrm{A}$ *est exact.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que f *est* topologiquement plat*.*

Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) découlent de 0.2.F (iii) et 0.3.7. Réciproquement, supposons (ii) vérifié et soient $x \in \mathrm{X}$ et $y = f(x)$. Comme $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est un facteur direct de A_y, c'est un B_y-module pseudocompact projectif, donc topologiquement libre d'après 0.2.1 (puisque B_y est local).

D'autre part, un morphisme $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ de k-variétés formelles est dit *surjectif* s'il induit une surjection des ensembles sous-jacents.

Proposition. — *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme* surjectif et topologiquement plat *de* 499
k*-variétés formelles. Alors* f *est un* épimorphisme effectif (cf. IV 1.3).

En effet, soient A, B les algèbres affines de X, Y et $g : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ le morphisme induit par f. Il s'agit de montrer que Y s'identifie au conoyau de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{X}$, c.-à-d., que

[48] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

[49] N.D.E. : i.e. , dans la catégorie opposée $(\mathbf{Vaf}_{/k})^0 = \mathbf{Alp}_{/k}$, le morphisme $g : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ correspondant à f est un épimorphisme effectif. Ceci est bien le cas, car g est surjectif, donc induit (cf. la démonstration de 0.2.A) un *isomorphisme* de k-algèbres profinies $\mathrm{B}/\mathrm{I} \xrightarrow{\sim} \mathrm{A}$, où $\mathrm{I} = \operatorname{Ker} g$. Par conséquent, tout morphisme $\phi : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ de $\mathbf{Alp}_{/k}$, nul sur I, descend en un morphisme $\overline{\phi} : \mathrm{A} \to \mathrm{C}$ tel que $\phi = \overline{\phi} \circ g$.

[50] N.D.E. : i.e. , soient k un corps, $\mathrm{X} = \operatorname{Spf}(k[[\mathrm{T}]])$ et $\mathrm{Y} = \operatorname{Spf}(\mathrm{B})$, où B est la sous-$k$-algèbre de A engendrée topologiquement par T^3 et T^4 (c.-à-d., B est formée des séries formelles $\sum a_n \mathrm{T}^n$ telles que $a_n = 0$ pour $n = 1, 2, 5$). Alors $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un épimorphisme qui n'est pas effectif ; en effet, le conoyau de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ est $\operatorname{Spf}(\mathrm{B}')$, où B' est la sous-algèbre de A formée des a tels que $a \mathbin{\widehat{\otimes}} 1 = 1 \mathbin{\widehat{\otimes}} a$, et B' contient T^5.

[51] N.D.E. : On a ajouté ce lemme, qui explique la terminologie « topologiquement plat ».

pour tout $\mathfrak{n} \in \Upsilon(\mathrm{B})$, $\mathrm{B}_{\mathfrak{n}}$ s'identifie au sous-anneau de $\mathrm{A}_{\mathfrak{n}} = \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{B}} \mathrm{B}_{\mathfrak{n}}$ formé des a tels que $a \mathbin{\widehat{\otimes}} 1 = 1 \mathbin{\widehat{\otimes}} a$.

On peut donc supposer B local, d'idéal maximal $\mathfrak{n}$. Notre hypothèse signifie alors que g fait de A un B-module topologiquement libre et non nul. D'après le lemme de Nakayama 0.3.3, $\mathrm{A}/\overline{\mathfrak{n}\mathrm{A}}$ n'est pas nul, de sorte que le morphisme $g' : \mathrm{B}/\mathfrak{n} \to \mathrm{A}/\overline{\mathfrak{n}\mathrm{A}}$ déduit de g est injectif. D'après le lemme 1.3.2 ci-dessous, B est un facteur direct de A comme B-module, disons $\mathrm{A} = \mathrm{B} \oplus \mathrm{A}'$; il en résulte que B s'identifie à la partie de A formée des a tels que $a \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{B}} 1 = 1 \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{B}} a$. C.Q.F.D.

1.3.2. Lemme. — *Soient* B *un anneau pseudocompact* local*,* $\mathfrak{n}$ *son idéal maximal,* M *et* N *deux* B-*modules pseudocompacts* projectifs *et* g *un morphisme* $\mathrm{M} \to \mathrm{N}$. *Si* $(\mathrm{B}/\mathfrak{n}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{B}} g$ *est injectif,* g *est un isomorphisme de* M *sur un facteur direct de* N.

En effet, posons $g' = (\mathrm{B}/\mathfrak{n}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{B}} g$. Alors g' possède une rétraction r'. Si p et q sont les projections canoniques de M et N sur $\mathrm{M}/\overline{\mathfrak{n}\mathrm{M}}$ et $\mathrm{N}/\overline{\mathfrak{n}\mathrm{N}}$, il y a donc un morphisme r tel que $p \circ r = r' \circ q$; par conséquent, r' est déduit de r par passage au quotient. Alors, puisque $r' \circ g'$ est un isomorphisme, il en est de même de $r \circ g$, d'après 0.3.4. Soit s l'isomorphisme réciproque de $r \circ g$, alors $s \circ r$ est une rétraction de g.

1.3.3. Proposition. — *Soient* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *et* $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ *des morphismes de* k*-variétés formelles.*

500 (i) *Si* f *et* g *sont topologiquement plats,* $g \circ f$ *l'est aussi.*

(ii) *Si* f *et* $g \circ f$ *sont topologiquement plats et si* f *est surjectif,* g *est topologiquement plat.*

(iii) *Si* f *est topologiquement plat,* $f \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$ *l'est pour tout changement de base* $\mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$.

Les assertions (i) et (iii) sont claires. Pour prouver (ii), appelons A, B, C les algèbres affines de X, Y, Z, et $f' : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ et $g' : \mathrm{C} \to \mathrm{B}$ les morphismes induits par f et g. Comme $g \circ f$ est topologiquement plat, $f' \circ g'$ fait de A un C-module pseudocompact projectif ; de même, f' fait de A un B-module pseudocompact projectif et fidèle. Lorsque P parcourt les C-modules pseudocompacts et N les B-modules pseudocompacts, les foncteurs $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{C}} \mathrm{A}$ et $\mathrm{N} \mapsto \mathrm{N} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{B}} \mathrm{A}$ sont donc exacts ; comme le deuxième est en outre fidèle, le foncteur $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{C}} \mathrm{B}$ est exact ; d'après 0.3.7, B est donc un C-module pseudocompact projectif.

1.3.4. Proposition. — *Soient* S *un préschéma,* Y *un* S-*préschéma* localement noethérien *et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un* S-*morphisme* localement de type fini et fidèlement plat (de sorte que f est un *épimorphisme effectif*, cf. IV, 6.3.1 (iv)). *Alors le morphisme de* $\widehat{\mathrm{S}}$-*variétés formelles* $\widehat{f} : \widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}} \to \widehat{\mathrm{Y}}/\widehat{\mathrm{S}}$ (cf. 1.2.6) *est* surjectif et topologiquement plat. *De plus, la suite*

$$\widehat{(*)} \qquad \widehat{\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}} \underset{\widehat{\mathrm{pr}_2}}{\overset{\widehat{\mathrm{pr}_1}}{\rightrightarrows}} \widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}} \xrightarrow{\ \widehat{f}\ } \widehat{\mathrm{Y}}/\widehat{\mathrm{S}}$$

déduite de la suite exacte

$$(*)\qquad \mathrm{X}\underset{\mathrm{Y}}{\times}\mathrm{X} \overset{\mathrm{pr}_1}{\underset{\mathrm{pr}_2}{\rightrightarrows}} \mathrm{X} \xrightarrow{\ f\ } \mathrm{Y}$$

est exacte.

Soit en effet y un point de Y de projection s sur S et tel que $\kappa(y)$ soit une extension finie du corps résiduel $\kappa(s)$ de s. Comme f est surjectif et localement de type fini, $f^{-1}(y)$ est non vide et localement de type fini sur $\kappa(y)$; les points fermés de $f^{-1}(y)$ sont alors les points de $\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$ se projetant sur y. Ceci montre que $\widehat{f}$ est surjectif. 501

[52] Soit x un point fermé de $f^{-1}(y)$. Comme Y est localement noethérien et f localement de type fini, l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}$ (resp. $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$) est noethérien, donc les puissances de l'idéal maximal sont de colongueur finie, de sorte que l'anneau local de $\widehat{\mathrm{Y}}/\widehat{\mathrm{S}}$ en y (resp. de $\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$ en x) est le complété $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{Y},y}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}$ (resp. $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$) pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Alors, comme f est plat, $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$ est plat sur $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{Y},y}$, d'après SGA 1, IV.5.8. Donc, d'après 0.3.8, $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$ est un $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{Y},y}$-module topologiquement libre. Ceci montre que $\widehat{f}$ est topologiquement plat.

Donc, d'après 1.3.1, $\widehat{f}$ est un épimorphisme effectif, i.e. la suite ci-dessous (où l'on a noté $\widehat{\mathrm{X}}$ au lieu de $\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$) est exacte :

$$\widehat{\mathrm{X}}\underset{\widehat{\mathrm{Y}}}{\times}\widehat{\mathrm{X}} \overset{\widehat{\mathrm{pr}_1}}{\underset{\widehat{\mathrm{pr}_2}}{\rightrightarrows}} \widehat{\mathrm{X}} \xrightarrow{\ \widehat{f}\ } \widehat{\mathrm{Y}}.$$

De plus, d'après 1.2.6, on a un isomorphisme naturel (en particulier, qui commute avec les projections sur $\widehat{\mathrm{X}}$) :

$$\widehat{\mathrm{X}\underset{\mathrm{Y}}{\times}\mathrm{X}} \simeq \widehat{\mathrm{X}}\underset{\widehat{\mathrm{Y}}}{\times}\widehat{\mathrm{X}}.$$

Par conséquent, la suite $\widehat{(*)}$ est exacte.

1.3.5. — Soit k un anneau pseudocompact. Une variété formelle X sur k est dite *topologiquement plate* si son algèbre affine A est un k-module pseudocompact *projectif*, c.-à-d., si le morphisme structural $\mathrm{X} \to \mathrm{Spf}(k)$ est topologiquement plat.

[53] Notons d'abord que 0.2.2 et 0.3.6 entraînent le résultat suivant (analogue à $\mathrm{VII_A}$, 3.1.1).

Lemme 1.3.5.A. — *Supposons k artinien. Les foncteurs* $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}^{\dagger} = \mathrm{Hom}_c(\mathrm{A}, k)$ *et* $\mathrm{C} \mapsto \mathrm{C}^{*} = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{C}, k)$ *définissent une* anti-équivalence *entre la catégorie des k-*algèbres profinies topologiquement plates*, et celle des k-*coalgèbres plates.

[52] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit ; ensuite, on a tiré profit de l'ajout fait en 1.2.6.
[53] N.D.E. : On a explicité le lemme 1.3.5.A, utilisé dans ce qui suit.

En effet, si A est k-algèbre profinie topologiquement plate, alors, d'après 0.3.6, on a un *isomorphisme* de k-modules :

$$\mathrm{A}^\dagger \otimes_k \mathrm{A}^\dagger \xrightarrow{\sim} (\mathrm{A} \,\widehat{\otimes}\, \mathrm{A})^\dagger,$$

de sorte que la multiplication $\mathrm{A} \,\widehat{\otimes}\, \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ induit par dualité une structure de k-coalgèbre sur $\mathrm{A}^\dagger$. Le reste découle alors de la proposition 0.2.2.

Revenons au cas d'un anneau pseudocompact k arbitraire. À toute k-variété formelle X dont l'anneau affine A est un k-module pseudocompact projectif, on associe une $\mathbf{O}_k$-coalgèbre [54] plate $\mathbf{H}(\mathrm{X})$, définie comme suit.

502 Notons $\mathbf{H}(\mathrm{X})$ le $\mathbf{O}_k$-module $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{A})$ « dual de A » ; c'est un $\mathbf{O}_k$-module plat, puisque le k-module pseudocompact sous-jacent à A est projectif (cf. 1.2.3). De plus, d'après 0.3.6, l'on a :

$$\mathbf{V}_k^f(\mathrm{A} \,\widehat{\otimes}\, \mathrm{A}) \simeq \mathbf{V}_k^f(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{V}_k^f(\mathrm{A}),$$

et donc la multiplication de A induit par transposition un morphisme diagonal :

$$\mathbf{H}(\mathrm{X}) = \mathbf{V}_k^f(\mathrm{A}) \longrightarrow \mathbf{V}_k^f(\mathrm{A} \,\widehat{\otimes}\, \mathrm{A}) = \mathbf{H}(\mathrm{X}) \otimes \mathbf{H}(\mathrm{X})$$

qui fait de $\mathbf{H}(\mathrm{X})$ une $\mathbf{O}_k$-coalgèbre plate. Nous dirons que $\mathbf{H}(\mathrm{X})$ est *la coalgèbre de* X *sur* $\mathbf{O}_k$.

Réciproquement, à toute $\mathbf{O}_k$-coalgèbre $\mathbf{C}$ on peut associer un k-foncteur (cf. 1.2.1) $\mathrm{Spf}^*(\mathbf{C})$, défini comme suit. Pour tout objet B de $\mathbf{Alf}_{/k}$, on pose (avec les notations de $\mathrm{VII_A}$ 3.1) :

$$\begin{aligned}\mathrm{Spf}^*(\mathbf{C})(\mathrm{B}) &= \mathrm{Hom}_{\text{B-coalg.}}(\mathrm{B}, \mathbf{C}(\mathrm{B})) \\ &= \{x \in \mathbf{C}(\mathrm{B}) \mid \varepsilon_{\mathbf{C}(\mathrm{B})}(x) = 1 \quad \text{et} \quad \Delta_{\mathbf{C}(\mathrm{B})}(x) = x \otimes x\}.\end{aligned}$$

Supposons de plus que le $\mathbf{O}_k$-module sous-jacent à $\mathbf{C}$ soit *admissible* (cf. 1.2.1), et posons

$$\mathrm{A} = \Gamma^*(\mathbf{C}) = \varprojlim \mathbf{C}(k/\mathfrak{l})^*.$$

Alors, les structures d'algèbres sur chaque $\mathbf{C}(k/\mathfrak{l})^*$ munissent A d'une structure de k-algèbre profinie. Pour tout objet B de $\mathbf{Alf}_{/k}$, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{Spf}(\mathrm{B}), \mathrm{Spf}(\mathrm{A})) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/\mathrm{B}}}(\mathrm{A} \,\widehat{\otimes}\, \mathrm{B}, \mathrm{B}).$$

Supposons enfin que $\mathbf{C}$ soit un $\mathbf{O}_k$-module *plat*. Alors, d'après 1.2.3, $\mathrm{A} = \Gamma^*(\mathbf{C})$ est un k-module pseudocompact *projectif*. De plus, on a vu dans la démonstration de la proposition 1.2.3 que, si $\mathfrak{l}_0$ est un idéal ouvert de k contenu dans le noyau de $k \to \mathrm{B}$, le système projectif

$$\varprojlim \mathbf{C}(k/\mathfrak{l})^* \,\widehat{\otimes}_k\, \mathrm{B}$$

est constant pour $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{l}_0$, et sa limite est $\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathbf{C}(\mathrm{B}), \mathrm{B})$, que nous noterons $\mathbf{C}(\mathrm{B})^*$. Enfin, d'après le lemme 1.3.5.A, on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\text{B-coalg.}}(\mathrm{B}, \mathbf{C}(\mathrm{B})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/\mathrm{B}}}(\mathbf{C}(\mathrm{B})^*, \mathrm{B}).$$

On obtient donc un isomorphisme de foncteurs $\mathrm{Spf}^*(\mathbf{C}) \simeq \mathrm{Spf}(\mathrm{A}) = \mathrm{Spf}(\Gamma^*(\mathbf{C}))$.

[54] N.D.E. : On rappelle (cf. $\mathrm{VII_A}$, 3.1) que toutes les coalgèbres considérées sont supposées *cocommutatives*, c.-à-d., telles que $t \circ \Delta = \Delta$, où $t(a \otimes b) = b \otimes a$.

Par conséquent, si l'on note $\mathscr{A}(\mathrm{X})$ l'algèbre affine d'une k-variété formelle X, on déduit de 1.2.3 :

Proposition. — *Les foncteurs* $\mathrm{X} \mapsto \mathbf{H}(\mathrm{X}) = \mathbf{V}_k^f(\mathscr{A}(\mathrm{X}))$ *et* $\mathbf{C} \mapsto \mathrm{Spf}^*(\mathbf{C}) = \mathrm{Spf}(\Gamma^*(\mathbf{C}))$ *définissent une* équivalence *entre la catégorie des* k-variétés formelles topologiquement plates *et celle des* $\mathbf{O}_k$-coalgèbres plates.

1.3.6. — Dans la suite de cet exposé, nous définirons plusieurs fois une k-variété formelle topologiquement plate X en exhibant la coalgèbre $\mathbf{H}(\mathrm{X})$. Il nous faudra alors interpréter au moyen de $\mathbf{H}(\mathrm{X})$ certaines propriétés géométriques de X. Nous donnons ici un exemple de cette situation : supposons donnée une section σ du morphisme structural $\mathrm{X} \to \mathrm{Spf}(k)$ et demandons-nous sous quelle condition σ induit un isomorphisme des espaces topologiques sous-jacents. [55]

Pour commencer, supposons k artinien. Soient $(\mathrm{H}, \Delta, \varepsilon)$ une k-coalgèbre plate, $\mathrm{H}^+ = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ et $\mathrm{A} = \mathrm{H}^*$ la k-algèbre profinie duale de H. Supposons donné un morphisme de k-coalgèbres $k \to \mathrm{H}$, c.-à-d., un élément ϕ de H tel que $\varepsilon(\phi) = 1$ et $\Delta(\phi) = \phi \otimes \phi$. Alors ϕ définit un morphisme continu d'algèbres $\Phi : \mathrm{A} \to k$, et donc une section $\sigma : \mathrm{Spf}(k) \to \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ de la projection $\mathrm{Spf}(\mathrm{A}) \to \mathrm{Spf}(k)$.

On définit des sous-k-modules de H en posant $\mathrm{H}_0 = k\phi$ et, pour $n \geqslant 1$, **503**

$$\mathrm{H}_n = \{x \in \mathrm{H} \mid \Delta(x) - x \otimes \phi \in \mathrm{H}_{n-1} \otimes \mathrm{H}^+\};$$

ceci vaut aussi pour $n = 0$ si l'on pose $\mathrm{H}_{-1} = (0)$. On voit, par récurrence sur n, que $\mathrm{H}_{n-1} \subseteq \mathrm{H}_n$. On dira que $\mathrm{H}_0 \subseteq \mathrm{H}_1 \subseteq \cdots$ est la *filtration de* H *définie par* ϕ.

Remarque. — Comme $\Delta(\mathrm{H}_n) \subseteq \mathrm{H}_n \otimes \mathrm{H}_0 \oplus \mathrm{H}_{n-1} \otimes \mathrm{H}^+$, on a $\Delta(\mathrm{H}_n) \subseteq \mathrm{H}_n \otimes \mathrm{H}$. Puisque Δ est cocommutative (i.e. $\sigma \circ \Delta = \Delta$, où $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$), on a également $\Delta(\mathrm{H}_n) \subseteq \mathrm{H} \otimes \mathrm{H}_n$. Lorsque H/H_n est *plat* sur k, il en résulte que H_n est une sous-coalgèbre de H, cf. 1.3.6.A (ii) ci-dessous. Mais en général, $\Delta : \mathrm{H}_n \to \mathrm{H}_n \otimes \mathrm{H}$ ne se factorise pas à travers $\mathrm{H}_n \otimes \mathrm{H}_n$. [56]

Lemme 1.3.6.A. — *Soient k un anneau* artinien, H *une k-coalgèbre* plate, $\mathrm{A} = \mathrm{H}^*$ *la k-algèbre profinie duale, ϕ un élément de* H *tel que $\varepsilon(\phi) = 1$ et $\Delta(\phi) = \phi \otimes \phi$. Soient* $\sigma : \mathrm{Spf}(k) \to \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ *la section de* $\mathrm{Spf}(\mathrm{A}) \to \mathrm{Spf}(k)$ *et* (H_n) *la filtration de* H *définies par ϕ.*

(i) σ *induit une bijection des ensembles sous-jacents* $\Leftrightarrow \mathrm{H} = \bigcup_n \mathrm{H}_n$. [57]

---

[55] N.D.E. : Dans le lemme 1.3.6.A qui suit, on a détaillé la démonstration du point (i), et l'on a ajouté le point (ii).

[56] N.D.E. : Par exemple, soient k_0 un corps, $k = k_0[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^n)$, où $n \geqslant 4$, t l'image de T dans k, et $\mathrm{H} = k[x]$ muni de l'augmentation ε et de la comultiplication Δ définies par $\varepsilon(x) = 0$ et $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + tx \otimes x$. Alors, pour $2 \leqslant i \leqslant n-2$, $t^{n-i}\, x \in \mathrm{H}_i$, mais $\Delta(t^{n-i}\, x)$ n'appartient pas à l'image de $\mathrm{H}_i \otimes \mathrm{H}_i$.

[57] N.D.E. : Dans ce cas, on dit parfois que la coalgèbre H est *connexe*, cf. par exemple [**MM65**].

(ii) *Si de plus chaque* H/H_n *est* plat *sur* k*, alors, pour tout* $n \geqslant 0$*,*

$$(*) \qquad \Delta(\mathrm{H}_n) \subseteq \sum_{i=0}^{n} \mathrm{H}_i \otimes \mathrm{H}_{n-i}\,;$$

en particulier, chaque H_n *est une* sous-coalgèbre *de* H.

Démonstration. Soit I le noyau de Φ. L'application $\mathrm{A} \to k$, $f \mapsto f(x)$ étant continue, pour tout $x \in \mathrm{H}$, si I^n est annulé par x, il en est de même de son adhérence $\overline{\mathrm{I}^n}$. On pose alors, pour tout $n \geqslant 1$,

$$(\overline{\mathrm{I}^n})^{\perp} = \{x \in \mathrm{H} \mid f(x) = 0, \quad \text{pour tout } f \in \overline{\mathrm{I}^n}\}.$$

Supposons que $\sigma : \mathfrak{m} \mapsto \Phi^{-1}(\mathfrak{m})$ soit une bijection de $\mathrm{Spf}(k)$ sur $\mathrm{Spf}(\mathrm{A})$. Comme I est contenu dans l'intersection des $\Phi^{-1}(\mathfrak{m})$, il résulte de 0.1.2 que la suite des idéaux (I^n) tend vers 0. Soit alors $x \in \mathrm{H}$; comme $\mathrm{J}(x) = \{f \in \mathrm{A} \mid f(x) = 0\}$ est un sous-k-module ouvert de A, il contient $\overline{\mathrm{I}^n}$ pour n assez grand, autrement dit, $x \in (\overline{\mathrm{I}^n})^{\perp}$.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{H} = \bigcup_n (\overline{\mathrm{I}^n})^{\perp}$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier ouvert de A ; il contient un sous-k-module ouvert de la forme

$$\mathscr{V}(x_1, \dots, x_s) = \{f \in \mathrm{A} \mid f(x_1) = \cdots = f(x_s) = 0\}.$$

D'après l'hypothèse, il existe un entier n tel que $x_1, \dots, x_s \in (\overline{\mathrm{I}^n})^{\perp}$, et donc $\mathrm{I}^n \subseteq \mathfrak{p}$. De plus, comme k est artinien, $\mathrm{Spf}(k)$ est un ensemble fini $\{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r\}$ et il existe un entier $t \geqslant 1$ tel que $(\prod_i \mathfrak{m}_i)^t = 0$, d'où

$$\prod_i \Phi^{-1}(\mathfrak{m}_i)^t \subseteq \mathrm{I}.$$

Donc $\mathfrak{p}$ contient le produit des $\Phi^{-1}(\mathfrak{m}_i)^{tn}$; puisque $\mathfrak{p}$ est premier, il en résulte que $\mathfrak{p}$ contient, donc égale, l'un des $\Phi^{-1}(\mathfrak{m}_i)$. On a ainsi démontré que :

$$\sigma \text{ est une bijection } \iff \mathrm{H} = \bigcup_n (\overline{\mathrm{I}^n})^{\perp}.$$

D'autre part, pour tout $n \geqslant 0$, soient Δ^n la comultiplication « itérée » $\mathrm{H} \to \mathrm{H}^{\otimes(n+1)}$, $\overline{\Delta^n}$ la composée de Δ^n avec la projection de $\mathrm{H}^{\otimes(n+1)}$ sur $(\mathrm{H}^+)^{\otimes(n+1)}$, et

$$\mathrm{H}'_n = \mathrm{Ker}(\overline{\Delta^n}) = \Big\{x \in \mathrm{H} \mid \Delta^n(x) \in \sum_{i=0}^{n} \mathrm{H}^{\otimes(n-i)} \otimes \mathrm{H}_0 \otimes \mathrm{H}^{\otimes i}\Big\}.$$

(On pose $\Delta^0 = \mathrm{id}_{\mathrm{H}}$, d'où $\mathrm{H}'_0 = \mathrm{H}_0$). On voit facilement, par récurrence sur n, que

$$(*) \qquad \mathrm{H}_n \subseteq \mathrm{H}'_n \subseteq (\overline{\mathrm{I}^{(n+1)}})^{\perp}.$$

Supposons maintenant H plat, donc *projectif* sur k, de sorte que $\mathrm{A}^{\dagger} = \mathrm{H}$, d'après 0.2.2, et montrons que $\mathrm{H}_n = (\overline{\mathrm{I}^{(n+1)}})^{\perp}$. C'est clair pour $n = 0$. Supposons-le donc vérifié pour $n < r$. Alors H_{r-1} est le noyau du morphisme $\mathrm{H} \to (\overline{\mathrm{I}^r})^{\dagger}$ et donc, puisque H^+ est plat, le morphisme

$$(\mathrm{H}/\mathrm{H}_{r-1}) \otimes \mathrm{H}^+ \longrightarrow (\overline{\mathrm{I}^r})^{\dagger} \otimes \mathrm{H}^+$$

est injectif. D'autre part, l'hypothèse entraîne que I est un k-module pseudocompact projectif (car facteur direct de $\mathrm{A} = \mathrm{H}^*$), d'où, d'après 0.3.6,

$$(\overline{\mathrm{I}^r} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{I})^\dagger \simeq (\overline{\mathrm{I}^r})^\dagger \otimes \mathrm{H}^+.$$

Alors, la suite exacte :

$$\overline{\mathrm{I}^r} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}/\overline{\mathrm{I}^{r+1}} \longrightarrow 0$$

donne par dualité la suite exacte : **504**

$$(1) \qquad (\overline{\mathrm{I}^r})^\dagger \otimes \mathrm{H}^+ \xleftarrow{\ \delta\ } \mathrm{H} \longleftarrow (\mathrm{A}/\overline{\mathrm{I}^{r+1}})^\dagger \longleftarrow 0,$$

où δ est obtenu en composant Δ_{H} avec la projection :

$$(2) \qquad \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H} \otimes \mathrm{H}^+ \longrightarrow (\mathrm{H}/\mathrm{H}_{r-1}) \otimes \mathrm{H}^+ \hookrightarrow (\overline{\mathrm{I}^r})^* \otimes \mathrm{H}^+.$$

Or, pour tout $u \in \mathrm{H}$, la projection de $\Delta(u)$ sur $\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}^+$ est $\Delta(u) - u \otimes \phi$. Alors, (1) et (2) montrent que si u appartient à $(\mathrm{A}/\overline{\mathrm{I}^{r+1}})^\dagger = (\overline{\mathrm{I}^{r+1}})^\perp$, alors $\Delta(u) - u \otimes \phi$ appartient au noyau de l'application $\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}^+ \to (\mathrm{H}/\mathrm{H}_{r-1}) \otimes \mathrm{H}^+$, c'est-à-dire à $\mathrm{H}_{r-1} \otimes \mathrm{H}^+$, et donc $u \in \mathrm{H}_r$. Ceci achève la démonstration du point (i), et montre aussi que $\mathrm{H}_n = \mathrm{Ker}(\overline{\Delta^n})$.

Démontrons (ii). Pour tout $i \geqslant 0$, posons $\mathrm{H}_i^+ = \mathrm{H}_i \cap \mathrm{H}^+$. Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $x \in \mathrm{H}_n$, $\overline{x} = x - \varepsilon(x)\phi$ appartient à H_n^+ et l'on a :

$$\Delta(x) = \varepsilon(x)\phi \otimes \phi + \overline{x} \otimes \phi + \phi \otimes \overline{x} + \overline{\Delta}(\overline{x}).$$

Donc, il suffit de montrer que :

$$\overline{\Delta}(\mathrm{H}_n^+) \subseteq \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{H}_i^+ \otimes \mathrm{H}_{n-i}^+.$$

Pour tout $i = 0, \dots, n-1$, $\overline{\Delta^n}$ se factorise en :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^+ \arrow[r, "\overline{\Delta}"] & \mathrm{H}^+ \otimes \mathrm{H}^+ \arrow[r, "\overline{\Delta^i} \otimes \overline{\Delta^{n-i-1}}"] \arrow[d] & (\mathrm{H}^+)^{\otimes(i+1)} \otimes (\mathrm{H}^+)^{\otimes(n-i)} \\
& \dfrac{\mathrm{H}^+}{\mathrm{H}_i^+} \otimes \dfrac{\mathrm{H}^+}{\mathrm{H}_{n-i-1}^+} \arrow[r, "f"] & \dfrac{\mathrm{H}^+}{\mathrm{H}_i^+} \otimes (\mathrm{H}^+)^{\otimes(n-i)}. \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

De plus, comme $\mathrm{H}^+/\mathrm{H}_i^+$ et $(\mathrm{H}^+)^{\otimes(n-i)}$ sont plats, les applications f et g ci-dessus sont injectives. Il en résulte que $\overline{\Delta(\mathrm{H}_n^+)}$ est contenu dans $\mathrm{H}_i^+ \otimes \mathrm{H}^+ + \mathrm{H}^+ \otimes \mathrm{H}_{n-i-1}^+$, pour tout $i = 0, \dots, n-1$. Le point (ii) découle alors du lemme ci-dessous, appliqué à $\mathrm{M} = \mathrm{H}^+$ et $\mathrm{E}_i = \mathrm{H}_{i-1}^+$.

Lemme 1.3.6.B. — *Soient k un anneau, $0 = \mathrm{E}_0 \subseteq \mathrm{E}_1 \subseteq \cdots \mathrm{E}_n \subseteq \mathrm{M}$ des k-modules. On suppose* M/E_i plat *pour tout i. Alors, on l'égalité*

$$\bigcap_{i=0}^{n} (\mathrm{E}_i \otimes \mathrm{M} + \mathrm{M} \otimes \mathrm{E}_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i \otimes \mathrm{E}_{n-i+1}.$$

Notons K (resp. S) le terme de gauche (resp. droite). On voit facilement que $S \subseteq K$; montrons la réciproque. Pour $i = 0, \dots, n$, posons $K_i = K \cap (E_i \otimes M)$. Pour tout $i = 1, \dots, n$, comme M/E_{n-i+1} et E_i/E_{i-1} sont plats, l'application τ_i ci-dessous est injective, et l'application composée :

$$(E_i/E_{i-1}) \otimes M \longrightarrow (E_i/E_{i-1}) \otimes (M/E_{n-i+1}) \xhookrightarrow{\tau_i} (M/E_{i-1}) \otimes (M/E_{n-i+1})$$

a pour noyau $(E_i/E_{i-1}) \otimes E_{n-i+1}$. Comme l'image de K_i dans $(E_i \otimes M)/(E_{i-1} \otimes M)$ est contenue dans, et contient, ce noyau, on en déduit que

$$K_i = K_{i-1} + E_i \otimes E_{n-i+1},$$

d'où le lemme.

Pour terminer ce paragraphe, revenons à un anneau pseudocompact arbitraire k. Soient $(\mathbf{H}, \Delta, \varepsilon)$ une $\mathbf{O}_k$-coalgèbre plate, $\mathbf{H}^+ = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$, $A = \Gamma^*(\mathbf{H})$ la k-algèbre profinie duale, $X = \mathrm{Spf}(A)$, de sorte que $\mathbf{H} = \mathbf{H}(X)$ (cf. 1.3.5). Supposons donné un morphisme de $\mathbf{O}_k$-coalgèbres $\phi : \mathbf{O}_k \to \mathbf{H}$; il définit une morphisme continu de k-algèbres $A \to k$, et donc une section σ du morphisme structural $X \to \mathrm{Spf}(k)$.

Pour tout objet B de $\mathbf{Alf}_{/k}$, on note $\mathbf{H}_0(B) = \phi(B) = B\phi_B$, où ϕ_B est l'élément $\phi(1_B)$ de $\mathbf{H}(B)$ et l'on définit des sous-$\mathbf{O}_k$-modules $\mathbf{H}_n$ de $\mathbf{H}$, en posant, pour $n \geqslant 1$,

$$\mathbf{H}_n(B) = \{u \in \mathbf{H}(B) \mid \Delta(u) - u \otimes \phi_B \in \mathbf{H}_{n-1}(B) \otimes \mathbf{H}^+(B)\}.$$

On obtient ainsi une filtration $\mathbf{H}_0 \subseteq \mathbf{H}_1 \subseteq \cdots$ de $\mathbf{H}(X)$. D'après ce qui précède :

Proposition. — *Pour que σ induise un isomorphisme sur les espaces topologiques sous-jacents, il faut et il suffit que $\mathbf{H}(X)$ soit la réunion des $\mathbf{H}_n$.*

1.4. Théorème. — *Soient k un anneau pseudocompact et $d_0, d_1 : X_1 \rightrightarrows X$ un couple d'équivalence de $\mathbf{Vaf}_{/k}$ (cf. Exp. V, § 2.b) tel que d_1 soit topologiquement plat. Alors la projection canonique de X sur X/X_1 ($= \mathrm{Coker}(d_0, d_1)$) est surjective et topologiquement plate, et le morphisme $X_1 \to X \times_{X/X_1} X$ de composantes d_0 et d_1 est un isomorphisme.*

La démonstration de ce théorème occupe les paragraphes 1.4.1, 1.4.2 et 1.4.3.

1.4.1. — *Montrons d'abord qu'on peut se ramener au cas où X a un seul point.* Comme nous avons affaire à un couple d'équivalence, on voit comme dans l'Exp. V, § 3.e), qu'on
505 définit une relation d'équivalence dans l'ensemble sous-jacent à X en déclarant que deux points x, y sont équivalents s'il existe un point z de X_1 tel que $d_0(z) = y$ et $d_1(z) = x$. On peut évidemment supposer sans inconvénient que X contient une seule classe d'équivalence pour cette relation, autrement dit que X/X_1 a un seul point (voir la construction de X/X_1 donnée en 1.2).

Dans ce cas, soient x un point quelconque de X et U la variété formelle qui a x pour seul point et qui a même anneau local que X en x. On voit alors comme dans l'Exp. V, § 6, que la relation d'équivalence induite par (d_0, d_1) sur U vérifie encore les hypothèses du théorème et qu'il suffit de faire la preuve pour cette dernière relation d'équivalence (U est une « quasi-section »).

Rappelons brièvement le principe de la démonstration faite dans l'Exp. V, § 6. Posons $V = d_0^{-1}(U) = U \times_{i,d_0} X_1$, où i est l'inclusion de U dans X ; soient u et v les morphismes de source V induits respectivement par d_0 et d_1 :

$$X \xleftarrow{\ v\ } V \xrightarrow{\ u\ } U.$$

Il est clair que u et v sont topologiquement plats et que u est surjectif ; comme X contient une seule classe d'équivalence, v est surjectif. Si (v_0, v_1) est l'image réciproque du couple d'équivalence (d_0, d_1) par v (cf. V, 3.a)), il résulte de V, 3.c) et 3.d), que X/X_1 et le quotient de U par la relation d'équivalence induite par (d_0, d_1) s'identifient tous deux à $\mathrm{Coker}(v_0, v_1)$. On voit alors, comme dans la démonstration de V, 6.1, que si la conclusion du théorème 1.4 est vérifiée pour U, elle l'est aussi pour X.

1.4.2. — On se trouve ainsi ramené au cas où X a un seul point. [58] Considérons alors le diagramme commutatif suivant (cf. V, § 1, (0,1,2)) :

$$\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[r, shift left, "d'_1"] \arrow[r, shift right, "d'_0"'] \arrow[d, "d'_2"'] & X_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"] & X \arrow[d] \\
X_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & X \arrow[r] & X/X_1
\end{tikzcd}$$

où X_2 est le produit fibré $X_1 \underset{d_1,d_0}{\times} X_1$, et où d'_0, d'_1 et d'_2 sont respectivement les 506
morphismes « $(x,y,z) \mapsto (x,y)$ », « $(x,y,z) \mapsto (x,z)$ » et « $(x,y,z) \mapsto (y,z)$ ». [59]

Si B, A, A_1 et A_2 désignent respectivement les algèbres affines de X/X_1, X, X_1 et X_2, le diagramme précédent induit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A_2 & A_1 \arrow[l, shift right, "j_1"'] \arrow[l, shift left, "j_0"] & A \arrow[l, "i_0"'] \\
A_1 \arrow[u, "j_2"] & A \arrow[l, shift right, "i_1"'] \arrow[l, shift left, "i_0"] \arrow[u, "i_1"'] & B \arrow[l, "i"'] \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel les deux lignes sont exactes et les carrés déterminés par (i_0, j_0) et (i_1, j_1) cocartésiens. Comme le morphisme $X_1 \to X \times X$ de composantes d_0 et d_1 est un monomorphisme par hypothèse, le morphisme $A \mathbin{\widehat{\otimes}_k} A \to A_1$ de composantes i_0 et i_1 est surjectif, d'après la proposition 1.3.

Cela signifie que i_1 fait de A_1 un A-module pseudocompact (supposé topologiquement libre), engendré par $i_0(A)$. Comme A est local, le lemme 1.4.3 ci-dessous entraîne

[58] N.D.E. : On peut donc supposer k *local*.

[59] N.D.E. : cf. Exp. V, § 2.b).

l'existence d'un k-module topologiquement libre V et d'un morphisme de k-modules pseudocompacts $f : \mathrm{V} \to \mathrm{A}$ tels que le morphisme

$$\alpha_1 : \ \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{A}_1, \qquad a \mathbin{\widehat{\otimes}} v \mapsto i_1(a) \cdot i_0(f(v))$$

507 soit inversible. Soient $\alpha : \mathrm{B} \widehat{\otimes}_k \mathrm{V} \to \mathrm{A}$ et $\alpha_2 : \mathrm{A}_1 \widehat{\otimes}_k \mathrm{V} \to \mathrm{A}_2$ les morphismes :

$$b \mathbin{\widehat{\otimes}} v \mapsto i(b) \cdot f(v) \qquad \text{et} \qquad a \mathbin{\widehat{\otimes}} v \mapsto j_2(a) \cdot j_0 i_0(f(v)).$$

Dans le diagramme commutatif suivant, les deux lignes sont donc exactes et les deux carrés de gauche sont cocartésiens. Comme α_1 est inversible, il en va de même pour α_2, donc pour α.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_1 \arrow[l, shift right, "j_1"'] \arrow[l, shift left, "j_0"] & \mathrm{A} \arrow[l, "i_0"'] \\
\mathrm{A}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V} \arrow[u, "\alpha_2"] & \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V} \arrow[u, "\alpha_1"'] \arrow[l, shift right, "i_1 \widehat{\otimes} \mathrm{V}"'] \arrow[l, shift left, "i_0 \widehat{\otimes} \mathrm{V}"] & \mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V} \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[l, "i \widehat{\otimes} \mathrm{V}"']
\end{tikzcd}$$

Ceci montre d'une part que A est topologiquement libre sur B, et qu'on obtient une pseudobase (cf. 0.2.1) de A_1 sur A (où A_1 est considéré comme A-module au moyen de i_1) en prenant l'image par i_0 d'une pseudobase de A sur B ; cela entraîne que le morphisme $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{B}} \mathrm{A} \to \mathrm{A}_1$ de composantes i_1 et i_0 est inversible :

$$\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{B}} \mathrm{A} \simeq \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{B}} \mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V} \simeq \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V} \simeq \mathrm{A}_1 \,.$$

Ceci prouve le théorème 1.4, modulo le lemme 1.4.3 qui suit.

1.4.3. Lemme. — *Soient k un anneau pseudocompact* local*, A une k-algèbre profinie* locale*, A_1 un A-module* topologiquement libre *et $i_0 : \mathrm{M} \to \mathrm{A}_1$ un morphisme de k-modules pseudocompacts tels que l'application*

$$\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A}_1, \qquad a \mathbin{\widehat{\otimes}} m \mapsto a \cdot i_0(m)$$

soit surjective*. Il existe alors un k-module* topologiquement libre *V et un morphisme de k-modules pseudocompacts $f : \mathrm{V} \to \mathrm{M}$ tels que l'application*

$$\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{A}_1, \qquad a \mathbin{\widehat{\otimes}} v \mapsto a \cdot i_0(f(v))$$

soit bijective.

Comme tout k-module pseudocompact est le quotient d'un k-module topologique-
508 ment libre, on peut supposer sans inconvénient que M est topologiquement libre ; prenons donc pour M le produit direct d'une famille $(\mathrm{M}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ d'exemplaires de k. Dans ce cas, $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{M}$ n'est autre que le produit $\prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{M}_i$, dont chaque facteur est isomorphe à A, donc est projectif et indécomposable. Comme l'application $a \mathbin{\widehat{\otimes}} m \mapsto a \cdot i_0(m)$ est surjective et que A_1 est projectif, le noyau de cette application est un facteur direct de $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{M}$; il résulte donc du théorème d'échange (0.3.4) que ce noyau a pour supplémentaire un produit partiel $\prod_{i \in \mathrm{J}} \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{M}_i$, où J désigne une certaine partie de I.

1.5. Soit k un anneau pseudocompact.

Définition. — Nous dirons qu'une famille de morphismes $f_i : \mathrm{X}_i \to \mathrm{X}$ de $\mathbf{Vaf}_{/k}$ est une *famille surjective topologiquement plate* si le morphisme $\coprod_i \mathrm{X}_i \to \mathrm{X}$, induit par les f_i, est surjectif et topologiquement plat ; cela signifie que chaque f_i est topologiquement plat et que tout point de X appartient à l'image d'au moins l'un des X_i.

Il résulte de 1.3.3 que les familles surjectives, topologiquement plates définissent une *prétopologie* sur $\mathbf{Vaf}_{/k}$ (IV 4.2.5) ; la topologie correspondante sera appelée la *topologie plate sur* $\mathbf{Vaf}_{/k}$.

D'après IV, 4.3.5, il est clair qu'un foncteur $\mathrm{F} : (\mathbf{Vaf}_{/k})^0 \to (\mathbf{Ens})$ est un faisceau pour la topologie plate si et seulement si F transforme toute somme directe en produit direct et si la suite

$$\begin{tikzcd} \mathrm{FY} \arrow[r, "\mathrm{F}f"] & \mathrm{FX} \arrow[r, shift left, "\mathrm{F}(\mathrm{pr}_1)"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{F}(\mathrm{pr}_2)"'] & \mathrm{F}(\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}) \end{tikzcd}$$

est exacte pour tout morphisme surjectif topologiquement plat $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$.

[60] D'après IV, 4.5, la proposition 1.3.1 entraîne que la topologie plate est *moins* **509**
fine que la topologie canonique, c.-à-d., pour tout objet X de $\mathbf{Vaf}_{/k}$, le foncteur $\mathbf{h}_{\mathrm{X}} : \mathrm{T} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{T}, \mathrm{X})$ est un *faisceau* pour la topologie plate. (Dans la suite, on identifiera, comme d'habitude (cf. Exp. I), X à $\mathbf{h}_{\mathrm{X}}$.)

D'après IV, 4.6.5, on peut reformuler le théorème 1.4 comme suit.

Théorème. — *Soient k un anneau peudocompact, $d_0, d_1 : \mathrm{X}_1 \rightrightarrows \mathrm{X}$ un couple d'équivalence dans $\mathbf{Vaf}_{/k}$, et X/X_1 la variété formelle quotient* (i.e. $\mathrm{Coker}(d_0, d_1)$, cf. 1.2). *Si d_1 est* topologiquement plat*, alors* X/X_1 *représente le* faisceau quotient *pour la topologie plate.*

1.6. Pour terminer ces généralités sur les variétés formelles, il nous reste à définir brièvement les variétés formelles étales.

Définition. — [61] Soient X une k-variété formelle, A son algèbre affine. On dit que X est *étale* si elle vérifie l'une des conditions équivalents suivantes :

(i) A est une k-algèbre topologique *formellement étale* (cf. EGA 0_{IV}, 19.10.2), c.-à-d., pour toute k-algèbre topologique *discrète* C (pas nécessairement artinienne), et tout idéal nilpotent J de C, tout morphisme de k-algèbres topologiques $\mathrm{A} \to \mathrm{C}/\mathrm{J}$ se relève de façon unique en un morphisme $\mathrm{A} \to \mathrm{C}$.

(i′) Pour tout idéal ouvert $\mathfrak{I}$ de k, $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k (k/\mathfrak{I}) = \mathrm{A}/\overline{\mathrm{A}\mathfrak{I}}$ est formellement étale sur $k/\mathfrak{I}$.

---

[60] N.D.E. : On a modifié l'original dans ce qui suit. En particulier, on a remplacé l'énoncé : « si $d_0, d_1 : \mathrm{X}_1 \rightrightarrows \mathrm{X}$ est une relation d'équivalence telle que d_1 soit topologiquement plat, la formation du quotient commute avec $\mathbf{h}$ » par le théorème ci-dessous.

[61] N.D.E. : On a réuni, pour les mettre en évidence, les trois formulations (et dans le point (iii), on a ajouté l'hypothèse de platitude, omise dans l'original). Reste à détailler l'équivalence des trois conditions.

(ii) X est topologiquement plate sur k, et, pour tout point $x \in \mathrm{X}$, de projection s sur $\mathrm{Spf}(k)$, $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \kappa(s)$ est une extension finie séparable du corps résiduel $\kappa(s)$ de s.

(ii′) Pour tout idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de k, les composantes locales (cf. 0.1) de $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} (k/\mathfrak{l})$ sont des algèbres *étales finies* sur $k/\mathfrak{l}$.

(iii) X est topologiquement plate sur k et le morphisme diagonal $\Delta_{\mathrm{X}} : \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ est un *isomorphisme local*, i.e. Δ_{X} induit un isomorphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{X}\times\mathrm{X},\Delta(x)} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ pour tout point x de X.

L'équivalence des trois conditions résulte de SGA 1, I.

Notons $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Vaf}_{/k}$ formée des variétés étales. [62]

Proposition. — *L'inclusion de* $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k}$ *dans* $\mathbf{Vaf}_{/k}$ *possède un foncteur adjoint à gauche* $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_e$.

On peut décrire X_e de la façon suivante. La variété X_e a les mêmes points que X. Si x est un point de X, de projection s sur $\mathrm{Spf}(k)$, le corps résiduel $\kappa(x)$ est une extension finie de $\kappa(s)$. Notons $\kappa_e(x)$ la clôture séparable de $\kappa(s)$ dans $\kappa(x)$.

510 [63] L'algèbre locale $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_e,x}$ est un k-module pseudocompact projectif et l'on a un isomorphisme

$$\mathscr{O}_{\mathrm{X}_{e,x}} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \kappa(s) \simeq \kappa_e(x).$$

Pour tout isomorphisme q_x de $\kappa(s) \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathscr{O}_{\mathrm{X}_e,x}$ dans $\kappa(x)$, il y a un morphisme d'algèbres profinies $p_x : \mathscr{O}_{\mathrm{X}_e,x} \to \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ et un seul qui soit compatible avec q_x et avec les projections canoniques de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_e,x}$ et $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ sur $\kappa(s) \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathscr{O}_{\mathrm{X}_e,x}$ et $\kappa(x)$. Ces morphismes p_x définissent un morphisme canonique p de X dans X_e, qui est fonctoriel en X. Il résulte de SGA 1, I que tout morphisme de X dans une variété formelle étale se factorise d'une manière et d'une seule à travers p.

1.6.1. — Soient Y une k-variété formelle *étale* et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de $\mathbf{Vaf}_{/k}$. On a alors le carré cartésien ci-dessous, où Γ_f est le morphisme graphe $\mathrm{X} \to \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, de composantes id_{X} et f,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, "\Gamma_f"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \arrow[d, "f \boxtimes \mathrm{id}_{\mathrm{Y}}"] \\ \mathrm{Y} \arrow[r, "\Delta_{\mathrm{Y}}"] & \mathrm{Y} \times \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$

Il s'ensuit que Γ_f est un isomorphisme local, donc que $f = \mathrm{pr}_{\mathrm{Y}} \circ \Gamma_f$ est topologiquement plat si pr_{Y} l'est, par exemple si X est topologiquement plat sur k.

Réciproquement, comme Y est topologiquement plat, X est topologiquement plat sur k si X l'est sur Y (1.3.3). Prenant en particulier pour f le morphisme canonique $p : \mathrm{X} \to \mathrm{X}_e$ de 1.6, on obtient :

[62] N.D.E. : On a mis en évidence la proposition qui suit, et l'on a détaillé sa démonstration.
[63] N.D.E. : Détailler, ou donner une référence, pour ce qui suit.

Lemme. — X *est topologiquement plat sur* X_e *si et seulement si* X *est topologiquement plat sur* k.

2. Généralités sur les groupes formels

511

2.1. Soient k un anneau pseudocompact et G un k-*groupe formel*, c'est-à-dire un groupe de la catégorie $\mathbf{Vaf}_{/k}$ des variétés formelles sur k. Soit A l'algèbre affine de G. La loi de composition de G définit évidemment un *morphisme diagonal*, c.-à-d., un homomorphisme de k-algèbres profinies $\Delta_A : A \to A \widehat{\otimes}_k A$; cet homomorphisme vérifie les conditions suivantes :

(i) le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta_A"] \arrow[d, "\Delta_A"'] & A \widehat{\otimes}_k A \arrow[d, "\Delta_A \widehat{\otimes} \mathrm{id}_A"] \\ A \widehat{\otimes}_k A \arrow[r, "\mathrm{id}_A \widehat{\otimes} \Delta_A"] & A \widehat{\otimes}_k A \widehat{\otimes}_k A \end{tikzcd}$$

est commutatif.

(ii) il existe une *augmentation* (nécessairement unique), c'est-à-dire un homomorphisme de k-algèbres profinies $\varepsilon_A : A \to k$ tel que les applications composées

$$A \xrightarrow{\Delta_A} A \widehat{\otimes}_k A \xrightarrow{\varepsilon_A \widehat{\otimes} \mathrm{id}_A} k \widehat{\otimes}_k A \simeq A$$

$$\text{et} \qquad A \xrightarrow{\Delta_A} A \widehat{\otimes}_k A \xrightarrow{\mathrm{id}_A \widehat{\otimes} \varepsilon_A} A \widehat{\otimes}_k k \simeq A$$

soient les applications identiques de A.

(iii) il existe un *antipodisme* (nécessairement unique), c'est-à-dire un homomorphisme de k-algèbres profinies $c_A : A \to A$ tel que l'application composée

$$A \xrightarrow{\Delta_A} A \widehat{\otimes}_k A \xrightarrow{c_A \widehat{\otimes} \mathrm{id}_A} A \widehat{\otimes}_k A \xrightarrow{m_A} A$$

soit égale à $\eta_A \circ \varepsilon_A$, si l'on note m_A l'application linéaire qui envoie $a \widehat{\otimes} b$ sur ab et η_A 512
l'application $\lambda \mapsto \lambda 1_A$ de k dans A.

[64] Réciproquement, la donnée de $(\Delta_A, \varepsilon_A, c_A)$ vérifiant (i)–(iii) munit G d'une structure de k-groupe formel [65]. Explicitement, pour toute k-algèbre profinie B, l'ensemble $\mathrm{Hom}_c(A, B)$ des morphismes continus de k-*modules* $\phi : A \to B$ est muni d'une structure de groupe, fonctorielle en B, définie par

$$\phi \cdot \phi' = m_B \circ (\phi \widehat{\otimes} \phi') \circ \Delta_A,$$

l'élément neutre étant $\eta_B \circ \varepsilon_A$ (où m_B est la multiplication de B et η_B l'application $\lambda \mapsto \lambda 1_B$ de k dans B), et $\phi \circ c_A$ étant l'inverse de ϕ ; et l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(A, B)$ des morphismes continus de k-*algèbres* $A \to B$ en est un sous-groupe (car l'algèbre B est commutative).

[64] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit ; en particulier, on a explicité ce qu'est un morphisme de groupes formels $K \to G$, cf. la proposition 2.3.1.
[65] N.D.E. : On dira aussi que A est un *cogroupe* dans la catégorie des k-algèbres profinies.

Définition. — Un *morphisme* de k-groupes formels $\theta : \mathrm{K} \to \mathrm{G}$ est, par définition, un morphisme de k-variétés formelles qui respecte les structures de groupe. Si B (resp. A) est l'algèbre affine de K (resp. G) et si $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est le morphisme correspondant à θ, ceci équivaut à dire que f est compatible avec les comultiplications, c.-à-d.,

$$(f \mathbin{\widehat{\otimes}} f) \circ \Delta_{\mathrm{A}} = \Delta_{\mathrm{B}} \circ f$$

(les conditions $\varepsilon_{\mathrm{B}} \circ f = \varepsilon_{\mathrm{A}}$ et $c_{\mathrm{B}} \circ f = f \circ c_{\mathrm{A}}$ étant alors automatiquement vérifiées). On notera $\mathbf{Grf}_{/k}$ la catégorie des k-groupes formels.

Notations. — Dans la suite, nous appellerons *idéal d'augmentation* de A l'idéal $\mathrm{I}_{\mathrm{A}} = \mathrm{Ker}(\varepsilon_{\mathrm{A}})$ (c'est un idéal ouvert).

Nous noterons $\omega_{\mathrm{G}/k}$ le k-module pseudocompact $\mathrm{I}_{\mathrm{A}}/\overline{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^2}$, c'est-à-dire le quotient de I_{A} par l'idéal fermé engendré par les produits xy, pour $x, y \in \mathrm{I}_{\mathrm{A}}$.

2.2. Définition. — Soit $\mathbf{H}$ un groupe de la catégorie des coalgèbres sur $\mathbf{O}_k$, i.e. pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$, $\mathbf{H}(\mathrm{C})$ est muni d'une structure de C-coalgèbre en groupes ($\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ 3.2 ; à la suite de Manin, nous dirons *bialgèbre* [66] au lieu de coalgèbre en groupes) ; de plus, si $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ est un morphisme de $\mathbf{Alf}_{/k}$, l'application $\mathrm{D} \otimes_{\mathrm{C}} \mathbf{H}(\mathrm{C}) \to \mathbf{H}(\mathrm{D})$ est un homomorphisme de D-bialgèbres. Nous résumerons ces propriétés en disant que $\mathbf{H}$ est une *bialgèbre* sur $\mathbf{O}_k$.

Il est clair que le foncteur $\mathbf{H} \mapsto \mathrm{Spf}^*(\mathbf{H})$ de 1.3.5 commute aux produits finis. Il transforme donc une bialgèbre sur $\mathbf{O}_k$ en un *k-foncteur en groupes*, c'est-à-dire, un foncteur (covariant) de $\mathbf{Alf}_{/k}$ dans la catégorie des groupes.

Et en effet, pour toute k-algèbre de longueur finie C, les éléments de

$$\mathrm{Spf}^*(\mathbf{H})(\mathrm{C}) = \mathrm{Spf}^*(\mathbf{H}(\mathrm{C})) = \{x \in \mathbf{H}(\mathrm{C}) \mid \varepsilon(x) = 1 \ \text{ et } \ \Delta(x) = x \otimes x\}$$

forment un groupe pour la multiplication de l'algèbre $\mathbf{H}(\mathrm{C})$ (cf. $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ 3.2.2). Notons d'ailleurs que la condition $\Delta(x) = x \otimes x$ entraîne l'égalité $\varepsilon(x) = \varepsilon(x)^2$, donc aussi $\varepsilon(x) = 1$ si C est locale. [67]

513 ***2.2.1***. — Une bialgèbre $\mathbf{H}$ sur $\mathbf{O}_k$ est dite *plate* si le module sous-jacent est plat (1.2.1). [68] Si $\mathbf{H}$ est plate alors, d'après 1.3.5, $\mathrm{A} = \Gamma^*(\mathbf{H})$ est une k-algèbre profinie topologiquement plate, et $\mathrm{Spf}^*(\mathbf{H})$ est isomorphe, comme foncteur de $(\mathbf{Alf}_{/k})^0 = \mathbf{Vaf}_{/k}$ vers $(\mathbf{Ens})$, au foncteur

$$\mathrm{Spf}(\mathrm{A}) : \ \mathrm{C} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{Spf}(\mathrm{C}), \mathrm{Spf}(\mathrm{A})).$$

La structure de groupe de $\mathrm{Spf}^*(\mathbf{H})$ munit donc $\mathscr{G}(\mathbf{H}) = \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ d'une structure de groupe formel, qui est décrite explicitement comme suit.

[66] N.D.E. : On dit aussi *bigèbre* (cf. [**BAlg**, III, § 11.4]) ; d'autre part, toutes les bialgèbres considérées ici sont supposées *cocommutatives*.

[67] N.D.E. : On a corrigé l'original, en remplaçant « *si k est local* » par « *si* C *est locale* ».

[68] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$, comme le C-module sous-jacent à $\mathbf{H}(\mathrm{C})$ est projectif, on déduit du lemme 1.2.3.A, par récurrence sur n, des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{H}(\mathrm{C})^*\big)^{\widehat{\otimes}(n+1)} &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}\big(\mathbf{H}(\mathrm{C}), (\mathbf{H}(\mathrm{C})^*)^{\widehat{\otimes}\, n}\big)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}\big(\mathbf{H}(\mathrm{C}), (\mathbf{H}(\mathrm{C})^{\otimes n})^*\big) \simeq \big(\mathbf{H}(\mathrm{C})^{\otimes(n+1)}\big)^*.\end{aligned}$$

On déduit de ceci (pour $n = 1, 2$) que la structure de C-algèbre de $\mathbf{H}(\mathrm{C})$ munit $\mathbf{H}(\mathrm{C})^*$ d'une application diagonale vérifiant les conditions 2.1 (i)–(iii), tout ceci de manière fonctorielle en C.

Par conséquent, $\mathrm{A} = \Gamma^*(\mathbf{H}) = \varprojlim \mathbf{H}(k/\mathfrak{l})^*$ est munie d'une structure de cogroupe dans $\mathbf{Alp}_{/k}$, qui définit sur $\mathscr{G}(\mathbf{H})$ la structure de groupe formel annoncée.

Réciproquement, soit G un k-groupe formel topologiquement plat, d'algèbre affine A, et notons $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ la $\mathbf{O}_k$-coalgèbre $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{A})$ (cf. 1.2.3). Le morphisme diagonal Δ_{A} : $\mathrm{A} \to \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{A}$ induit alors, pour toute k-algèbre de longueur finie C, une application C-linéaire

$$\mathbf{V}_k^f(\mathrm{A})(\mathrm{C}) \underset{\mathrm{C}}{\otimes} \mathbf{V}_k^f(\mathrm{A})(\mathrm{C}) \longrightarrow \mathbf{V}_k^f(\mathrm{A})(\mathrm{C})$$

qui fait de la coalgèbre $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{A})(\mathrm{C})$ une C-bialgèbre. On dit que $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ est *la bialgèbre du groupe formel* G. Donc, d'après 1.3.5 :

Proposition. — *Le foncteur* $\mathrm{G} \mapsto \mathbf{H}(\mathrm{G})$ *est une équivalence de la catégorie des k-groupes formels* topologiquement plats *sur celle des $\mathbf{O}_k$-bialgèbres* plates. *Le foncteur* $\mathbf{H} \mapsto \mathscr{G}(\mathbf{H})$ *en est un « inverse à isomorphisme fonctoriel près ».*

Lorsque k est un anneau artinien et G un k-groupe formel topologiquement plat, le foncteur $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ est évidemment déterminé par sa valeur $\mathrm{H}(\mathrm{G}) = \mathbf{H}(\mathrm{G})(k)$ en k. On dit aussi que H(G) *est la bialgèbre de* G. On obtient donc :

Corollaire. — *Lorsque k est* artinien, *le foncteur* $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{H}(\mathrm{G})$ *est une équivalence de la catégorie des k-groupes formels* topologiquement plats *sur la catégorie des k-bialgèbres* plates.

2.2.2. — Supposons pour simplifier k artinien et soit G un k-groupe formel, commutatif, topologiquement plat. Dans ce cas, la bialgèbre H(G) a une multiplication commutative, de sorte que H(G) est un cogroupe dans la catégorie des k-algèbres commutatives ($\mathrm{VII_A}$ 3.3). On obtient donc : **514**

Proposition. — *Si k est* artinien, *le foncteur* $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{Spec}\,\mathrm{H}(\mathrm{G})$ *est une anti-équivalence de la catégorie des* k-groupes formels commutatifs topologiquement plats *sur celle des* k-schémas en groupes commutatifs, affines et plats.

En particulier : *si k est un corps, on obtient une anti-équivalence de la catégorie des k-groupes formels commutatifs sur celle des k-schémas en groupes commutatifs affines.*

2.3. Considérons maintenant un k-groupe formel arbitraire G d'algèbre affine A. Notons toujours $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ le $\mathbf{O}_k$-module $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{A})$ dual de A et désignons par φ_{G} l'homomorphisme fonctoriel

$$\varphi_{\mathrm{G}} : \ \mathbf{H}(\mathrm{G}) \underset{k}{\otimes} \mathbf{H}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathbf{H}(\mathrm{G} \times \mathrm{G})$$

qui est induit par l'application naturelle (0.3.6), pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$:

$$(\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{C})^* \otimes_{\mathrm{C}} (\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{C})^* \longrightarrow \big((\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{C}) \mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{C}}} (\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{C})\big)^* .$$

Si $m : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ est la multiplication de G, l'application composée :

$$\mathbf{H}(\mathrm{G}) \underset{k}{\otimes} \mathbf{H}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\varphi_{\mathrm{G}}} \mathbf{H}(\mathrm{G} \times \mathrm{G}) \xrightarrow{\mathbf{H}(m)} \mathbf{H}(\mathrm{G})$$

fait de $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ une algèbre sur $\mathbf{O}_k$; pour tout $\mathrm{C} \in \mathbf{Alf}_{/k}$, l'élément unité de $\mathbf{H}(\mathrm{G})(\mathrm{C}) =$
515 $(\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{C})^*$ est l'augmentation de $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{C}$ (cf. 2.1). Nous dirons que $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ est *l'algèbre du groupe* G.

Lorsque G est *topologiquement plat* sur k, φ_{G} est un isomorphisme et la structure d'algèbre que nous venons de définir coïncide évidemment avec celle de 2.2.1. Dans le cas général cependant, φ_{G} n'est pas inversible, de sorte que le morphisme δ_{G} : $\mathbf{H}(\mathrm{G}) \to \mathbf{H}(\mathrm{G} \times \mathrm{G})$, qui est induit par le morphisme diagonal « $x \mapsto (x, x)$ » de G dans $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$, ne se factorise pas canoniquement à travers $\mathbf{H}(\mathrm{G}) \otimes_k \mathbf{H}(\mathrm{G})$.

2.3.1 Proposition. — *Soient* K *et* G *deux k-groupes formels, d'algèbres affines* B *et* A. *On suppose* K topologiquement plat *sur k. Il existe alors une bijection canonique de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grf}_{/k}}(\mathrm{K}, \mathrm{G})$ *sur l'ensemble des homomorphismes de $\mathbf{O}_k$-algèbres unitaires* $h : \mathbf{H}(\mathrm{K}) \to \mathbf{H}(\mathrm{G})$ *tels que le diagramme*

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{H}(\mathrm{K}) \otimes_k \mathbf{H}(\mathrm{K}) \arrow[r, "h \otimes h"] & \mathbf{H}(\mathrm{G}) \otimes_k \mathbf{H}(\mathrm{G}) \arrow[dr, "\varphi_{\mathrm{G}}"] & \\ & & \mathbf{H}(\mathrm{G} \times \mathrm{G}) \\ \mathbf{H}(\mathrm{K}) \arrow[uu, "\Delta_{\mathbf{H}(\mathrm{K})}"] \arrow[r, "h"] & \mathbf{H}(\mathrm{G}) \arrow[ur, "\delta_{\mathrm{G}}"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Comme K est topologiquement plat, $\mathbf{H}(\mathrm{K})$ est muni d'une structure de bialgèbre (cf. 2.2) et $\Delta_{\mathbf{H}(\mathrm{K})}$ en est le morphisme diagonal ; autrement dit, avec les notations de 2.3, on a $\Delta_{\mathbf{H}(\mathrm{K})} = \varphi_{\mathrm{K}}^{-1} \circ \delta_{\mathrm{K}}$. Lorsque G est aussi topologiquement plat sur k, notre proposition résulte de l'équivalence de catégories définie en 2.2.1.

516 Dans le cas général, on peut supposer k artinien et raisonner sur les algèbres $\mathrm{H}(\mathrm{K}) = \mathrm{B}^\dagger$ et $\mathrm{H}(\mathrm{G}) = \mathrm{A}^\dagger$. Soient $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ l'ensemble des applications k-linéaires continues de A dans B et $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{B}^\dagger, \mathrm{A}^\dagger)$ l'ensemble des applications k-linéaires de $\mathrm{B}^\dagger$ dans $\mathrm{A}^\dagger$.

[69] D'après 0.3.6.A, on sait que si M, P sont des k-modules pseudocompacts, et si P est *projectif*, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}, \mathrm{P}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\mathrm{P}^\dagger, \mathrm{M}^\dagger), \qquad f \mapsto f^t$$

(où f^t désigne la transposée de f) est bijective. (On appliquera ceci à $\mathrm{M} = \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A}$ et $\mathrm{P} = \mathrm{B}$, ou bien $\mathrm{M} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{P} = \mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{B}$).

Soit $f \in \mathrm{Hom}_c(\mathrm{A}, \mathrm{B})$. Considérons les diagrammes ci-dessous, où les carrés (0) sont commutatifs, et où les deux flèches verticales non nommées sont $(f \mathbin{\widehat{\otimes}} f)^t$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A} \arrow[r, "m_{\mathrm{A}}"] \arrow[d, "f \widehat{\otimes} f"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \mathrm{A} \arrow[r, "\Delta_{\mathrm{A}}"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A} \arrow[d, "f \widehat{\otimes} f"] \\
\mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{B} \arrow[r, "m_{\mathrm{B}}"'] & \mathrm{B} \arrow[r, "\Delta_{\mathrm{B}}"'] & \mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{B}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}^\dagger \otimes \mathrm{A}^\dagger \arrow[r, "\varphi_{\mathrm{G}}"] & (\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A})^\dagger & \mathrm{A}^\dagger \arrow[l, "\delta_{\mathrm{G}} = m_{\mathrm{A}}^t"'] & (\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A})^\dagger \arrow[l, "\Delta_{\mathrm{A}}^t"'] & \mathrm{A}^\dagger \otimes \mathrm{A}^\dagger \arrow[l, "\varphi_{\mathrm{G}}"'] \\
\mathrm{B}^\dagger \otimes \mathrm{B}^\dagger \arrow[u, "f^t \otimes f^t"] \arrow[r, equal] \arrow[ur, phantom, "(0)"] & (\mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{B})^\dagger \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "(1')"] & \mathrm{B}^\dagger \arrow[l, "\delta_{\mathrm{K}} = m_{\mathrm{B}}^t"] \arrow[u, "f^t"'] \arrow[ur, phantom, "(2')"] & (\mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{B})^\dagger \arrow[l, "\Delta_{\mathrm{B}}^t"] \arrow[u] \arrow[r, equal] \arrow[ur, phantom, "(0)"] & \mathrm{B}^\dagger \otimes \mathrm{B}^\dagger \arrow[u, "f^t \otimes f^t"']
\end{tikzcd}$$

Si $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ correspond à un morphisme de groupes formels $\mathrm{K} \to \mathrm{G}$, alors les carrés (1) et (2) sont commutatifs, et $\varepsilon_{\mathrm{B}} \circ f = \varepsilon_{\mathrm{A}}$; par conséquent, les carrés $(1')$ et $(2')$ sont commutatifs et f^t envoie l'unité de $\mathrm{B}^\dagger = \mathrm{H}(\mathrm{K})$ sur celle de $\mathrm{A}^\dagger = \mathrm{H}(\mathrm{G})$, i.e. f^t est un morphisme de k-algèbres unitaires $\mathrm{H}(\mathrm{K}) \to \mathrm{H}(\mathrm{G})$ tel que le diagramme $(*)$ de la proposition soit commutatif.

Réciproquement, si f^t vérifie ces conditions, alors $\varepsilon_{\mathrm{B}} \circ f = \varepsilon_{\mathrm{A}}$ et les carrés $(1')$ et $(2')$ sont commutatifs. Comme, pour $\mathrm{M} = \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A}$ et $\mathrm{P} = \mathrm{B}$ (resp. $\mathrm{M} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{P} = \mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{B}$), l'application $g \mapsto g^t$ est injective, on en déduit que les carrés (1) et (2) sont commutatifs, donc f est compatible avec les multiplications et les morphismes diagonaux de A et B. Il reste à voir que $f(1_{\mathrm{A}}) = 1_{\mathrm{B}}$. Or, il résulte de ce qui précède que $\varepsilon_{\mathrm{B}} f(1) = 1$, $\Delta_{\mathrm{B}} f(1) = f(1) \mathbin{\widehat{\otimes}} f(1)$ et $f(1) \cdot f(1) = f(1)$. Les deux premières conditions entraînent, d'après 2.1 (iii), que $f(1)$ admet $c_{\mathrm{B}} f(1)$ pour inverse dans B ; par conséquent $f(1) \cdot f(1) = f(1)$ entraîne $f(1) = 1$. Donc $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un morphisme de $\mathbf{Alp}_{/k}$, compatible avec les comultiplications de A et B. C.Q.F.D.

2.3.2. — *Supposons maintenant* pour simplifier *l'anneau k artinien*. Lorsque G est 517
topologiquement plat sur k, l'algèbre $\mathrm{H}(\mathrm{G}) = \mathbf{H}(\mathrm{G})(k)$ peut être caractérisée par une propriété universelle (Cartier). Pour toute k-algèbre (associative, avec élément unité) U, notons $\mathbf{W}(\mathrm{U})^\times$ le k-foncteur en groupes qui associe à toute k-algèbre de longueur finie C le groupe multiplicatif des éléments inversible de $\mathrm{U} \otimes_k \mathrm{C}$:

$$\mathbf{W}(\mathrm{U})^\times(\mathrm{C}) = (\mathrm{U} \otimes_k \mathrm{C})^\times.$$

[69] N.D.E. : On a détaillé la suite de la démonstration.

De plus, identifions G au k-foncteur en groupes $\mathrm{C} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{Spf}(\mathrm{C}), \mathrm{G})$ et notons $\mathrm{Hom}_{k\text{-Gr.}}(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathrm{U})^{\times})$ l'ensemble des homomorphismes de k-foncteurs en groupes de G dans $\mathbf{W}(\mathrm{U})^{\times}$. On a la

Proposition. — *Soit k un anneau artinien. Pour tout groupe formel* G *topologiquement plat sur k et pour toute k-algèbre* U*, il y a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-Gr.}}(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathrm{U})^{\times}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg.}}(\mathrm{H}(\mathrm{G}), \mathrm{U}).$$

Notons A l'algèbre affine de X et $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathrm{U}))$ l'ensemble des morphismes de k-foncteurs de G dans $\mathbf{W}(\mathrm{U})$. On a $\mathrm{G} = \mathrm{Spf}(\mathrm{A}) = \varinjlim \mathrm{Spf}(\mathrm{A}/\mathfrak{l})$, où $\mathfrak{l}$ parcourt les idéaux ouverts de A, d'où des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}_k\big(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathrm{U})\big) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{Hom}_k\big(\mathrm{Spf}(\mathrm{A}/\mathfrak{l}), \mathbf{W}(\mathrm{U})\big) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{U} \otimes_k (\mathrm{A}/\mathfrak{l}).$$

De plus, on a des applications linéaires

$$\mathrm{U} \otimes_k (\mathrm{A}/\mathfrak{l}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k((\mathrm{A}/\mathfrak{l})^*, \mathrm{U})$$

518 qui envoient $u \otimes x$ sur l'application k-linéaire $f \mapsto f(x)u$. Notant $\mathrm{U} \widehat{\otimes}_k \mathrm{A}$ la limite projective des k-modules $\mathrm{U} \otimes_k (\mathrm{A}/\mathfrak{l})$, on obtient donc, par passage à la limite projective, des applications

$$\mathrm{Hom}_k\big(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathrm{U})\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{U} \widehat{\otimes}_k \mathrm{A} \xrightarrow{\psi_{\mathrm{A}}} \mathrm{Hom}_k(\mathrm{A}^{\dagger}, \mathrm{U}) = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{H}(\mathrm{G}), \mathrm{U})$$

L'application ψ_{A} ne fait évidemment intervenir que la structure de k-module pseudocompact de A ; de plus, cette application est bijective lorsque A est égal à k, donc plus généralement lorsque A est un k-module pseudocompact projectif (le foncteur $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{U} \widehat{\otimes}_k \mathrm{P}$ commute aux produits infinis).

Pour toute k-algèbre de longueur finie C, la multiplication fait de $\mathrm{U} \otimes_k \mathrm{C}$ un monoïde à élément unité ; de plus, tout morphisme de monoïdes à élément unité $\mathrm{G}(\mathrm{C}) \to \mathrm{U} \otimes_k \mathrm{C}$ est nécessairement un morphisme de groupes $\mathrm{G}(\mathrm{C}) \to (\mathrm{U} \otimes_k \mathrm{C})^{\times}$. Par conséquent, $\mathrm{Hom}_{k\text{-Gr.}}(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathrm{U})^{\times})$ est la partie de $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathrm{U}))$ formée des homomorphismes de k-foncteurs en monoïdes à élément unité. Lorsque A est un k-module pseudocompact projectif, il résulte du caractère fonctoriel de ψ_{A} que ces homomorphismes correspondent aux applications k-linéaires de $\mathrm{A}^{\dagger} = \mathrm{H}(\mathrm{G})$ dans U qui sont compatibles avec la multiplication et avec les éléments unité de H(G) et U.

2.4. Revenons maintenant à un anneau pseudocompact quelconque k pour appliquer aux groupes formels les résultats de 1.4–1.5 sur le passage au quotient par une relation d'équivalence topologiquement plate.

[70] Soient $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ un *monomorphisme* de k-groupes formels, $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ le
519 morphisme « multiplication » de G et λ le morphisme composé

$$\lambda : \ \mathrm{G} \times \mathrm{H} \xrightarrow{u \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}}} \mathrm{G} \times \mathrm{G} \xrightarrow{\mu} \mathrm{G}.$$

[70] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Comme u est un monomorphisme, le couple

$$\mathrm{G} \times \mathrm{H} \underset{\lambda}{\overset{\mathrm{pr}_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{G}$$

est un couple d'équivalence dans $\mathbf{Vaf}_{/k}$ (cf. V, 2.b)). Rappelons (cf. 1.2) que le conoyau G/H de ce couple est défini comme suit.

Soient $\mathscr{O}(\mathrm{G})$ et $\mathscr{O}(\mathrm{H})$ les algèbres affines de G et H, $\Delta : \mathscr{O}(\mathrm{G}) \to \mathscr{O}(\mathrm{G}) \widehat{\otimes}_k \mathscr{O}(\mathrm{G})$ le morphisme diagonal de $\mathscr{O}(\mathrm{G})$, et I le noyau du morphisme $u^\natural : \mathscr{O}(\mathrm{G}) \to \mathscr{O}(\mathrm{H})$. (On sait, d'après la proposition 1.3, que $u^\natural$ induit un isomorphisme $\mathscr{O}(\mathrm{G})/\mathrm{I} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(\mathrm{H})$). Alors, l'algèbre affine $\mathscr{O}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$ de G/H est le noyau du couple de morphismes :

$$\mathscr{O}(\mathrm{G}) \underset{(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,u^\natural)\Delta}{\overset{\mathrm{in}_1}{\rightrightarrows}} \mathscr{O}(\mathrm{G}) \widehat{\otimes}_k \mathscr{O}(\mathrm{H}),$$

où $\mathrm{in}_1(x) = x \,\widehat{\otimes}\, 1$, c.-à-d.,

$$\mathscr{O}(\mathrm{G}/\mathrm{H}) = \{x \in \mathscr{O}(\mathrm{G}) \mid \Delta(x) - x \,\widehat{\otimes}\, 1 \in \mathscr{O}(\mathrm{G}) \,\widehat{\otimes}\, \mathrm{I}\}.$$

Si, de plus, H est *topologiquement plat* sur k, alors pr_1 est topologiquement plat et l'on déduit du théorème 1.4 le théorème suivant.

Théorème. — *Soit* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un* monomorphisme *de k-groupes formels. On suppose* H topologiquement plat *sur k. Alors, la projection* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{H}$ *est surjective et topologiquement plate, on a un isomorphisme*

$$(*) \qquad \mathrm{G} \times \mathrm{H} \xrightarrow{\sim} \mathrm{G} \underset{\mathrm{G}/\mathrm{H}}{\times} \mathrm{G}$$

et G/H *représente le* faisceau-quotient *pour la topologie plate.*

Par conséquent, G/H *est muni d'une structure canonique d'objet à groupe d'opérateurs* G*, telle que* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{H}$ *soit un morphisme d'objets à opérateurs. Si de plus u identifie* H *à un sous-groupe* distingué *de* G*, alors* G/H *est muni d'une structure canonique de k-*groupe formel*, telle que* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{H}$ *soit un morphisme de k-groupes formels, et* H *est le noyau de p.*

En effet, la première assertion découle de 1.4 ; les deux autres de IV, corollaires 5.2.2 et 5.2.4.

Corollaire. — [71] *Soient* G *un k-groupe formel,* H *un sous-groupe formel de* G*,* A (*resp.* A/J*,* B) *l'algèbre affine de* G (*resp.* H, G/H)*,* I_A *l'idéal d'augmentation de* A*, et* $\mathrm{I}_\mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{I}_\mathrm{A}$*. On suppose* H topologiquement plat *sur k. Alors* J *égale* $\overline{\mathrm{AI}_\mathrm{B}}$*, l'idéal fermé engendré par* I_B.

En effet, la projection $\mathrm{B} \to \mathrm{B}/\mathrm{I}_\mathrm{B}$ correspond à la « section unité » $e : \mathrm{Spf}(k) \to \mathrm{G}/\mathrm{H}$ de G/H. D'après $(*)$, H s'identifie au produit fibré $\mathrm{Spf}(k) \times_{\mathrm{G}/\mathrm{H}} \mathrm{G}$, et donc son algèbre affine A/J s'identifie à $\mathrm{B}/\mathrm{I}_\mathrm{B} \widehat{\otimes}_\mathrm{B} \mathrm{A} \simeq \mathrm{A}/\overline{\mathrm{AI}_\mathrm{B}}$.

(71) N.D.E. : On a explicité ce corollaire, qui est utilisé, par exemple, en 5.2.1/5.2.3.

2.4.0. — [72] Soient G, H des k-groupes formels ; on suppose qu'il existe des homomorphismes $\sigma : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ et $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ tels que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathrm{H}}$. En particulier, σ est un monomorphisme, donc H est un sous-groupe formel de G (cf. 1.3). Soient $\mathrm{D} = \mathrm{Ker}(\pi)$ et σ' l'inclusion $\mathrm{D} \hookrightarrow \mathrm{G}$. Alors G est le *produit semi-direct* de D par H (cf. I, 2.3.8), c.-à-d., pour tout objet B de $\mathbf{Alf}_{/k}$, l'application

$$\mu : \mathrm{D}(\mathrm{B}) \times \mathrm{H}(\mathrm{B}) \longrightarrow \mathrm{G}(\mathrm{B}), \qquad (d, h) \mapsto dh \tag{1}$$

est une bijection, l'application

$$\theta : \mathrm{G}(\mathrm{B}) \longrightarrow \mathrm{D}(\mathrm{B}), \qquad g \mapsto g\sigma\pi(g^{-1}) \tag{2}$$

est une rétraction de σ', et l'inverse de μ est l'application

$$g \mapsto (\theta(g), \pi(g)). \tag{3}$$

Notons également que l'application $\mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $(g, g') \mapsto \theta(gg')$ se factorise à travers $\mathrm{G} \times \mathrm{D}$, c.-à-d., on a le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[r, "\mathrm{id} \times \theta"] \arrow[d, "m_{\mathrm{G}}"'] & \mathrm{G} \times \mathrm{D} \arrow[d, "\eta"] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "\theta"] & \mathrm{D} \end{tikzcd} \tag{4}$$

où η est l'application « $(g, d) \mapsto g \cdot d \cdot \sigma\pi(g^{-1})$ ».

Ceci peut s'exprimer comme suit en termes des algèbres affines A, A_0 et A' de G, H et D (cf. 5.1.3 plus loin). Soient $\rho' : \mathrm{A} \to \mathrm{A}'$, $\rho : \mathrm{A} \to \mathrm{A}_0$ et $\tau : \mathrm{A}_0 \to \mathrm{A}$ les homomorphismes de k-bialgèbres correspondant à σ', σ et π, et soit $\mathrm{I} = \mathrm{Ker}(\rho)$. Alors, A' s'identifie à $\mathrm{A}/\overline{\mathrm{A}\tau(\mathrm{J}_0)}$, où J_0 désigne l'idéal d'augmentation de A_0.

Soit B l'algèbre affine de G/H ; on a vu en 2.4 que B est le noyau du couple de morphismes :

$$\mathrm{A} \underset{(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\rho)\Delta_{\mathrm{A}}}{\overset{\mathrm{in}_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{A}_0,$$

c.-à-d., $\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{A} \mid \Delta_{\mathrm{A}}(x) - x \mathbin{\widehat{\otimes}} 1 \in \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{I}\}$.

Notons γ le morphisme continu de k-algèbres $\theta^\natural : \mathrm{A}' \to \mathrm{A}$; c'est une section de ρ' et un isomorphisme de $\mathbf{Alp}_{/k}$ de A' sur B. On déduit de (2) que, notant m_{A} (resp. c_{A}) la multiplication (resp. l'antipode) de A, on a, pour tout $\phi \in \mathrm{A}$,

$$\gamma\rho'(\phi) = (m_{\mathrm{A}} \circ (\mathrm{id} \otimes \tau\rho c_{\mathrm{A}}) \circ \Delta_{\mathrm{A}})(\phi).$$

D'autre part, τ identifie A_0 à une sous-bialgèbre de A, qui n'est autre que l'algèbre affine du quotient $\mathrm{D}\backslash\mathrm{G}$. On déduit alors de (1) et (3) que l'on a un isomorphisme de k-algèbres profinies

$$\mathrm{A}' \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{A}_0 \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{A}, \qquad a' \mathbin{\widehat{\otimes}} a_0 \mapsto \gamma(a')\tau(a_0), \tag{$*$}$$

dont l'inverse est l'application $\phi \mapsto (\rho' \otimes \rho)\Delta(\phi)$.

[72] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe, qui sera utile en en 5.1.3.

Enfin, identifiant A' à son image dans A, on déduit de (4) que $\Delta_A(A') \subseteq A \widehat{\otimes} A'$, puis que les diagrammes ci-dessous sont commutatifs

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\Delta_A"] \arrow[dr, "\Delta_{A'}"'] & A \widehat{\otimes} A' \arrow[d, "\gamma\rho'\otimes\mathrm{id}"] \\ & A' \widehat{\otimes} A' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "c_A"] \arrow[dr, "c_{A'}"'] & A \arrow[d, "\gamma\rho'"] \\ & A' \end{tikzcd}$$

où $\Delta_{A'}$ (resp. $c_{A'}$) est la comultiplication (resp. l'antipode) de A'.

2.4.1 Proposition. — *Soit $f : G \to K$ un morphisme de k-groupes formels. Si* $H = \mathrm{Ker}(f)$ *est* topologiquement plat *sur k, l'homomorphisme $f' : G/H \to K$, qui est* **520**
induit par f, est un monomorphisme.

C'est une conséquence des résultats de l'exposé IV [73] ; nous en donnons cependant une démonstration directe. Soient T une variété formelle de longueur finie sur k et t un élément de $(G/H)(T)$ tel que $f' \circ t$ soit l'élément unité de $K(T)$. Nous devons montrer que t est l'élément unité de $(G/H)(T)$.

Comme la projection $\mathrm{pr}_1 : T \times_{G/H} G \to T$ est surjective et topologiquement plate, d'après 2.4, il suffit de montrer (1.3.1) [74] que $t \circ \mathrm{pr}_1$ est l'élément unité de $(F\backslash G)(T \times_{F\backslash G} G)$. Comme on a $t \circ \mathrm{pr}_1 = p \circ \mathrm{pr}_2$, si pr_2 est la projection canonique de $T \times_{F\backslash G} G$ sur G, l'égalité $1 = f' \circ (p \circ \mathrm{pr}_2) = f \circ \mathrm{pr}_2$ et la suite exacte

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \xrightarrow{f} K$$

montrent que pr_2 se factorise à travers H, donc que $p \circ \mathrm{pr}_2$ est nul.

On déduit de la proposition le corollaire suivant. Notons $\mathscr{O}(G)$, $\mathscr{O}(K)$ et $\mathscr{O}(G/H)$ les algèbres affines de G, K et G/H ; on a vu (2.4) que p induit une injection de $\mathscr{O}(G/H)$ dans $\mathscr{O}(G)$. De plus, d'après la proposition 1.3, comme $f' : G/H \to K$ est un monomorphisme, le morphisme $\mathscr{O}(K) \to \mathscr{O}(G/H)$ est surjectif, d'où :

Corollaire. — *Soient $f : G \to K$ un morphisme de k-groupes formels et* $H = \mathrm{Ker}(f)$. *Si* H *est topologiquement plat sur k, alors* $\mathscr{O}(G/H)$ *est l'image de* $\mathscr{O}(K)$ *dans* $\mathscr{O}(G)$.

2.4.2. — Gardons les notations précédentes et supposons H *et* G *topologiquement plats sur k*. Alors G est topologiquement plat sur k et sur G/H, donc, d'après 1.3.3, G/H est topologiquement plat sur k. Par conséquent, d'après 2.4, la projection canonique q de K sur $\mathrm{Coker}(f')$ est topologiquement plate et f' est un isomorphisme de G/H sur $\mathrm{Ker}(q)$. Il est clair d'autre part qu'on a $\mathrm{Coker}(f) = \mathrm{Coker}(f')$. Donc, sous l'hypothèse que G et $H = \mathrm{Ker}(f)$ soient topologiquement plats sur k, on a obtenu un isomorphisme entre $\mathrm{Ker}(q)$, *l'image* de f, et $G/\mathrm{Ker}(f)$, la *coimage* de f. Ceci entraîne le théorème ci-dessous.

Théorème. — *Les groupes formels commutatifs sur un corps forment une catégorie* **521**
abélienne.

[73] N.D.E. : cf. IV, 5.2.6.
[74] N.D.E. : préciser ce point...

Corollaire. — *Les schémas affines en groupes commutatifs sur un corps forment une catégorie abélienne.*

Ceci résulte du théorème et de 2.2.2.

2.5. Un k-groupe formel est dit *étale* si la variété formelle sous-jacente est étale (1.6) ; ces groupes formels ont une structure très simple. En effet, *supposons k local* ; soient κ le corps résiduel de k, κ_s une clôture séparable de κ et Γ le groupe de Galois topologique de κ_s sur κ. Appelons Γ-*ensemble* la donnée d'un ensemble E et d'une opération continue de Γ sur E (le groupe d'isotropie d'un élément $x \in \mathrm{E}$ est donc un sous-groupe ouvert de Γ).

Associons enfin à toute k-variété formelle X la limite inductive $\mathrm{X}(\kappa_s)$ des ensembles $\mathrm{X}(\ell)$, ℓ parcourant les extensions finies de κ contenues dans κ_s. Il est clair que Γ opère continûment dans $\mathrm{X}(\kappa_s)$. Il résulte de SGA 1, I 8.3, que :

Proposition. — *Soient k un anneau pseudocompact* local*, κ son corps résiduel, κ_s une clôture séparable de κ et $\Gamma = \mathrm{Gal}(\kappa_s/\kappa)$.*

(i) *Le foncteur* $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}(\kappa_s)$ *est une* équivalence *de la catégorie des k*-variétés formelles étales *sur celle des* Γ-ensembles.

(ii) *Il induit une* équivalence *de la catégorie des k*-groupes formels étales *sur celle des* Γ-groupes*, c.-à-d., des groupes de la catégorie des Γ-ensembles (un tel Γ-groupe consiste donc en la donnée d'un groupe abstrait* G *et d'une opération continue de* Γ *sur* G *par automorphismes de groupes).*

2.5.1. — Supposons de nouveau l'anneau pseudocompact k quelconque. Il est clair
522 que le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{G}_e$ de 1.6.1 commute aux produits finis. Il transforme donc un groupe formel en un groupe formel étale. De plus, comme le morphisme $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}_e$ de 1.6 est fonctoriel en G, c'est un homomorphisme de groupes formels lorsque G est muni d'une structure de groupe.

Considérons le noyau de cet homomorphisme ; comme p induit une bijection sur les ensembles sous-jacents, $\mathrm{Ker}\, p$ a pour ensemble sous-jacent l'image de $\mathrm{Spf}(k)$ par la section unité $\varepsilon : \mathrm{Spf}(k) \to \mathrm{G}$; si nous identifions les ensembles sous-jacents à $\mathrm{Spf}(k)$ et à $\mathrm{Ker}\, p$ au moyen de cette section unité, G_e a même algèbre locale que $\mathrm{Spf}(k)$ en un point g de $\mathrm{Ker}\, p$. [75]

Par conséquent, pour tout point s de $\mathrm{Spf}(k)$, $\mathrm{Ker}\, p$ a pour algèbre locale en $\varepsilon(s)$ le produit tensoriel $k \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathscr{O}_{\mathrm{G},g}$, c'est-à-dire $\mathscr{O}_{\mathrm{G},g}$. Pour ces raisons nous dirons que $\mathrm{Ker}\, p$ est *le voisinage infinitésimal de l'origine* de G et nous écrirons $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{G}_0$, obtenant ainsi une suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathrm{G}_0 \xrightarrow{\text{incl.}} \mathrm{G} \xrightarrow{p} \mathrm{G}_e.$$

Dans la suite, nous dirons que G est *infinitésimal* [76] si $\mathrm{G} = \mathrm{G}_0$.

---

[75] N.D.E. : À préciser, en liaison avec 1.6...

[76] N.D.E. : Dans la suite, la terminologie « *radiciel* » est aussi utilisée, cf. 2.6.2 et 3.3.

Supposons de plus que G soit *topologiquement plat* sur k. [77], Alors, le morphisme (bijectif) $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}_e$ est topologiquement plat, d'après 1.6.1, donc est un épimorphisme effectif (1.3.1). Par conséquent, G_e s'identifie au quotient G/G_0. On a donc obtenu :

Corollaire. — *Soit* G *un groupe formel* topologiquement plat *sur* k. *Alors* G_e *s'identifie au quotient* G/G_0 *; c.-à-d., on a une suite exacte de groupes formels :*

$$1 \longrightarrow \mathrm{G}_0 \xrightarrow{\text{incl.}} \mathrm{G} \xrightarrow{p} \mathrm{G}_e \longrightarrow 1.$$

2.5.2. — Dans le cas où k est un corps parfait, le foncteur $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_e$ de 1.6 est aussi *adjoint à droite* à l'inclusion de $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k}$ dans $\mathbf{Vaf}_{/k}$. De façon précise, si k est un corps parfait, X_e a les mêmes points que X et a pour algèbre locale en un point x le corps résiduel de $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$. Les projections canoniques des algèbres $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ sur leurs corps résiduels **523**
définissent donc une section $s : \mathrm{X}_e \to \mathrm{X}$ de p. Cette section dépend fonctoriellement de X ; c'est donc un homomorphisme de groupes formels lorsque X est un groupe formel. On obtient donc :

Proposition. — *Lorsque k est un corps parfait, tout k-groupe formel* G *est canoniquement isomorphe au produit semi-direct d'un groupe infinitésimal* G_0 *et d'un groupe étale* G_e *opérant sur* G_0*.*

Si, de plus, nous supposons G *commutatif*, G est le produit de G_0 et de G_e. D'après 2.2.2, cette décomposition des groupes formels commutatifs sur k correspond à une décomposition analogue des k-schémas affines en groupes commutatifs :

Définition. — Disons qu'un schéma en groupes commutatifs sur un corps k est *de type multiplicatif* (resp. *unipotent*) s'il est isomorphe à $\operatorname{Spec} \mathrm{H}(\mathrm{G})$, où G est un k-groupe formel commutatif étale (resp. infinitésimal). [78]

D'après 2.2.2, 2.5.1, et 2.5, on obtient :

Corollaire. — *Soient k un corps,* G *un k-schéma affine en groupes commutatifs.*

(i) G *contient un sous-groupe de type multiplicatif* G_m *tel que* G/G_m *soit unipotent.*

(ii) *Lorsque k est* parfait*, il existe en outre une rétraction canonique de* G *sur* G_m*, de sorte que* G *est le produit d'un groupe unipotent et d'un groupe de type multiplicatif.*

(iii) [79] *Soient k_s une clôture séparable de k et* $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$. *La catégorie des k-schémas en groupes de type multiplicatif est anti-équivalente à la catégorie des* Γ-*modules continus.*

---

[77] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

[78] N.D.E. : Il faudrait comparer cette définition avec celle de groupe *de type multiplicatif* (resp. *unipotent*) donnée dans les Exposés VIII–X (resp. XVII), cf. la N.D.E. (79) ; voir [**De72**, II, §§ 8–9] ou aussi [**DG70**, IV, §§ 1–3].

[79] N.D.E. : On a ajouté le point (iii), conséquence de 2.5. Comparer toutefois avec X.1.4, où figure une hypothèse de finitude.

2.6. Nous allons maintenant étudier les groupes formels infinitésimaux, auxquels sont consacrés les paragraphes suivants. Dans cette étude, les *algèbres de Lie* jouent un rôle primordial.

Supposons d'abord *l'anneau de base k artinien* et soit G un groupe formel sur k. On peut donner de l'algèbre de Lie de G trois interprétations différentes que nous utiliserons toutes :

524 **a)** Soient D l'algèbre $k[d]/(d^2)$ des nombres duaux sur k et δ l'homomorphisme de D dans k qui annule d. Pour tout groupe formel G sur k, Lie(G) est le noyau de $\mathrm{G}(\delta)$, de sorte qu'on a par définition une *suite exacte de groupes*

$$1 \longrightarrow \mathrm{Lie(G)} \longrightarrow \mathrm{G(D)} \xrightarrow{\mathrm{G}(\delta)} \mathrm{G}(k) \longrightarrow 1.$$

b) Si G a A pour algèbre affine, le groupe G(D) a pour éléments les homomorphismes d'algèbres profinies $f : \mathrm{A} \to \mathrm{D}$. La condition $\mathrm{G}(\delta)(f) = 1$ équivaut à $\delta \circ f = \varepsilon_{\mathrm{A}}$. Comme $x - \varepsilon_{\mathrm{A}}(x) \cdot 1_{\mathrm{A}} \in \mathrm{I_A}$, pour tout $x \in \mathrm{A}$, ceci équivaut à $f(\mathrm{I_A}) \subseteq k \cdot d$. Dans ce cas, pour tout $x \in \mathrm{A}$, on a donc la relation

$$f(x) = \varepsilon_{\mathrm{A}}(x) \cdot 1_{\mathrm{D}} + f'(\overline{x}) \cdot d,$$

où f' est une application linéaire continue de $\mathrm{I_A}/\overline{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^2} = \omega_{\mathrm{G}/k}$ (cf. 2.1) dans k et où $\overline{x}$ est la classe de $x - \varepsilon_{\mathrm{A}}(x) \cdot 1_{\mathrm{A}}$ modulo $\overline{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^2}$. Il est clair que *l'application $f \mapsto f'$ est une bijection de* Lie(G) *sur le dual topologique de* $\omega_{\mathrm{G}/k}$ (cf. 0.2.2).

Cette bijection respecte évidemment les structures de groupe. Soient en effet f et g deux éléments de Lie(G) ; leur produit est l'application composée $h \circ \Delta_{\mathrm{A}}$, où $h : \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A} \to \mathrm{D}$ est tel que $h(a \mathbin{\widehat{\otimes}} b) = f(a) \cdot g(b)$. Mais il résulte de 2.1 (ii) qu'on a $\Delta_{\mathrm{A}}(a) - a \mathbin{\widehat{\otimes}} 1 - 1 \mathbin{\widehat{\otimes}} a \in \mathrm{I_A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{I_A}$ lorsque $a \in \mathrm{I_A}$; si $a \in \mathrm{I_A}$, on a par conséquent $(f \cdot g)(a) = f(a) + g(a)$ (cf. aussi II 3.10).

Dans la suite, nous identifions Lie(G) à $\omega_{\mathrm{G}/k}^{\dagger}$ au moyen de la bijection $f \mapsto f'$ décrite ci-dessus. *Le groupe* Lie(G) *est donc muni d'une structure de k-module.*

525 **c)** Soient A^* et D^* les k-modules duaux de A et D, $\{1_{\mathrm{D}}^*, d^*\}$ la base duale de la base $\{1_{\mathrm{D}}, d\}$ de D sur k (on a $1_{\mathrm{D}}^* = \delta$). Comme D est libre de rang fini sur k, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_c(\mathrm{A}, \mathrm{D}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\mathrm{D}^*, \mathrm{A}^*), \qquad f \mapsto f^t$$

est bijective. D'un autre côté, f^t est déterminé par les valeurs $f^t(1_{\mathrm{D}}^*)$ et $f^t(d^*) = x$. La condition $\mathrm{G}(\delta)(f) = 1$ équivaut à l'égalité $f^t(1_{\mathrm{D}}^*) = \varepsilon_{\mathrm{A}}$. On voit aisément d'autre part que f est compatible avec la multiplication si et seulement si l'on a (cf. 2.3) :

$$(*) \qquad \delta_{\mathrm{G}}(x) = \varphi_{\mathrm{G}}(x \otimes 1 + 1 \otimes x).$$

Enfin, il est clair qu'une application linéaire continue $f : \mathrm{A} \to \mathrm{D}$, qui est compatible avec la multiplication et telle que $\delta \circ f = \varepsilon_{\mathrm{A}}$, envoie l'élément unité de A sur celui de D. L'application $f \mapsto x$ nous permet donc d'identifier Lie(G) à la partie de H(G) formée des éléments vérifiant la relation $(*)$. Si x et y sont deux tels éléments, on a

$$\begin{aligned} \delta_{\mathrm{G}}(xy) = \delta_{\mathrm{G}}(x)\delta_{\mathrm{G}}(y) &= \varphi_{\mathrm{G}}\big((x \otimes 1 + 1 \otimes x)(y \otimes 1 + 1 \otimes y)\big) \\ &= \varphi_{\mathrm{G}}(xy \otimes 1 + x \otimes y + y \otimes x + 1 \otimes xy), \end{aligned}$$

d'où $\delta_{\mathrm{G}}(xy - yx) = \varphi_{\mathrm{G}}\big((xy - yx)\otimes 1 + 1\otimes (xy - yx)\big)$.

Ceci montre que le k-module Lie(G) est identifié à une sous-algèbre de Lie de H(G) : nous dirons que Lie(G) *est l'algèbre de Lie de* G.

2.6.1. — Lorsque k est un anneau pseudocompact arbitraire et G un groupe formel sur k, nous appelons $\mathbf{O}_k$-*algèbre de Lie de* G le foncteur $\mathbf{Lie}(\mathrm{G})$ qui associe à tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$ la C-algèbre de Lie du C-groupe formel $\mathrm{G}\widehat{\otimes}_k\mathrm{C}$. Alors, $\mathbf{Lie}(\mathrm{G})$ est plate sur $\mathbf{O}_k$ lorsque $\omega_{\mathrm{G}/k}$ est un k-module pseudocompact projectif. 526

2.6.2. — Réciproquement, toute algèbre de Lie $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{O}_k$ définit un k-foncteur en groupes. Désignons en effet par $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ le foncteur qui associe à tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$ l'algèbre enveloppante $\mathrm{U}(\mathbf{L}(\mathrm{C}))$ de la C-algèbre de Lie $\mathbf{L}(\mathrm{C})$. D'après $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$, 3.2.2, $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ est une bialgèbre sur $\mathbf{O}_k$ et détermine, d'après 2.2, un k-foncteur en groupes $\mathrm{Spf}^*\,\mathbf{U}(\mathbf{L})$ que nous noterons désormais $\mathscr{G}(\mathbf{L})$. Ainsi, $\mathscr{G}(\mathbf{L})(\mathrm{C})$ est le groupe des éléments $z \in \mathrm{U}(\mathbf{L}(\mathrm{C}))$ d'augmentation 1 et tels que $\Delta_{\mathrm{U}(\mathbf{L}(\mathrm{C}))}(z) = z\otimes z$.

Supposons, de plus, $\mathbf{L}$ *plate* sur $\mathbf{O}_k$. Alors, d'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, I 2.7), la bialgèbre $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ est plate sur $\mathbf{O}_k$. D'après 2.2.1, ceci donne le point (i) de la proposition suivante. [80]

Proposition. — *Soit* $\mathbf{L}$ *une* $\mathbf{O}_k$*-algèbre de Lie* plate.

(i) $\mathscr{G}(\mathbf{L})$ *est un groupe formel topologiquement plat sur* k *qui a* $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ *pour* $\mathbf{O}_k$*-bialgèbre.*

(ii) $\mathscr{G}(\mathbf{L})$ *est radiciel.*

(iii) *Pour tout objet* C *de* $\mathbf{Alf}_{/k}$*,* $\mathbf{Lie}(\mathscr{G}(\mathbf{L}))(\mathrm{C})$ *s'identifie à l'ensemble*

$$\mathrm{Prim}\,\mathrm{U}(\mathbf{L}(\mathrm{C})) = \{x\in \mathrm{U}(\mathbf{L}(\mathrm{C}))\mid \varepsilon(x) = 0 \quad \textit{et} \quad \Delta(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x\}$$

des éléments primitifs *de* $\mathrm{U}(\mathbf{L}(\mathrm{C}))$*. En particulier, on a un morphisme naturel de* $\mathbf{O}_k$*-algèbres de Lie* $\tau_{\mathbf{L}} : \mathbf{L}\to \mathbf{Lie}(\mathscr{G}(\mathbf{L}))$.

En effet, pour démontrer (ii) et (iii), on se ramène directement au cas où k est artinien (2.6). Posons alors $\mathrm{L} = \mathbf{L}(k)$, $\mathrm{U} = \mathrm{U}(\mathrm{L})$, $\mathrm{U}_0 = k\cdot 1_{\mathrm{U}}$ et soit U^+ l'idéal bilatère de U engendré par l'image de L. Posons en outre, pour tout $n\geqslant 1$,

$$\mathrm{U}_n = \{u\in \mathrm{U}\mid \Delta_{\mathrm{U}}(u) - u\otimes 1\in \mathrm{U}_{n-1}\otimes \mathrm{U}^+\}.$$

D'après 1.3.6, il suffit de montrer que U est la réunion des U_n. Or, si l'on identifie L à son image canonique dans U, L est évidemment contenu dans U_1. Si $x_1,\dots,x_n$ sont des éléments de L, on a donc $\Delta_{\mathrm{U}}(x_1\cdots x_n) = (x_1\otimes 1 + 1\otimes x_1)\cdots(x_n\otimes 1 + 1\otimes x_n)$, ce qui montre, par récurrence sur n, que le produit $x_1\cdots x_n$ appartient à U_n, donc que $\mathrm{U} = \bigcup_n \mathrm{U}_n$. Ceci prouve (ii). 527

D'autre part, soit $\mathrm{D} = k[d]/(d^2)$ l'algèbre des nombres duaux sur k. Par hypothèse, on a $\mathbf{L}(\mathrm{D}) \simeq \mathrm{L}\otimes \mathrm{D}$, d'où $\mathrm{U}(\mathbf{L}(\mathrm{D})) \simeq \mathrm{U}\otimes\mathrm{D}$, d'après les propriétés universelles du produit tensoriel et de l'algèbre enveloppante. Il en résulte que $\mathbf{Lie}(\mathscr{G}(\mathbf{L}))(k)$ s'identifie à l'ensemble des éléments $z = 1 + xd$ de $\mathrm{U}\oplus\mathrm{U}d$ (où $x\in\mathrm{U}$) tels que $\varepsilon(z) = 1$ et

[80] N.D.E. : On a mis en évidence les points (i) et (ii), et l'on a ajouté le point (iii), qui sera utile en 2.6.3. et 3.3.2.

$\Delta(z) = z \otimes z$, ce qui équivaut à $\varepsilon(x) = 0$ et $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, c.-à-d., à $x \in \operatorname{Prim} \mathrm{U}$. En particulier, l'application $\tau_{\mathrm{L}} : x \mapsto 1 + dx$ est un morphisme de $\mathbf{O}_k$-algèbres de Lie, de $\mathbf{L}$ vers $\mathbf{Lie}(\mathscr{G}(\mathbf{L}))$.

2.6.3. — Si $\mathbf{L}$ est une algèbre de Lie plate sur $\mathbf{O}_k$, le groupe formel $\mathscr{G}(\mathbf{L})$ peut être caractérisé par une propriété universelle. [81] En effet, tout homomorphisme h de $\mathscr{G}(\mathbf{L})$ dans un groupe formel G induit un homomorphisme $\mathbf{Lie}(h) : \mathbf{Lie}(\mathscr{G}(\mathbf{L})) \to \mathbf{Lie}(\mathrm{G})$; composant celui-ci avec le morphisme $\tau_{\mathbf{L}} : \mathbf{L} \to \mathbf{Lie}(\mathscr{G}(\mathbf{L}))$ (cf. 2.6.2), on obtient un homomorphisme $h' : \mathbf{L} \to \mathbf{Lie}(\mathrm{G})$.

Proposition. — *Si* G *est un k-groupe formel et* $\mathbf{L}$ *une* $\mathbf{O}_k$*-algèbre de Lie* plate*, l'application $h \mapsto h'$ définie ci-dessus est une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grf}_{/k}}(\mathscr{G}(\mathbf{L}), \mathrm{G}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathbf{L}, \mathbf{Lie}(\mathrm{G}))$$

où le terme de droite désigne l'ensemble des morphismes de $\mathbf{O}_k$*-algèbres de Lie de* $\mathbf{L}$ *dans* $\mathbf{Lie}(\mathrm{G})$*.*

On se ramène en effet tout de suite au cas où k est artinien. Posons $\mathrm{L} = \mathbf{L}(k)$. D'après 2.3.1, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grf}_{/k}}(\mathscr{G}(\mathbf{L}), \mathrm{G})$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des homomorphismes d'algèbres unitaires $h : \mathrm{U}(\mathrm{L}) \to \mathrm{H}(\mathrm{G})$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U}(\mathrm{L}) \arrow[r, "h"] \arrow[dd, "\Delta_{\mathrm{U}(\mathrm{L})}"'] & \mathrm{H}(\mathrm{G}) \arrow[dr, "\delta_{\mathrm{G}}"] & \\
& & \mathrm{H}(\mathrm{G} \times \mathrm{G}) \\
\mathrm{U}(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{U}(\mathrm{L}) \arrow[r, "h \otimes h"] & \mathrm{H}(\mathrm{G}) \otimes \mathrm{H}(\mathrm{G}) \arrow[ur, "\varphi_{\mathrm{G}}"'] &
\end{tikzcd} .$$

528 Or h est défini par sa restriction à L, qui est un morphisme d'algèbres de Lie de L dans l'algèbre de Lie sous-jacente à H(G), et la commutativité du diagramme signifie que h applique L dans la partie de H(G) formée des x tels que $\delta_{\mathrm{G}}(x) = \varphi_{\mathrm{G}}(x \otimes 1 + 1 \otimes x)$, qui n'est autre que Lie(G), cf. 2.6 c).

2.7. Nous terminons ces généralités sur un énoncé qui remonte à S. Lie et qui nous servira au paragraphe 5.1. *Un monoïde formel à élément unité sur k* est par définition un couple (M, m) formé d'une variété formelle M et d'un morphisme $m : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ tel que $m(\mathrm{C})$ fasse de $\mathrm{M}(\mathrm{C})$ un monoïde à élément unité pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$. [82] En particulier, la « section unité », qui associe à tout objet C l'élément unité de M(C), définit une section ε_{M} de la projection canonique $\mathrm{M} \to \mathrm{Spf}(k)$. Nous dirons

[81] N.D.E. : On a modifié ce qui suit, en tirant profit de l'ajout fait dans 2.6.2.

[82] N.D.E. : Il revient au même de dire que M est un monoïde avec unité dans la catégorie $\mathbf{Vaf}_{/k}$.

que le monoïde formel M est *infinitésimal* si ε_{M} induit une bijection des ensembles sous-jacents.

Proposition. — *Tout k-monoïde formel* M *topologiquement plat et infinitésimal est un groupe formel.*

Nous devons montrer que M(C) est un groupe pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$. On se ramène donc de suite au cas où k est artinien. Soit alors $\mathrm{U} = \mathrm{H}(\mathrm{M})$ la coalgèbre de M (1.3.5) ; la multiplication $m : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ induit un homomorphisme de coalgèbres $m_{\mathrm{U}} : \mathrm{U} \otimes \mathrm{U} \to \mathrm{U}$, qui fait de U une algèbre associative sur k ; cette algèbre a pour élément unité l'image de l'élément unité de k par l'application de k dans U qui est **529**
induite par la section unité ε_{M} de M. De même, la projection $\mathrm{M} \to \mathrm{Spf}(k)$ induit un homomorphisme ε_{U} de U dans k ; nous noterons U^+ le noyau de ε_{U}.

Nous devons montrer qu'il existe un antipodisme, c'est-à-dire un homomorphisme de coalgèbres $c_{\mathrm{U}} : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ tel que l'application composée

$$\mathrm{U} \xrightarrow{\Delta_{\mathrm{U}}} \mathrm{U} \otimes_k \mathrm{U} \xrightarrow{c_{\mathrm{U}} \otimes \mathrm{id}} \mathrm{U} \otimes_k \mathrm{U} \xrightarrow{m_{\mathrm{U}}} \mathrm{U}$$

applique $u \in \mathrm{U}$ sur $\varepsilon_{\mathrm{U}}(u) \cdot 1_{\mathrm{U}}$. Soit (U_n) la filtration de U définie en 1.3.6 et 2.6.2, et posons $\mathrm{U}_n^+ = \mathrm{U}^+ \cap \mathrm{U}_n$. Comme M est infinitésimal, U^+ est la réunion de sous-modules U_n^+ ; on montre alors facilement, par récurrence sur n, qu'il existe une et une seule application linéaire $c_n : \mathrm{U}_n \to \mathrm{U}_n$ telle que l'application composée

$$\mathrm{U}_n^+ \xrightarrow{\Delta_{\mathrm{U}}} \mathrm{U}_n \otimes \mathrm{U} \xrightarrow{c_n \otimes \mathrm{id}} \mathrm{U} \otimes \mathrm{U} \xrightarrow{m_{\mathrm{U}}} \mathrm{U}$$

soit nulle. [(83)]

3. Phénomènes particuliers à la caractéristique 0

530

Dans tout ce paragraphe 3, nous supposons que l'anneau pseudocompact k contient le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

3.1. Lemme. — *Soient* C *une* $\mathbb{Q}$*-algèbre commutative avec élément* 1*,* L *une algèbre de Lie sur* C *dont le* C*-module sous-jacent est libre. L'application canonique* $\mathrm{L} \to \mathrm{U}(\mathrm{L})$ *est un isomorphisme de* L *sur l'ensemble des éléments primitifs de* U(L).

En effet, identifions L à son image canonique dans U(L) ; soient I un ensemble totalement ordonné et $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une base de L indexée par I ; désignons par $\mathbb{N}^{(\mathrm{I})}$ l'ensemble des familles $n = (n_i)_{i \in \mathrm{I}}$ d'entiers naturels telles que n_i soit nul sauf peut-être pour un nombre fini d'indices $i_1 < i_2 < \cdots < i_s$ (ces indices dépendent de n) ; posons enfin $x^n = x_{i_1}^{n_{i_1}} x_{i_2}^{n_{i_2}} \cdots x_{i_s}^{n_{i_s}}$ et $n! = (n_{i_1}!)(n_{i_2}!) \cdots (n_{i_s}!)$.

[(83)] N.D.E. : En effet, on pose $c_0(1) = 1$ et $c_1(x) = -x$ si $x \in \mathrm{U}_1^+$, i.e. si x est un élément primitif. Si $x \in \mathrm{U}_n^+$, on a $\Delta(x) = x \otimes 1 + \sum_i y_i \otimes z_i$, où $y_i \in \mathrm{H}_{n-1}$; supposant donc $c_{n-1} : \mathrm{U}_{n-1} \to \mathrm{U}$ construite, on pose $c_n(x) = -\sum_i c_{n-1}(y_i) z_i$. On obtient ainsi $c : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$, qui est l'inverse de id_{U} pour la loi de groupe de $\mathrm{End}_k(\mathrm{U})$, donc est nécessairement unique. Comme $\Delta \circ c = (c \otimes c) \circ \Delta$ et $\varepsilon \circ c = \varepsilon$, on voit par récurrence que $c(\mathrm{U}_n) \subseteq c(\mathrm{U}_n)$ et $c(\mathrm{U}_n^+) \subseteq c(\mathrm{U}_n^+)$.

On sait alors que les x^n forment une base de U(L) (théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt) et on voit facilement qu'on a

$$(*)\qquad \Delta_{\mathrm{U(L)}}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \sum \frac{x^m}{m!} \otimes \frac{x^{n-m}}{(n-m)!}$$

la somme étant étendue à tous les éléments m de $\mathbb{N}^{(\mathrm{I})}$ tels que $0 \leqslant m \leqslant n$ (i.e. tels que $0 \leqslant m_i \leqslant n_i$ pour tout i). Il s'ensuit évidemment qu'on a $\Delta_{\mathrm{U(L)}} u = u \otimes 1 + 1 \otimes u$ si et seulement si u est une combinaison linéaire des x_i.

531 **3.2.** Supposons maintenant C *artinien*, de radical $\mathfrak{r}$. Pour toute C-algèbre U (associative, unitaire), l'idéal $\mathfrak{r}$U est donc formé d'éléments nilpotents ; si x appartient à $\mathfrak{r}$U, nous poserons

$$\exp_{\mathrm{U}} x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots. \qquad {}^{(84)}$$

On obtient ainsi une bijection de $\mathfrak{r}$U sur $1 + \mathfrak{r}$U ; la bijection réciproque applique un élément $1 + y$ de $1 + \mathfrak{r}$U sur

$$\log_{\mathrm{U}}(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \cdots.$$

De plus, il est clair que l'application $\exp_{\mathrm{U}}$ est fonctorielle en U. [85]

L'anneau C étant toujours artinien, supposons U muni d'une structure de bialgèbre sur C (2.2). Pour tout élément primitif x de $\mathfrak{r}$U (VII$_{\mathrm{A}}$ 3.2.3), on a alors

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathrm{U}}(\exp_{\mathrm{U}} x) &= \exp_{\mathrm{U}\otimes\mathrm{U}}(\Delta_{\mathrm{U}}(x)) \\
&= \exp_{\mathrm{U}\otimes\mathrm{U}}(x \otimes 1 + 1 \otimes x) \\
&= \exp_{\mathrm{U}\otimes\mathrm{U}}(x \otimes 1) \cdot \exp_{\mathrm{U}\otimes\mathrm{U}}(1 \otimes x) \\
&= \big((\exp_{\mathrm{U}} x) \otimes 1\big) \cdot \big(1 \otimes (\exp_{\mathrm{U}} x)\big) \\
&= (\exp_{\mathrm{U}} x) \otimes (\exp_{\mathrm{U}} x).
\end{aligned}$$

On voit donc que la bijection $\exp_{\mathrm{U}}$ transforme un élément primitif de $\mathfrak{r}$U en un élément z de $1 + \mathfrak{r}$U tel que $\Delta_{\mathrm{U}} z = z \otimes z$, et la réciproque est claire.

Considérons en particulier une algèbre de Lie L *plate* sur C, prenons pour U l'algèbre enveloppante U(L) de L sur C et identifions L à son image canonique dans U. D'après le lemme 3.1, L est donc l'ensemble des éléments primitifs de U (en effet L est
532 un produit de modules libres sur les composantes locales de C). Considérons d'autre part le quotient $\overline{\mathrm{C}} = \mathrm{C}/\mathfrak{m}$ de C par un idéal maximal $\mathfrak{m}$. Comme le $\overline{\mathrm{C}}$-groupe formel $\mathscr{G}(\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{C}} \overline{\mathrm{C}})$, qui a $\mathrm{U}(\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{C}} \overline{\mathrm{C}})$ pour bialgèbre, est infinitésimal (2.6.2), l'élément unité est le seul élément $\overline{z}$ de $\mathrm{U(L)} \otimes_{\mathrm{C}} \overline{\mathrm{C}} \simeq \mathrm{U}(\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{C}} \overline{\mathrm{C}})$ tel que $\Delta_{\mathrm{U}(\mathrm{L}\otimes_{\mathrm{C}}\overline{\mathrm{C}})}(\overline{z}) = \overline{z} \otimes \overline{z}$. Il s'ensuit que les éléments z de U(L) tels que $\Delta_{\mathrm{U}}(z) = z \otimes z$ appartiennent nécessairement à $1 + \mathfrak{r}$U.

Enfin, comme $\mathrm{L} \cap \mathfrak{r}\mathrm{U}$ s'identifie à $\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{C}} \mathfrak{r}$, on voit finalement que : $\exp_{\mathrm{U}}$ *définit une bijection de* $\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{C}} \mathfrak{r}$ *sur le groupe* $\mathscr{G}(\mathrm{L})(\mathrm{C})$. Nous résumons :

---

[84] N.D.E. : Si $x, x' \in \mathfrak{r}\mathrm{U}$ *commutent*, on a donc $\exp_{\mathrm{U}}(x + x') = (\exp_{\mathrm{U}} x)(\exp_{\mathrm{U}} x')$.

[85] N.D.E. : c.-à-d., pour tout morphisme $\phi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ de C-algèbres, on a $\phi(\exp_{\mathrm{U}}(x)) = \exp_{\mathrm{V}} \phi(x)$.

Proposition. — *Soient k un anneau pseudocompact contenant $\mathbb{Q}$, $\mathbf{L}$ une $\mathbf{O}_k$-algèbre de Lie* plate, *C un objet de $\mathbf{Alf}_{/k}$ et $\mathfrak{r}(\mathrm{C})$ le radical de C. L'application*

$$\exp_{\mathrm{U}(\mathbf{L}(\mathrm{C}))} : \mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \mathfrak{r}(\mathrm{C}) \longrightarrow \mathscr{G}(\mathbf{L})(\mathrm{C})$$

est bijective *et fonctorielle en* C *et* $\mathbf{L}$*.*

3.2.1. — La bijection $\exp_{\mathrm{U}(\mathbf{L}(\mathrm{C}))}$ permet de définir par transport de structure une loi de groupe sur l'ensemble $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \mathfrak{r}(\mathrm{C})$ (qu'on identifie à une partie de $\mathrm{U}(\mathbf{L}(\mathrm{C}))$ comme en 3.2). Si x et y sont deux éléments de $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \mathfrak{r}(\mathrm{C})$, cette loi est telle que

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \log\big((\exp x)(\exp y)\big) = \log(1 + \sum_{p+q>0} \frac{x^p}{p!}\frac{y^q}{q!}) = \\ &= \sum_{m \geqslant 1} \sum_{p_i+q_i>0} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \frac{x^{p_1}}{p_1!}\frac{y^{q_1}}{q_1!} \cdots \frac{x^{p_m}}{p_m!}\frac{y^{q_m}}{q_m!} = \sum_{\ell \geqslant 1} \mathrm{P}_\ell(x,y) \end{aligned}$$

où $\mathrm{P}_\ell(x,y)$ désigne la somme des monômes de degré total ℓ en x et y. On a par **533**
exemple :

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}_1(x,y) = x + y \\ &\mathrm{P}_2(x,y) = \underbrace{\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}}_{m=1} \underbrace{- \frac{1}{2}(x^2 + xy + yx + y^2)}_{m=2} = \frac{1}{2}(xy - yx) = \frac{1}{2}[x,y] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_3(x,y) &= \underbrace{\frac{x^3}{6} + \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{6}}_{m=1} \\ &\quad \underbrace{- \frac{1}{2}\big(x^3 + \frac{3}{2}x^2y + \frac{1}{2}yx^2 + xyx + yxy + \frac{1}{2}y^2x + \frac{3}{2}xy^2 + y^3\big)}_{m=2} \\ &\quad \underbrace{+ \frac{1}{3}(x^3 + x^2y + yx^2 + xyx + yxy + y^2x + xy^2 + y^3)}_{m=3} \\ &= \frac{1}{12}(x^2y + yx^2 - 2xyx - 2yxy + y^2x + xy^2) \\ &= \frac{1}{12}\big[[y,x],x\big] + \frac{1}{12}\big[y,[y,x]\big]. \end{aligned}$$

On peut montrer plus généralement qu'on a la *formule de Campbell-Hausdorff* : [86]

$$\mathrm{P}_\ell(x,y) = \sum_{m=1}^{\ell} \frac{(-1)^{m-1}}{m\cdot\ell} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_m\\ q_1,\dots,q_{m-1}}} \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{(\operatorname{ad} x)^{p_i}}{p_i!}\frac{(\operatorname{ad} y)^{q_i}}{q_i!}\right)\frac{(\operatorname{ad} x)^{p_m}}{p_m!}(y)$$
$$+ \sum_{m=1}^{\ell} \frac{(-1)^{m-1}}{m\cdot\ell} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_{m-1}\\ q_1,\dots,q_{m-1}}} \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{(\operatorname{ad} x)^{p_i}}{p_i!}\frac{(\operatorname{ad} y)^{q_i}}{q_i!}\right)(x),$$

où les $p_j, q_i \in \mathbb{N}$ vérifient $p_i+q_i \geqslant 1$ pour $i = 1,\dots,m-1$ et $p_m+\sum_{i=1}^{m-1}(p_i+q_i) = \ell-1$ (i.e. dans les sommes ci-dessus, chaque « monôme de Lie » non nul est de degré total ℓ) ; pour une démonstration, voir N. Jacobson, *Lie Algebras* (Interscience, 1962), § V.5, ou [**BLie**], II § 6.4, Th. 2.

3.3. Si G est un k-groupe formel d'algèbre affine A, rappelons qu'on note I_A l'idéal d'augmentation de A et $\omega_{\mathrm{G}/k}$ le k-module pseudocompact $\mathrm{I}_\mathrm{A}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{A}^2} \simeq \mathrm{I}_\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_\mathrm{A}(\mathrm{A}/\mathrm{I}_\mathrm{A})$.

534 ***Théorème*** (Cartier). — *Soient k un anneau pseudocompact* [87] *contenant* $\mathbb{Q}$ *et* G *un k-groupe formel. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe une* $\mathbf{O}_k$*-algèbre de Lie* plate $\mathbf{L}$ *telle que* G *soit isomorphe à* $\mathscr{G}(\mathbf{L})$.

(ii) *Il existe un k-module pseudocompact* projectif ω *tel que la variété formelle sous-jacente à* G *soit isomorphe à la variété* $\mathbb{V}_k^{f,0}(\omega)$ *d'algèbre affine* $k[[\omega]]$ (1.2.5).

(iii) G *est* infinitésimal *et* $\omega_{\mathrm{G}/k}$ *est un k-module pseudocompact* projectif.

(iv) G *est* infinitésimal et topologiquement plat *sur k.*

(i) ⇒ (ii) : Soit $\omega = \Gamma^*(\mathbf{L})$ le k-module pseudocompact dual de $\mathbf{L}$ (1.2.3). Pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$, nous devons exhiber un isomorphisme de $\mathbb{V}_k^{f,0}(\omega)(\mathrm{C})$ sur $\mathscr{G}(\mathbf{L})(\mathrm{C})$ qui soit fonctoriel en C. D'après 1.2.5, $\mathbb{V}_k^{f,0}(\omega)(\mathrm{C})$ s'identifie à l'ensemble $\mathrm{Hom}_c(\omega,\mathfrak{r}(\mathrm{C}))$ des applications k-linéaires continues de ω dans le radical de C. Cet ensemble est naturellement isomorphe à l'ensemble $\mathrm{Hom}_c(\omega\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{C},\mathfrak{r}(\mathrm{C}))$ des applications C-linéaires continues de $\omega\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{C}$ dans $\mathfrak{r}(\mathrm{C})$; enfin, comme $\omega\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{C}$ est un C-module pseudocompact projectif, l'application canonique

$$(\omega\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{C})^\dagger \otimes_\mathrm{C} \mathfrak{r}(\mathrm{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_c(\omega\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{C},\mathfrak{r}(\mathrm{C}))$$

est bijective (cf. 0.3.6.A). Comme $\mathbf{L}(\mathrm{C})$ s'identifie à $(\omega\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{C})^\dagger = \mathbf{V}^f(\Gamma^*(\mathbf{L}))(\mathrm{C})$ (cf. 1.2.3), on obtient que $\mathbb{V}_k^{f,0}(\omega)(\mathrm{C})$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{L}(\mathrm{C})\otimes_\mathrm{C}\mathfrak{r}(\mathrm{C})$.
535 L'implication (i) ⇒ (ii) résulte alors de la proposition 3.2.

(ii) ⇒ (iii) : Soient ω un objet projectif de $\mathbf{PC}(k)$ et h un isomorphisme de $k[[\omega]]$ sur l'algèbre affine A de G. Composant h avec l'augmentation $\varepsilon_\mathrm{A} : \mathrm{A} \to k$ (cf. 2.1), on obtient un homomorphisme $\varepsilon_\mathrm{A}\circ h : k[[\omega]] \to k$, qui est déterminé par sa restriction λ à ω ; celle-ci envoie ω dans le radical $\mathfrak{r}$ de k et l'application $x \mapsto x-\lambda(x)$, de ω dans le radical de $k[[\omega]]$, se prolonge en un endomorphisme ℓ_λ de $k[[\omega]]$. Les égalités

[86] N.D.E. : On a corrigé la formule donnée, qui était erronée, et ajouté la référence [**BLie**].
[87] N.D.E. : On a supprimé l'hypothèse que k soit *local* (la *démonstration* se ramène à ce cas).

$\ell_\lambda \circ \ell_{-\lambda} = \ell_{-\lambda} \circ \ell_\lambda = \mathrm{id}_{k[[\omega]]}$ montrent que ℓ_λ est un automorphisme de $k[[\omega]]$. Par conséquent, $h \circ \ell_\lambda$ est un isomorphisme de $k[[\omega]]$ sur A et $\varepsilon_{\mathrm{A}} \circ h \circ \ell_\lambda$ applique ω sur 0. Quitte à remplacer h par $h \circ \ell_\lambda$, on peut donc supposer que $\varepsilon_{\mathrm{A}} \circ h$ s'annule sur l'idéal fermé I de $k[[\omega]]$ qui est engendré par ω. Dans ce cas, h induit une bijection de $\mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$ sur $\mathrm{I_A}/\overline{\mathrm{I}^2_{\mathrm{A}}}$; comme $\mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$ s'identifie à ω, on voit que $\omega_{\mathrm{G}/k} = \mathrm{I_A}/\overline{\mathrm{I}^2_{\mathrm{A}}}$ est projectif. Il est clair d'autre part que $\mathbb{V}_k^{f,0}(\omega)$ est infinitésimal, de même que G.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Supposons que G soit infinitésimal et que $\omega_{\mathrm{G}/k}$ soit projectif. Soit $\mathbf{L}$ la $\mathbf{O}_k$-algèbre de Lie de G ; le $\mathbf{O}_k$-module sous-jacent est $\mathbf{V}^f(\omega_{\mathrm{G}/k})$, d'après 2.6 b). Par conséquent, $\mathbf{L}$ est plate sur $\mathbf{O}_k$, et $\Gamma^*(\mathbf{L}) \simeq \omega_{\mathrm{G}/k}$ (1.2.3). Donc, d'après la démonstration de (i) $\Rightarrow$ (ii), l'algèbre affine du groupe formel $\mathscr{G}(\mathbf{L})$ s'identifie à $k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]]$. D'autre part, d'après 2.6.3, le morphisme identique de $\mathbf{L}$ est associé canoniquement à un morphisme de groupes formels $\mathscr{G}(\mathbf{L}) \to \mathrm{G}$, donc à un morphisme continu de k-algèbres

$$a : \mathrm{A} \longrightarrow k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]].$$

Soit I l'idéal fermé de $k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]]$ engendré par $\omega_{\mathrm{G}/k}$ et filtrons $k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]]$ (resp. A) par les adhérences des idéaux I^n (resp. $\mathrm{I}^n_{\mathrm{A}}$). Il s'agit de montrer que a, qui induit par définition un isomorphisme $\mathrm{I_A}/\overline{\mathrm{I}^2_{\mathrm{A}}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$, est un isomorphisme.

Pour cela, on considère une section τ de la projection canonique de $\mathrm{I_A}$ sur $\omega_{\mathrm{G}/k}$. **536**
Une telle section définit d'après 1.2.5 un homomorphisme continu d'algèbres

$$b : k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]] \longrightarrow \mathrm{A}.$$

Le composé $a \circ \tau$ est évidemment une section de la projection canonique de I sur $\mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$. Par conséquent, $a \circ b$ induit l'application identique sur $\mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$, donc aussi sur le gradué associé à $k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]]$. Il en résulte que $a \circ b$ est un isomorphisme, d'après [**CA**, V, § 7, Lemme 1]. [88]

De plus, b induit un isomorphisme de $\mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$ sur $\mathrm{I_A}/\overline{\mathrm{I}^2_{\mathrm{A}}}$, donc une *surjection* des gradués associés à $k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]]$ et A. D'autre part, comme G est radiciel, $\mathrm{I_A}$ est contenu dans le radical de A, de sorte que l'intersection des $\overline{\mathrm{I}^n_{\mathrm{A}}}$ est nulle. Donc, d'après *loc. cit.*, b est surjectif. Alors, comme $a \circ b$ est un isomorphisme et b une surjection, b et a sont des isomorphismes. Ceci prouve (iii) $\Rightarrow$ (i).

Notons enfin qu'il est clair que (i) ou (ii) entraînent (iv), de sorte qu'il reste à prouver l'implication (iv) $\Rightarrow$ (ii). Pour cela, on peut supposer k local, de corps résiduel k_0. Posons alors $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k k_0$, $\omega = \omega_{\mathrm{G}/k}$, $\omega_0 = \omega \mathbin{\widehat{\otimes}}_k k_0$, etc. Comme ω_0 est topologiquement libre sur k_0, il existe un k-module topologiquement libre ω' et une application k-linéaire continue $f : \omega' \to \omega$ telle que $f_0 = f \mathbin{\widehat{\otimes}}_k k_0$ soit inversible (f est l'enveloppe projective de ω). Comme ω' est un k-module pseudocompact projectif, f est composée d'une application k-linéaire continue $g : \omega' \to \mathrm{I_A}$ et de la projection canonique de $\mathrm{I_A}$ sur ω. À son tour, g induit, d'après 1.2.5, un homomorphisme d'algèbres topologiques **537**
$\phi : k[[\omega]] \to \mathrm{A}$.

(88) N.D.E. : cf. 5.1.5 plus loin ; voir aussi [**BAC**], III, § 2.8, Th. 1 et corollaires. D'autre part, on a détaillé l'original dans ce qui suit.

Or ω_0 s'identifie à ω_{G_0/k_0} et $k_0[[\omega_0]]$ à $k[[\omega]]\widehat{\otimes}_k k_0$. Donc $\phi_0 = \phi\widehat{\otimes}_k k_0$ est inversible, d'après la démonstration de (iii) $\Rightarrow$ (i), puisque les hypothèses (iii) sont vérifiées pour k_0 et G_0. Comme, d'autre part, $k[[\omega]]$ et A sont des k-modules pseudocompacts projectifs, ϕ est inversible d'après 0.3.4.

3.3.1. Corollaire. — *Soient* S *un préschéma* localement noethérien *sur* $\mathbb{Q}$ *et* G *un* S-*préschéma en groupes* localement de type fini. *Si* $\omega_{G/S}$ *est un* $\mathscr{O}_S$*-module localement libre,* G *est* lisse *sur* S en tout point de la section unité.

En effet, soient x un point de la section unité, s son image dans S, $\mathscr{O}_x$ et $\mathscr{O}_s$ les algèbres locales de x et s. Il suffit de montrer que $\widehat{\mathscr{O}}_x$ est formellement lisse sur $\widehat{\mathscr{O}}_s$ (EGA IV 6.8.6 et 0_{IV} 19.3.6). Or $\widehat{\mathscr{O}}_x$ et $\widehat{\mathscr{O}}_s$ sont les anneaux locaux de x et s dans $\widehat{G}/\widehat{S}$ et $\widehat{S}$. Posant $k = \widehat{\mathscr{O}}_s$ et $H = \mathrm{Spf}(\widehat{\mathscr{O}}_x)$, il est clair que H est un k-groupe formel infinitésimal et que l'on a $\omega_{H/k} = \omega_{G/S}\otimes_{\mathscr{O}_S}\widehat{\mathscr{O}}_s$. [89] Or, d'après les hypothèses, $\omega_{G/S}$ est un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang fini, donc $\omega_{H/k}$ est le produit d'un nombre fini d'exemplaires de k. Donc, d'après 3.3, $\widehat{\mathscr{O}}_x \cong k[[\omega_{H/k}]]$. Enfin, d'après EGA 0_{IV}, $k[[\omega_{H/k}]]$ est une k-algèbre formellement lisse.

Nous retrouvons donc ainsi un résultat obtenu par ailleurs pour les préschémas en groupes *localement de présentation finie* sur un préschéma *arbitraire* S, cf. VI_B, 1.6.

3.3.2. Corollaire. — *Soit k un corps de caractéristique* 0. *Le foncteur* $L \mapsto \mathscr{G}(L)$ *est une* équivalence *de la catégorie des k-algèbres de Lie sur celle des k-groupes formels infinitésimaux.* [90]

538 En effet, quand G parcourt les k-groupes formels infinitésimaux, le foncteur $G \mapsto \mathscr{G}(\mathrm{Lie}\, G)$ est isomorphe, d'après le théorème 3.3, au foncteur identique de la catégorie des groupes infinitésimaux. De même, d'après 2.6.2 et 3.1, le foncteur $L \mapsto \mathrm{Lie}(\mathscr{G}(L)) = \mathrm{Prim}\, U(L)$ est isomorphe au foncteur identique de la catégorie des algèbres de Lie.

3.3.3. — Supposons toujours que k est un corps de caractéristique 0. Soient $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et Γ le groupe de Galois topologique de $\overline{k}$ sur k.

Pour tout k-groupe formel H, nous notons $\underline{\mathrm{Aut}}_k\, H$ le k-foncteur en groupes qui associe à toute k-algèbre commutative de dimension finie C le groupe des automorphismes du C-groupe formel $H\widehat{\otimes}_k C$. Ce k-foncteur est manifestement exact à gauche (H est topologiquement plat sur k!), [91] de sorte que nous pouvons le traiter comme un groupe formel sur k.

(89) N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

(90) N.D.E. : Puisque $H(\mathscr{G}(L)) = U(L)$, ceci peut se reformuler en l'énoncé suivant, obtenu indépendamment par Milnor et Moore ([**MM65**]). (On rappelle qu'une cogèbre H est dite *connexe* si $H = \bigcup_n H_n$, où (H_n) est la filtration définie en 1.3.6.)

Théorème (Cartier-Milnor-Moore). — *Soit k un corps de caractéristique* 0. *Les foncteurs* $L \mapsto U(L)$ *et* $H \mapsto \mathrm{Prim}(H)$ *définissent une équivalence entre la catégorie des k-algèbres de Lie et celle des k-bigèbres cocommutatives connexes.*

(91) N.D.E. : Il faudrait détailler ce point !

Si L est une k-algèbre de Lie et H le groupe formel $\mathscr{G}(\mathrm{L})$, le théorème 3.3 montre que $\underline{\mathrm{Aut}}_k\,\mathrm{H}$ est isomorphe au k-foncteur en groupes $\underline{\mathrm{Aut}}_k\,\mathrm{L}$ qui associe à une k-algèbre de dimension finie C le groupe des automorphismes de la C-algèbre de Lie $\mathrm{C} \otimes_k \mathrm{L}$.

Si G est un k-groupe formel arbitraire, nous avons vu en 2.5.2 que G se décompose canoniquement en un produit semi-direct d'un groupe formel étale G_e et d'un groupe formel infinitésimal G_0. Ce produit semi-direct est déterminé par la donnée de $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$, du Γ-groupe $\mathrm{G}_e(\overline{k})$ et d'un homomorphisme

$$\phi : \mathrm{G}_e \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_k\,\mathrm{G}_0 \simeq \underline{\mathrm{Aut}}_k(\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}).$$

Un tel homomorphisme envoie G_e dans la « partie étale » $(\underline{\mathrm{Aut}}_k(\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}))_e$ de $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\mathrm{Lie}\,\mathrm{G})$ (2.5.1). Il est donc déterminé par la donnée d'un homomorphisme de Γ-groupes :

$$h = \phi(\overline{k}) : \ \mathrm{G}(\overline{k}) \longrightarrow (\underline{\mathrm{Aut}}_k(\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}))(\overline{k}) = \mathrm{Aut}_k((\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}) \otimes_k \overline{k}\,).$$

Si l'on fait opérer Γ dans $(\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}) \otimes_k \overline{k}$ au moyen de la formule $\gamma(\ell \otimes x) = \ell \otimes \gamma(x)$, **539**
l'homomorphisme h fait opérer $\mathrm{G}(\overline{k})$ dans $(\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}) \otimes_k \overline{k}$ par automorphismes de k-algèbre de Lie de telle façon qu'on ait $h(g^\gamma) = \gamma \circ h(g) \circ \gamma^{-1}$, c.-à-d. :

$$g^\gamma(\ell) = \gamma(g(\gamma^{-1}(\ell)))$$

si $g \in \mathrm{G}(\overline{k})$, $\gamma \in \Gamma$ et $\ell \in (\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}) \otimes_k \overline{k}$. Nous exprimons cette dernière condition en disant que $\mathrm{G}(\overline{k})$ *opère dans* $(\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}) \otimes_k \overline{k}$ *de manière compatible avec* Γ.

On peut résumer la situation à l'aide d'un énoncé « savant » : appelons Γ-*algèbre de Lie* sur k la donnée d'un triplet $(\mathrm{L}, \mathrm{K}, h)$ formé d'une k-algèbre de Lie L, d'un Γ-groupe K et d'une opération h de K dans $\mathrm{L} \otimes_k \overline{k}$ qui soit « compatible avec l'action de Γ dans K et $\mathrm{L} \otimes_k \overline{k}$ ».

Si $(\mathrm{L}, \mathrm{K}, h)$ et $(\mathrm{L}', \mathrm{K}', h')$ sont deux telles Γ-algèbres de Lie, un homomorphisme de la première dans la seconde est un couple (f, g) formé d'un morphisme $f : \mathrm{L} \to \mathrm{L}'$ d'algèbres de Lie et d'un morphisme $g : \mathrm{K} \to \mathrm{K}'$ de Γ-groupes tels que

$$(f \otimes 1)(\gamma \cdot x) = g(\gamma) \cdot (f \otimes 1)(x)$$

si $x \in \mathrm{L} \otimes_k \overline{k}$ et $\gamma \in \mathrm{K}$. On obtient alors :

Proposition. — *Soit k un corps de caractéristique* 0. *Le foncteur qui associe à* G *le triplet* $(\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}, \mathrm{G}(\overline{k}), \phi(\overline{k}))$ *est une* équivalence *de la catégorie des k-groupes formels sur celle des Γ-algèbres de Lie.*

4. Phénomènes particuliers à la caractéristique $p > 0$

540

Dans tout ce paragraphe 4, *nous désignons par p un nombre premier, par k un anneau pseudocompact de caractéristique p, par π l'endomorphisme continu $x \mapsto x^p$ de k.*

4.1. [92] Soient X une variété formelle sur k d'algèbre affine A et $\mathrm{X}^{(p/k)}$ ou $\mathrm{X}^{(p)}$ la variété formelle $\mathrm{X}\,\widehat{\otimes}_{\pi}\,k$ (cf. 1.2). Cette variété a pour algèbre affine le produit tensoriel complété $\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_{\pi}\,k$; de plus, l'homomorphisme continu de $\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_{\pi}\,k$ dans A qui applique $a\,\widehat{\otimes}_{\pi}\,\lambda$ sur $a^p\lambda$ induit un morphisme de k-variétés formelles

$$\mathrm{Fr}(\mathrm{X}/k) : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}^{(p/k)}.$$

Dans la suite, nous dirons que $\mathrm{Fr}(\mathrm{X}/k)$ est *le morphisme de Frobenius de* X *relativement à* k et nous écrirons souvent Fr au lieu de $\mathrm{Fr}(\mathrm{X}/k)$.

4.1.1. — Considérons maintenant un préschéma S sur le corps premier $\mathbb{F}_p$, un S-préschéma X et un S-préschéma $q : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ de longueur finie (1.2.6). Soit fr(S) le morphisme de Frobenius de S relativement à $\mathbb{F}_p$ (ce morphisme induit l'identité sur l'espace topologique sous-jacent et applique une section s du faisceau structural sur s^p ; cf. $\mathrm{VII_A}$ 4.1). Si nous posons $\mathrm{X}^{(p)} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{fr(S)}} \mathrm{S}$ ($\mathrm{VII_A}$, *loc. cit.*), les morphismes de S-variétés formelles $f : \mathrm{T} \to \widehat{\mathrm{X}^{(p)}}/\widehat{\mathrm{S}}$ correspondent biunivoquement aux S-morphismes de T dans $\mathrm{X}^{(p)}$ (1.2.6), c'est-à-dire aux carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T} \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{X} \arrow[d] \\ \mathrm{S} \arrow[r, "\mathrm{fr(S)}"] & \mathrm{S} \end{tikzcd} .$$

541 À un tel carré est associé un S-morphisme de T dans $(\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}})^{(p)}$ si et seulement si f' se factorise à travers un sous-préschéma X_0 de X qui est de longueur finie sur S. [93] On voit ainsi que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/\widehat{\mathrm{S}}}}(\mathrm{T}, (\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}})^{(p)})$ peut être identifié à une partie de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/\widehat{\mathrm{S}}}}(\mathrm{T}, \widehat{\mathrm{X}^{(p)}}/\widehat{\mathrm{S}})$, ce qui définit $(\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}})^{(p)}$ comme *une sous-variété formelle de* $\widehat{\mathrm{X}^{(p)}}/\widehat{\mathrm{S}}$.

On a l'égalité $(\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}})^{(p)} = \widehat{\mathrm{X}^{(p)}}/\widehat{\mathrm{S}}$ si $\mathrm{fr(S)} \circ q$ est un S-préschéma de longueur finie lorsque q en est un. Ceci a lieu par exemple lorsque S est localement de type fini sur un corps k tel que $[k : k^p] < +\infty$.

4.1.2. — Soit G un groupe formel sur k d'algèbre affine A. Comme le foncteur $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}^{(p)} = \mathrm{X}\,\widehat{\otimes}_{\pi}\,k$ commute aux produits finis, il transforme un k-groupe formel en un k-groupe formel. En outre, comme $\mathrm{Fr}(\mathrm{X}/k)$ est fonctoriel en X, le morphisme

$$\mathrm{Fr} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}^{(p)}$$

est un homomorphisme de k-groupes formels. Si l'on pose $\mathrm{G}^{(p^{n+1})} = (\mathrm{G}^{(p^n)})^{(p)}$ il en va de même pour le morphisme composé

$$\mathrm{Fr}^n = \mathrm{Fr}^n(\mathrm{G}/k) :\ \mathrm{G} \xrightarrow{\mathrm{Fr}} \mathrm{G}^{(p)} \xrightarrow{\mathrm{Fr}} \mathrm{G}^{(p^2)} \xrightarrow{\mathrm{Fr}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{Fr}} \mathrm{G}^{(p^n)}.$$

[92] N.D.E. : Voir $\mathrm{VII_A}$, 4.0 pour la notation $\otimes_{\pi}$. D'autre part, comme en $\mathrm{VII_A}$, on a noté Fr (resp. fr) le morphisme de Frobenius relatif (resp. absolu).
[93] N.D.E. : Il faudrait préciser ce point.

Définition. — Le noyau de Fr^n sera noté ${}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G}$. Il résulte directement des définitions que ${}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G}$ est radiciel et a pour algèbre affine le quotient $\mathrm{A}/\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^{\{p^n\}}$, où $\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^{\{p^n\}}$ désigne l'idéal fermé de A qui est engendré par les puissances p^n-ièmes des éléments de I_{A}.

On dit que G est de *hauteur* $\leqslant n$ si $\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^{\{p^n\}} = 0$, c'est-à-dire si l'on a ${}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G} = \mathrm{G}$.

4.2. Il est clair que *l'algèbre de Lie* $\mathbf{Lie}(\mathrm{G})$ *d'un k-groupe formel* G *est une p-sous-* 542
algèbre de Lie de l'algèbre $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ (2.3). En effet, on se ramène tout de suite au cas où k est artinien ; dans ce cas, $\mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ est la partie de $\mathrm{H}(\mathrm{G})$ formée des éléments x tels que $\varphi_{\mathrm{G}}(x \otimes 1 + 1 \otimes x) = \Delta_{\mathrm{G}}(x)$ avec les notations de 2.3 et 2.6. On a alors

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{G}}(x^p \otimes 1 + 1 \otimes x^p) &= \varphi_{\mathrm{G}}\big((x \otimes 1 + 1 \otimes x)^p\big)\\ &= \varphi_{\mathrm{G}}(x \otimes 1 + 1 \otimes x)^p = \Delta_{\mathrm{G}}(x)^p = \Delta_{\mathrm{G}}(x^p).\end{aligned}$$

4.2.1. — Réciproquement, toute p-algèbre de Lie $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{O}_k$ définit un k-foncteur en groupes. Désignons en effet par $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ le foncteur qui associe à toute k-algèbre de longueur finie C l'algèbre enveloppante restreinte $\mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C}))$ de la p-algèbre de Lie $\mathbf{L}(\mathrm{C})$ sur C ($\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ 5.3). D'après $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ 5.4, $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ est une $\mathbf{O}_k$-bialgèbre et détermine un k-foncteur en groupes $\mathrm{Spf}^*\,\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ (2.2) que nous noterons désormais $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})$. Ainsi, $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C})$ est le groupe des éléments $z \in \mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C}))$ d'augmentation 1 et tels que $\Delta_{\mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C}))}(z) = z \otimes z$.

4.2.2. — Supposons que $\mathbf{L}$ soit une p-algèbre de Lie *plate* sur $\mathbf{O}_k$. Alors, d'après $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ 5.3.3, $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ est plate sur $\mathbf{O}_k$; par conséquent, $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})$ *est un k-groupe formel topologiquement plat* qui a $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ pour $\mathbf{O}_k$-bialgèbre.

[94] D'après $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$, 3.2.3 (cf. aussi 2.6.2), pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$, $\mathbf{Lie}(\mathscr{G}_p(\mathbf{L}))(\mathrm{C})$ est l'ensemble des éléments primitifs de $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C}) = \mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C})$; de plus, d'après $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$, 5.3.3 et 7.3, le morphisme canonique $\mathbf{L} \to \mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ induit un isomorphisme de $\mathbf{L}$ sur la p-algèbre de Lie

$$\tau_{p,\mathbf{L}} : \mathbf{L} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathbf{Lie}(\mathscr{G}_p(\mathbf{L}))$$

(comparer avec 3.1 en caractéristique 0).

Le groupe formel $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})$ peut être caractérisé par une propriété universelle. En effet, tout homomorphisme h de $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})$ dans un groupe formel G induit un homomorphisme $\mathbf{Lie}(h) : \mathbf{Lie}(\mathscr{G}_p(\mathbf{L})) \to \mathbf{Lie}(\mathrm{G})$. Composant celui-ci avec $\tau_{p,\mathbf{L}}$, on obtient un homomorphisme $h' : \mathbf{L} \to \mathbf{Lie}(\mathrm{G})$.

Proposition. — *Si k est un anneau pseudocompact de caractéristique $p > 0$,* G *un* 543
k-groupe formel et $\mathbf{L}$ *une p-algèbre de Lie* plate *sur* $\mathbf{O}_k$*, l'application $h \mapsto h'$ définie ci-dessus est une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grf}_{/k}}(\mathscr{G}_p(\mathbf{L}), \mathrm{G}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{p\text{-Lie}}(\mathbf{L}, \mathbf{Lie}(\mathrm{G}))$$

où le terme de droite désigne l'ensemble des morphismes de p-algèbres de Lie de $\mathbf{L}$ *dans* $\mathbf{Lie}(\mathrm{G})$*.*

[94] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

[95] On se ramène en effet tout de suite au cas où k est artinien. Posons $\mathrm{L} = \mathbf{L}(k)$. D'après 2.3.1, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grf}_{/k}}(\mathscr{G}_p(\mathbf{L}), \mathrm{G})$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des homomorphismes d'algèbres unitaires $h : \mathrm{U}_p(\mathrm{L}) \to \mathrm{H}(\mathrm{G})$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U}_p(\mathrm{L}) \arrow[r, "h"] \arrow[dd, "\Delta_{\mathrm{U}_p(\mathrm{L})}"'] & \mathrm{H}(\mathrm{G}) \arrow[dr, "\delta_{\mathrm{G}}"] & \\
& & \mathrm{H}(\mathrm{G} \times \mathrm{G}) \\
\mathrm{U}_p(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{U}_p(\mathrm{L}) \arrow[r, "h \otimes h"] & \mathrm{H}(\mathrm{G}) \otimes \mathrm{H}(\mathrm{G}) \arrow[ur, "\varphi_{\mathrm{G}}"'] &
\end{tikzcd} .$$

Or h est défini par sa restriction à L, qui est un morphisme de p-algèbres de Lie de L dans la p-algèbre de Lie sous-jacente à H(G), et la commutativité du diagramme signifie que h applique L dans la partie de H(G) formée des x tels que $\delta_{\mathrm{G}}(x) = \varphi_{\mathrm{G}}(x \otimes 1 + 1 \otimes x)$, qui n'est autre que Lie(G), cf. 2.6 c).

4.3. Nous nous proposons maintenant d'étudier de façon plus détaillée le k-groupe formel $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})$ lorsque $\mathbf{L}$ est une p-algèbre de Lie plate sur $\mathbf{O}_k$.

544 Pour cela, nous considérons d'abord un anneau C de caractéristique p et une p-algèbre de Lie, L, sur C dont le module sous-jacent est libre de base $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$. Désignons en outre par P l'ensemble des familles $n = (n_i)_{i \in \mathrm{I}}$ formées d'entiers naturels tels que $0 \leqslant n_i < p$ et que les n_i soient nuls hormis peut-être un nombre fini d'entre eux. Si nous munissons I d'un ordre total et si nous appelons $i_1, i_2, \ldots, i_r$ ($i_1 < i_2 < \cdots < i_r$) les indices i tels que $n_i \neq 0$, nous pouvons donc poser $|n| = n_{i_1} + \cdots + n_{i_r}$ et

$$x^n = x_{i_1}^{n_{i_1}} \cdot x_{i_2}^{n_{i_2}} \cdots x_{i_r}^{n_{i_r}}, \qquad n! = (n_{i_1}!) \cdots (n_{i_r}!).$$

On sait que les monômes $x^n/n!$ forment une base de $\mathrm{U}_p(\mathrm{L})$ ($\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ 5.3.3) et il est clair qu'on a

$$(*) \qquad \Delta\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{m \leqslant n} \frac{x^m}{m!} \otimes \frac{x^{n-m}}{(n-m)!},$$

la somme étant étendue à tous les $m \in \mathrm{P}$ tels qu'on ait $m \leqslant n$ (i.e. $m_i \leqslant n_i$ pour tout $i \in \mathrm{I}$).

La formule $(*)$ permet une détermination aisée de la filtration naturelle de $\mathrm{U}_p(\mathrm{L})$ (cf. 1.3.6). Posons $\mathrm{U} = \mathrm{U}_p(\mathrm{L})$, soit U^+ l'idéal bilatère engendré par L et soit $\mathrm{U}_0 = \mathrm{C} \cdot 1_{\mathrm{U}}$. Comme en 1.3.6, on définit une filtration de U (par des sous-C-coalgèbres) en posant, pour $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{U}_n = \{u \in \mathrm{U} \mid \Delta_{\mathrm{U}}(u) - u \otimes 1 \in \mathrm{U}_{n-1} \otimes \mathrm{U}^+\}.$$

[95] N.D.E. : La démonstration est identique à celle de 2.6.3.

La formule $(*)$ entraîne alors que U_n *est le* C*-module libre qui a pour base les monômes* x^m *tels que* $|m| \leqslant n$.

4.3.1. — Avec les notations de 4.3, déterminons les éléments ξ de U tels que $\varepsilon_{\mathrm{U}}(\xi) = 1$ **545**
et $\Delta_{\mathrm{U}}(\xi) = \xi \otimes \xi$. Tout élément ξ de U se met sous la forme $\xi = \Sigma_{n \in \mathrm{P}} \xi_n \frac{x^n}{n!}$, où $\xi_n \in \mathrm{C}$. La condition $\varepsilon_{\mathrm{U}}(\xi) = 1$ entraîne l'égalité $\xi_0 = 1$, si 0 désigne l'élément de P dont toutes les composantes sont nulles. La condition $\Delta_{\mathrm{U}_p(\mathrm{L})}(\xi) = \xi \otimes \xi$ entraîne :

$$\sum_{m \leqslant n} \xi_n \frac{x^m}{m!} \otimes \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} = \sum_{q,r} \xi_q \xi_r \frac{x^q}{q!} \otimes \frac{x^r}{r!}$$

c'est-à-dire

$$\xi_{q+r} = \xi_q \xi_r \quad \text{si} \quad q_i + r_i < p \quad \text{et} \quad \xi_q \xi_r = 0 \quad \text{sinon.}$$

Si l'on note ξ_i la valeur de ξ_n lorsque $n_i = 1$ et $n_j = 0$ pour $j \neq i$, ces conditions signifient que l'on a

$$\xi_n = \prod_i \xi_i^{n_i} \quad \text{si} \quad n \in \mathrm{P} \qquad \text{et} \quad \xi_i^p = 0 \quad \forall\, i \in \mathrm{I}.$$

On tire de là :

Proposition. — *Soient k un anneau pseudocompact de caractéristique $p > 0$,* $\mathbf{L}$ *une p-algèbre de Lie* plate *sur* $\mathbf{O}_k$*,* C *un objet de* $\mathbf{Alf}_{/k}$ *et* $\sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$ *l'idéal de* C *formé des éléments x tels que $x^p = 0$. Il existe une bijection « fonctorielle en* C *» :*

$$\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{G}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C})$$

D'après la remarque 1.2.3, on peut en effet choisir une base $({}^{\mathrm{C}}x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de $\mathbf{L}(\mathrm{C})$ sur **546**
C de telle façon que, pour tout morphisme $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ de $\mathbf{Alf}_{/k}$, $\mathbf{L}(\varphi)$ applique ${}^{\mathrm{C}}x_i$ sur ${}^{\mathrm{D}}x_i$. D'après ce qui précède, l'application

$$\sum_i {}^{\mathrm{C}}x_i \otimes \xi_i \mapsto \sum_{n \in \mathrm{P}} \Big(\prod_i \xi_i^{n_i} \Big) \frac{{}^{\mathrm{C}}x^n}{n!}$$

est une bijection fonctorielle de $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$ sur $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C})$.

4.3.2. — « *Il n'y a pas de formule de Campbell-Hausdorff en caractéristique $p > 0$* ». Expliquons-nous : l'isomorphisme fonctoriel de 4.3.1 dépend du choix des bases $({}^{\mathrm{C}}x_i)_{i \in \mathrm{I}}$. À la différence de ce qui se passe en 3.2 (cas de la caractéristique 0), il n'y a pas, en général, de bijection de $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$ sur $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C})$ qui soit « fonctorielle à la fois en C et en $\mathbf{L}$ ». L'argument qui suit montre par exemple qu'un tel isomorphisme n'existe pas lorsque k est un corps contenant les racines (p^2-1)-ièmes de l'unité.

Choisissons en effet $\mathbf{L}$ de telle façon que, pour tout $\mathrm{C} \in \mathbf{Alf}_{/k}$, $\mathbf{L}(\mathrm{C})$ soit la p-algèbre de Lie abélienne sur C qui est engendrée par un élément x soumis à la relation $x^{(p^2)} = 0$. On a donc

$$\mathbf{L}(\mathrm{C}) = \mathrm{C}x \oplus \mathrm{C}x^{(p)}, \qquad \mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C})) \cong k[x]/(x^{p^2}).$$

Nous allons montrer que le seul morphisme fonctoriel

$$\chi_{\mathrm{C}} : \mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}} \longrightarrow \mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C}))$$

qui soit compatible avec les endomorphismes de $\mathbf{L}$ et qui applique $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$ dans $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C})$, est le morphisme constant de valeur 1.

547 Soit en effet ψ_{C} la bijection de $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$ sur $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C}) = \mathrm{Prim}\, \mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C}))$ donnée par 4.3.1, c.-à-d.,

$$x \otimes a + x^{(p)} \otimes b \mapsto \sum_{0 \leqslant i,j < p} a^i b^j \, x^{i+pj}.$$

En composant χ_{C} avec ψ_{C}^{-1}, on obtient un morphisme fonctoriel (en C) :

$$\begin{aligned} \theta_{\mathrm{C}} : \quad \mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}} &\to \mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}} \\ x \otimes a + x^{(p)} \otimes b &\mapsto x \otimes \mathrm{P}(a,b) + x^{(p)} \otimes \mathrm{Q}(a,b). \end{aligned}$$

La fonctorialité en C implique que $\mathrm{P}(a,b)$ et $\mathrm{Q}(a,b)$ sont les valeurs en (a,b) de deux polynômes P, $\mathrm{Q} \in k[x,y]$ qu'on peut supposer de degré $< p$ en X ainsi qu'en Y. [96] Soit α un élément de k et ℓ_α l'endomorphisme de p-algèbre de Lie de $\mathbf{L}$ qui applique x sur αx (et donc $x^{(p)}$ sur $\alpha^p x^{(p)}$). Alors $\mathrm{U}_p(\ell_\alpha)$ est l'endomorphisme d'algèbre qui envoie x sur αx (et donc chaque x^i sur $\alpha^i x^i$, pour $i < p^2$), et l'on voit facilement que le carré ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}} \arrow[r, "\psi_{\mathrm{C}}"] \arrow[d, "\ell_\alpha(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \mathrm{id}"] & \mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C})) \arrow[d, "\mathrm{U}_p(\ell_\alpha)(\mathrm{C})"] \\ \mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}} \arrow[r, "\psi_{\mathrm{C}}"] & \mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C})) \end{tikzcd}$$

est commutatif. L'hypothèse $\chi_{\mathrm{C}} \circ (\ell_\alpha(\mathrm{C}) \otimes \mathrm{id}) = \mathrm{U}_p(\ell_\alpha)(\mathrm{C}) \circ \chi_{\mathrm{C}}$ entraîne alors les égalités :

$$\mathrm{P}(\alpha a, \alpha^p b) = \alpha\, \mathrm{P}(a,b) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q}(\alpha a, \alpha^p b) = \alpha^p\, \mathrm{Q}(a,b).$$

Écrivant $\mathrm{P} = \sum_{i,j<p} \lambda_{ij} \mathrm{X}^i \mathrm{Y}^j$ et $\mathrm{Q} = \sum_{i,j<p} \mu_{ij} \mathrm{X}^i \mathrm{Y}^j$, et prenant pour C l'algèbre $k[\mathrm{X},\mathrm{Y}]/(\mathrm{X}^p, \mathrm{Y}^p)$, on en déduit que si $\lambda_{ij} \neq 0$ (resp. $\mu_{ij} \neq 0$) alors $\alpha^{i-1+pj} = 1$ (resp. $\alpha^{i+p(j-1)} = 1$). Donc, prenant pour α une racine primitive de l'unité d'ordre $p^2 - 1$, on en déduit que $\mathrm{P} = \lambda \mathrm{X}$ et $\mathrm{Q} = \mu \mathrm{Y}$, avec $\lambda, \mu \in k$. Par conséquent, on a :

$$\chi_{\mathrm{C}}(x \otimes a + x^{(p)} \otimes b) = \sum_{0 \leqslant i,j < p} (\lambda a)^i (\mu b)^j x^{i+pj}.$$

[97] Considérons enfin l'endomorphisme f de $\mathbf{L}$ qui envoie x sur $x + x^{(p)}$; prenant $\mathrm{C} = k[a]/(a^p)$ et comparant les coefficients de x^p et x^{p+1} dans $(\chi_{\mathrm{C}} \circ f(\mathrm{C}))(x \otimes a)$ et dans $(\mathrm{U}_p(f)(\mathrm{C}) \circ \chi_{\mathrm{C}})(x \otimes a)$, on obtient que $\lambda = \mu$ et $\lambda^2 a^2 = 0$. Par conséquent, si on suppose de plus $p > 2$, on obtient que $\lambda = \mu = 0$.

---

[96] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

[97] N.D.E. : L'original affirme que la nullité de λ et μ découle du fait que χ_{C} commute avec l'endomorphisme de $\mathbf{L}$ qui envoie x sur $x^{(p)}$. Faute de pouvoir vérifier cette assertion, les éditeurs proposent la conclusion qui suit, en ajoutant l'hypothèse $p > 2$.

4.4. Théorème. — *Soient k un anneau pseudocompact de caractéristique $p > 0$ et* G *un k-groupe formel. Les assertions suivantes sont équivalentes :* **548**

(i) *Il existe une p-algèbre de Lie* $\mathbf{L}$ plate *sur* $\mathbf{O}_k$ *telle que* G *soit isomorphe à* $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})$.

(ii) *Il existe un k-module pseudocompact* projectif ω *tel que l'algèbre affine de* G *soit isomorphe au quotient de $k[[\omega]]$ par l'idéal fermé engendré par les x^p, $x \in \omega$.*

(iii) G *est de hauteur* $\leqslant 1$ *et* $\omega_{\mathrm{G}/k}$ *est un k-module pseudocompact* projectif.

(iv) G *est de hauteur* $\leqslant 1$ *et est* topologiquement plat *sur k.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Soient $\omega = \Gamma^*(\mathbf{L})$ (cf. 1.2.3) et A le quotient de $k[[\omega]]$ par l'idéal fermé engendré par les x^p, $x \in \omega$. Tout homomorphisme continu $h : \mathrm{A} \to \mathrm{C}$, où C est un objet de $\mathbf{Alf}_{/k}$, est déterminé par sa restriction h' à ω ; cette restriction h' envoie ω dans $\sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$. On obtient ainsi une bijection canonique de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(\mathrm{A}, \mathrm{C})$ sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_c(\omega, \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}})$ des applications k-linéaires continues de ω dans $\sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$. Ce dernier ensemble est canoniquement isomorphe à $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$ (voir la démonstration de 3.3). L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte donc de 4.3.1.

Pour les autres implications, consulter les démonstrations des théorèmes 3.3 et $\mathrm{VII_A}$ 7.4.1, qui sont analogues.

4.4.1 Corollaire. — *Si k est un corps de caractéristique $p > 0$, le foncteur* $\mathrm{L} \mapsto \mathscr{G}_p(\mathrm{L})$ *est une équivalence de la catégorie des p-algèbres de Lie sur k sur celle des k-groupes formels de hauteur $\leqslant 1$.* **549**

En effet, quand G parcourt les groupes formels de hauteur $\leqslant 1$, le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \mathscr{G}_p(\mathrm{Lie}\,\mathrm{G})$ est isomorphe au foncteur identique d'après le théorème 4.4 ; de même, nous avons vu que le foncteur $\mathrm{L} \mapsto \mathrm{Lie}\,\mathscr{G}_p(\mathrm{L})$ est isomorphe au foncteur identique (confer $\mathrm{VII_A}$ 7.3).

4.4.2. — Prenons toujours pour k un corps de caractéristique p. Pour tout k-groupe formel infinitésimal G, l'algèbre affine A de G est la limite projective des algèbres affines $\mathrm{A}/\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^{\{p^n\}}$ des groupes ${}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G}$ (cf. 4.1.2). *Un k-groupe formel infinitésimal est donc une limite inductive de k-groupes formels de hauteur finie.*

Supposons G de hauteur $\leqslant n$. Comme ${}_{\mathrm{Fr}}\mathrm{G}$ est le noyau de $\mathrm{Fr} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}^{(p)}$, alors, d'après 2.4.1, Fr induit un *monomorphisme* $i : \mathrm{H} = \mathrm{G}/{}_{\mathrm{Fr}}\mathrm{G} \hookrightarrow \mathrm{G}^{(p)}$. Comme $\mathrm{Fr}^n(\mathrm{G}/k) = \mathrm{Fr}^{n-1}(\mathrm{G}^{(p)}/k) \circ \mathrm{Fr}(\mathrm{G}/k)$ est nul, $\mathrm{Fr}^{n-1}(\mathrm{G}^{(p)}/k) \circ i$ est nul ainsi que $i^{(p^{n-1})} \circ \mathrm{Fr}^{n-1}(\mathrm{H}/k)$. [98] Comme le foncteur $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}^{(p)}$ commute aux produits fibrés, $i^{(p^{n-1})}$ est encore un monomorphisme. Par conséquent, H est de hauteur $\leqslant n-1$. On voit donc que : *tout groupe de hauteur finie possède une suite de composition dont les quotients sont de hauteur* $\leqslant 1$, donc peuvent être décrits par des p-algèbres de Lie sur k.

Enfin, lorsque G est un k-groupe formel infinitésimal tel que $\omega_{\mathrm{G}/k}$ soit de dimension finie sur k, l'algèbre affine A de G est un quotient de $k[[\omega]]$ [99]. Par conséquent, toutes les algèbres $\mathrm{A}/\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^{\{p^n\}}$ sont de dimension finie sur k en tant qu'espaces vectoriels. On

[98] N.D.E. : On a substitué la phrase qui suit à : « *Comme i est un monomorphisme* (2.4.1) ».
[99] N.D.E. : Préciser ce point.

voit donc que : *tout groupe formel infinitésimal* G *sur un corps de caractéristique* $p > 0$*, tel que* $\omega_{G/k}$ *soit de dimension finie sur* k*, est une limite inductive de groupes formels finis* (i.e. de longueur finie, cf. 1.2.6).

5. Espaces homogènes de groupes formels infinitésimaux sur un corps

550 Soit k un anneau pseudocompact. (À partir de 5.2, on supposera que k est un corps parfait). [100]

5.1. Soient G un k-groupe formel infinitésimal topologiquement plat, A son algèbre affine, B une sous-algèbre fermée de A, $X = \mathrm{Spf}(B)$ et $r : G \to X$ l'épimorphisme induit par l'inclusion de B dans A. On se propose de voir sous quelle condition r fait de X le quotient à gauche de G par un sous-groupe F (cf. 2.4). [101]

Proposition. — *Soient* G *un* k*-groupe formel* infinitésimal topologiquement plat*,* A *son algèbre affine,* I_A *l'idéal d'augmentation de* A*,* B *une sous-algèbre fermée de* A*, et* $J_B = \overline{AI_B}$*, où* $I_B = B \cap I_A$*. On suppose* $A/\overline{J_B^n}$ topologiquement plat *sur* k*, pour tout* $n \geqslant 1$*. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout* $x \in B$, $\Delta_A(x) - 1 \mathbin{\widehat{\otimes}} x$ *appartient à* $J_B \mathbin{\widehat{\otimes}}_k A$.

(ii) *La suite ci-dessous* (*où* $\mathrm{in}_2(a) = 1 \mathbin{\widehat{\otimes}} a$ *et* q *est la projection* $A \to A/J_B$) *est exacte :*

$$(*)\qquad B \longrightarrow A \underset{(q\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{id}_A)\Delta_A}{\overset{\mathrm{in}_2}{\rightrightarrows}} (A/J_B) \mathbin{\widehat{\otimes}}_k A$$

c.-à-d., B *est l'ensemble de* tous *les* $x \in A$ *tels que* $\Delta_A(x) - 1 \mathbin{\widehat{\otimes}} x$ *appartienne à* $J_B \mathbin{\widehat{\otimes}}_k A$.

Dans ce cas, $F = \mathrm{Spf}(A/J_B)$ *est un sous-groupe formel de* G*, et la suite ci-dessous* (*où* λ *est la restriction à* $F \times G$ *de la multiplication de* G) *est exacte :*

$$(**)\qquad F \times G \underset{\lambda}{\overset{\mathrm{pr}_2}{\rightrightarrows}} G \longrightarrow \mathrm{Spf}(B)$$

c.-à-d., Spf(B) *est isomorphe à* $F\backslash G$.

Posons $\overline{A} = A/J_B$ et $F = \mathrm{Spf}(\overline{A})$; alors F est une sous-variété formelle de G. Comme $J_B \subseteq I_A$, l'augmentation ε_A induit un morphisme continu de k-algèbres $\overline{\varepsilon} : \overline{A} \to k$.

Si (i) est satisfaite, alors $\Delta_A(I_B) \subseteq k \mathbin{\widehat{\otimes}} I_B + J_B \mathbin{\widehat{\otimes}} A$, et donc Δ_A induit par passage au quotient un morphisme diagonal $\overline{\Delta}$. Alors $\overline{\Delta}$ et $\overline{\varepsilon}$ munissent F d'une structure de sous-monoïde formel de G. Comme G est infinitésimal, il en est de même de F ; donc,

---

(100) N.D.E. : Dans l'original, il est supposé en 5.1 que k est un corps. En fait, cette hypothèse peut être remplacée par une hypothèses de platitude ; on a modifié en conséquence les n$^{\text{os}}$ 5.1 à 5.1.5.

(101) N.D.E. : On a modifié l'énoncé de la proposition 5.1, afin de faire apparaître plus clairement, d'une part, les conditions équivalentes (i), (ii), et, d'autre part, la conclusion $\mathrm{Spf}(B) \simeq F\backslash G$.

d'après la proposition 2.7, F est un sous-groupe formel de G. Il résulte alors de la définition de $F\backslash G$ (2.4), que (ii) entraîne la dernière assertion de la proposition.

D'autre part, il est clair que (ii) implique (i). La démonstration de la réciproque occupe les paragraphes 5.1.1 à 5.1.5.

5.1.1. — Considérons d'abord la catégorie $\mathscr{C}$ qui suit : un objet de $\mathscr{C}$ est un couple **551**
(C, I) formé d'une k-algèbre profinie C et d'un idéal fermé I de C ; un morphisme $\psi : (C, I) \to (D, J)$ de $\mathscr{C}$ est un homomorphisme continu de k-algèbres $C \to D$ qui applique I dans J. Si l'on associe à (C, I) le couple $(\mathrm{Spf}(C/I), \mathrm{Spf}(C))$, on obtient évidemment une anti-équivalence de $\mathscr{C}$ sur la catégorie des couples (Z, Y) formés d'une k-variété formelle Y et d'une sous-variété formelle Z.

Une structure de cogroupe sur un objet (C, J) de $\mathscr{C}$ consiste en la donnée d'une structure de groupe formel sur $\mathrm{Spf}(C)$ telle que les conditions suivantes soient réalisées (notations de 2.1) :

(1) $\Delta_C(J) \subseteq J \mathbin{\widehat{\otimes}_k} C + C \mathbin{\widehat{\otimes}_k} J$;

(2) $\varepsilon_C(J) = 0$;

(3) $c_C(J) \subseteq J$.

Ces conditions signifient aussi que $\mathrm{Spf}(C/J)$ est un sous-groupe formel de $\mathrm{Spf}(C)$.

Supposons de plus que C soit *locale*, i.e. que $\mathrm{Spf}(C)$ soit un groupe formel *infinitésimal*. Alors, si $J \neq C$, les conditions (2) et (3) sont conséquence de (1). En effet, si J est un idéal fermé distinct de C, il est contenu dans l'idéal d'augmentation I_C, donc (2) est vérifiée, et $M = \mathrm{Spf}(C/J)$ est un sous-monoïde formel de G. Comme G est infinitésimal, il résulte de 2.7 que M est un sous-groupe formel de G, i.e. la condition (3) est vérifiée.

5.1.2. — Désignons par $\mathbf{Alpg}_{/k}$ la catégorie des k-algèbres « *profinies graduées* » :
un objet de cette catégorie consiste en la donnée d'une suite $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ de k- **552**
modules pseudocompacts et d'une structure d'algèbre profinie sur le produit $\prod_{n\geqslant 0} A_n$ telle qu'on ait $A_n \cdot A_m \subseteq A_{m+n}$ (A_n est identifié à une partie de $\prod_{i\geqslant 0} A_i$ au moyen de l'injection canonique) ; un morphisme $\psi : (A_n) \to (B_n)$ est une suite d'applications linéaires continues $\psi_n : A_n \to B_n$ telles qu'on ait $\psi_{m+n}(a \cdot a') = \psi_m(a) \cdot \psi_n(a')$ si $a \in A_m$ et $a' \in A_n$.

Définitions. — Il est clair que deux k-algèbres profinies graduées (A_n) et (B_n) ont un *coproduit* [102] dans $\mathbf{Alpg}_{/k}$, qui a pour n-ième composante le produit $\prod_{i=0}^{n} A_i \mathbin{\widehat{\otimes}_k} B_{n-i}$ des k-modules pseudocompacts $A_i \mathbin{\widehat{\otimes}_k} B_{n-i}$. Ce coproduit sera noté $(A_n) \mathbin{\widehat{\otimes}_k} (B_n)$.

Alors, une structure de cogroupe sur un objet (A_n) de $\mathbf{Alpg}_{/k}$ est la donnée d'applications k-linéaires continues $\Delta_n : A_n \to \prod_{i=0}^{n} A_i \mathbin{\widehat{\otimes}_k} A_{n-i}$ et $\varepsilon : A_0 \to k$, qui induisent sur $\prod_{n\geqslant 0} A_n$ (posant $\varepsilon(A_i) = 0$ pour $i \geqslant 1$) une structure de cogroupe dans $\mathbf{Alp}_{/k}$.

[102] N.D.E. : On a remplacé « *somme directe* » par « *coproduit* ».

Enfin, pour tout objet (A, J) de $\mathscr{C}$, on note $\mathrm{Gr}_{\mathrm{J}}(\mathrm{A})$ l'algèbre profinie graduée associée à la filtration de A par les adhérences $\overline{\mathrm{J}^n}$ des puissances de J ; on a donc $\mathrm{Gr}_{\mathrm{J}}(\mathrm{A})_n = \overline{\mathrm{J}^n}/\overline{\mathrm{J}^{n+1}}$ et la multiplication de $\mathrm{Gr}_{\mathrm{J}}(\mathrm{A})$ est induite par celle de A.

Lemme. — [103] *Soient* U, V *deux k-modules pseudocompacts* topologiquement plats, $\mathrm{U} = \mathrm{U}_0 \supset \mathrm{U}_1 \supset \cdots$ *et* $\mathrm{V} = \mathrm{V}_0 \supset \mathrm{V}_1 \supset \cdots$ *deux suites décroissantes de sous-k-modules fermés. On suppose* U/U_n topologiquement plat *sur k, pour tout n. Filtrons le produit tensoriel complété* $\mathrm{W} = \mathrm{U} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}$ *à l'aide des sous-modules fermés*

$$\mathrm{W}_n = \mathrm{U}_n \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}_0 + \mathrm{U}_{n-1} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}_1 + \cdots + \mathrm{U}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}_n.$$

553 *Alors, pour tout n, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{W}_n/\mathrm{W}_{n+1} \simeq \bigoplus_{i+j=n} (\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_k (\mathrm{V}_j/\mathrm{V}_{j+1}).$$

Démonstration. Posons $\mathrm{M} = \mathrm{W}_n$ et, pour $i = 0, \dots, n$, $\mathrm{M}_i = \mathrm{U}_i \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{V}_{n-i}$ et $\mathrm{S}_i = \sum_{j \neq i} \mathrm{M}_j$. On voit aussitôt que

$$\mathrm{M}_i \cap \mathrm{S}_i \subseteq (\mathrm{U}_i \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{V}) \cap \mathrm{S}_i \subseteq (\mathrm{U}_i \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{V} \cap \mathrm{U} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{V}_{n-i+1}) + \mathrm{U}_{i+1} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{V}.$$

Or, comme U/U_i est topologiquement plat sur k, on a (cf. 1.3.6.B)

$$\mathrm{U}_i \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{V} \cap \mathrm{U} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{V}_{n-i+1} = \mathrm{U}_i \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{V}_{n-i+1}.$$

Comme de plus $\mathrm{M}_i \cap \mathrm{S}_i \subseteq \mathrm{U} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{V}_{n-i}$, on en déduit que :

$$\mathrm{M}_i \cap \mathrm{S}_i \subseteq \mathrm{U}_i \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{V}_{n-i+1} + (\mathrm{U} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{V}_{n-i} \cap \mathrm{U}_{i+1} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{V}),$$

et, puisque $\mathrm{U}/\mathrm{U}_{i+1}$ est topologiquement plat sur k, on a

$$\mathrm{U} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{V}_{n-i} \cap \mathrm{U}_{i+1} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{V} = \mathrm{U}_{i+1} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{V}_{n-i}.$$

Il en résulte que $\mathrm{M}_i \cap \mathrm{S}_i$ égale $\mathrm{M}'_i = \mathrm{U}_i \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{V}_{n-i+1} + \mathrm{U}_{i+1} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{V}_{n-i}$. On en déduit que

$$\bigcap_{i=0}^{n} \mathrm{S}_i = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{M}'_i = \mathrm{W}_{n+1}$$

et que l'application

$$\mathrm{W}_n = \mathrm{M} \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{M}/\mathrm{S}_i \simeq \bigoplus_{i=0}^{n} (\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_k (\mathrm{V}_{n-i}/\mathrm{V}_{n-i+1})$$

est surjective, de noyau W_{n+1}. Ceci prouve le lemme.

Corollaire. — *Soit* (A, J) *un cogroupe de $\mathscr{C}$, tel que* $\mathrm{A}/\overline{\mathrm{J}^n}$ *soit topologiquement plat sur k, pour tout n. Alors,* $\mathrm{Gr}_{\mathrm{J}}(\mathrm{A})$ *est un cogroupe de* $\mathbf{Alpg}_{/k}$.

En particulier, si k est un corps*, le foncteur* $(\mathrm{A}, \mathrm{J}) \mapsto \mathrm{Gr}_{\mathrm{J}}(\mathrm{A})$ *commute aux coproduits finis, et transforme donc un cogroupe de $\mathscr{C}$ en un cogroupe de* $\mathbf{Alpg}_{/k}$.

[103] N.D.E. : Dans l'original, le lemme est énoncé dans le cas où k est un *corps*.

5.1.3. — Identifions toute k-algèbre profinie Γ à la k-algèbre profinie graduée $(\Gamma_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\Gamma_0 = \Gamma$ et $\Gamma_n = 0$ si $n > 0$. En particulier, si $(\mathrm{A}_n)_{n\geqslant 0}$ est une k-algèbre profinie graduée, nous considérerons indifféremment A_0 comme une k-algèbre profinie ou bien comme une k-algèbre profinie graduée. Nous désignerons alors par $\rho : (\mathrm{A}_n) \to \mathrm{A}_0$ le morphisme de $\mathbf{Alpg}_{/k}$ tel que $\rho_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{A}_0}$ et $\rho_n = 0$ si $n > 0$. De même, $\tau : \mathrm{A}_0 \to (\mathrm{A}_n)$ désignera la section de ρ telle que $\tau_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{A}_0}$ et $\tau_n = 0$ si $n > 0$.

Toute structure de cogroupe sur $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induit une structure de cogroupe sur A_0 telle que ρ et τ soient des homomorphismes de cogroupes. Dans ce cas, notons I_0 l'idéal d'augmentation de A_0 et posons $\mathrm{A}'_n = \mathrm{A}_n/\overline{\mathrm{I}_0\mathrm{A}_n}$ pour tout $n \geqslant 0$ (de sorte que $\mathrm{A}'_0 = k$).

Alors, $(\mathrm{A}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un cogroupe dans $\mathbf{Alpg}_{/k}$ (noter que, comme $\mathrm{A}_0 = \mathrm{I}_0 \oplus k\cdot 1$, alors $\mathrm{I}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{A}_n \simeq \overline{\mathrm{I}_0\mathrm{A}_n}$ est facteur direct de A_n, pour tout n). Puisque τ est une section de ρ alors, d'après 2.4.0, le cogroupe $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le « coproduit semi-direct » de A_0 et du cogroupe $(\mathrm{A}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De façon précise, $(\mathrm{A}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est isomorphe, comme objet de $\mathbf{Alpg}_{/k}$, au noyau du couple :

$$(\mathrm{A}_n) \underset{(\rho\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathrm{id})\Delta}{\overset{\mathrm{in}_2}{\rightrightarrows}} \mathrm{A}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}}_k (\mathrm{A}_n)$$

(où $\Delta : (\mathrm{A}_n) \to (\mathrm{A}_n)\mathbin{\widehat{\otimes}}(\mathrm{A}_n)$ est la comultiplication de (A_n) et $\mathrm{in}_2(x) = 1 \mathbin{\widehat{\otimes}} x$), et, identifiant A'_n à son image dans A_n, l'application

$$(\mathrm{A}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{A}'_n) \longrightarrow (\mathrm{A}_n), \qquad a_0 \mathbin{\widehat{\otimes}} a'_n \mapsto a_0 a'_n$$

est un isomorphisme de $\mathbf{Alpg}_{/k}$. (N. B. Ce n'est pas un isomorphisme de cogroupes, mais $\Delta(\mathrm{A}') \subseteq \mathrm{A}' \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A}$ et $(\mathrm{id} \mathbin{\widehat{\otimes}} \gamma\rho') \circ \Delta_{|\mathrm{A}'} = \Delta'$, où Δ' est la comultiplication de A' et $\gamma\rho'$ la projection $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$, cf. 2.4.0.)

5.1.4. — Soient (A, J) un objet de $\mathscr{C}$ et $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} = \mathrm{Gr}_{\mathrm{J}}(\mathrm{A})$ l'objet de $\mathbf{Alpg}_{/k}$ associé, **554**
i.e. $\mathrm{A}_n = \overline{\mathrm{J}^n}/\overline{\mathrm{J}^{n+1}}$ pour tout $n \geqslant 0$. Il est clair que l'algèbre $\mathscr{A} = \prod_{n\geqslant 0} \mathrm{A}_n$ est engendrée par A_0 et A_1, c'est-à-dire que, pour $n \geqslant 1$, l'application

$$\mathrm{A}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}_0} \mathrm{A}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}_0} \cdots \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}_0} \mathrm{A}_1 \longrightarrow \mathrm{A}_n \tag{1}$$

définie par la multiplication est surjective.

Supposons de plus que (A, J) soit un cogroupe de $\mathscr{C}$ et que chaque $\mathrm{A}/\overline{\mathrm{J}^n}$ soit plat sur k. Alors, d'après 5.1.2, $\mathrm{Gr}_{\mathrm{J}}(\mathrm{A})$ est un cogroupe de $\mathbf{Alpg}_{/k}$. Donc, d'après 5.1.3, si l'on pose

$$\mathrm{A}'_n = \Big\{x \in \overline{\mathrm{J}^n}/\overline{\mathrm{J}^{n+1}} \mid \Delta(x) - 1 \mathbin{\widehat{\otimes}} x \in \bigoplus_{i=1}^{n} (\overline{\mathrm{J}^i}/\overline{\mathrm{J}^{i+1}}) \mathbin{\widehat{\otimes}} (\overline{\mathrm{J}^{n-i}}/\overline{\mathrm{J}^{n-i+1}})\Big\}, \tag{2}$$

alors l'application $(\mathrm{A}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A}'_n) \to (\mathrm{A}_n)$, $a_0 \mathbin{\widehat{\otimes}} a'_n \mapsto a_0 a'_n$ est un isomorphisme de $\mathbf{Alpg}_{/k}$.

Notant I_0 l'idéal d'augmentation de A_0, on déduit de (1) et du diagramme commutatif ci-dessous, où $\mathrm{A}_1'^{\widehat{\otimes}\, n}$ désigne $\mathrm{A}_1' \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \cdots \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{A}_1'$ (n facteurs) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}_0}} \cdots \mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}_0}} \mathrm{A}_1 \arrow[d, "m"'] & \mathrm{A}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{A}_1'^{\widehat{\otimes}\, n} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\, m'"] & (\mathrm{I}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{A}_1'^{\widehat{\otimes}\, n}) \bigoplus \mathrm{A}_1'^{\widehat{\otimes}\, n} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\, m' \,\mid\, \oplus m'"] \\
\mathrm{A}_n & \mathrm{A}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{A}_n' \arrow[l, "\sim"'] & (\mathrm{I}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{A}_n') \bigoplus \mathrm{A}_n' \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

que l'application

$$m' : \mathrm{A}_1' \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ldots \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{A}_1' \longrightarrow \mathrm{A}_n' \tag{3}$$

induite par la multiplication de $(\mathrm{A}_i')_{i\in\mathbb{N}}$ est surjective ; autrement dit, la k-algèbre profinie $\mathscr{A}' = \prod_{n\geqslant 0} \mathrm{A}_n'$ est engendrée par ses termes de degré 1.

[104] Revenons maintenant à l'hypothèse (i) de la proposition 5.1 : A est l'algèbre affine d'un k-groupe formel infinitésimal topologiquement plat, I_A son idéal d'augmentation, B une sous-algèbre fermée de A, $\mathrm{I}_\mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{I}_\mathrm{A}$ et $\mathrm{J} = \overline{\mathrm{AI}_\mathrm{B}}$; on note q la projection $\mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathrm{J}$. On suppose que $\mathrm{A}/\overline{\mathrm{J}^n}$ est topologiquement plat sur k, pour tout $n \geqslant 1$, et que B est contenue dans le noyau $\widetilde{\mathrm{B}}$ du couple :

$$\mathrm{A} \underset{(q\,\widehat{\otimes}_k\, \mathrm{id}_\mathrm{A})\Delta_\mathrm{A}}{\overset{\mathrm{in}_2}{\rightrightarrows}} (\mathrm{A}/\mathrm{J}) \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{A}$$

Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} = \mathrm{Gr}_\mathrm{J}(\mathrm{A})$, soit $\mathrm{I}_0 = \mathrm{I}_\mathrm{A}/\mathrm{J}$ l'idéal d'augmentation de $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}/\mathrm{J}$, et définissons $(\mathrm{A}_n')_{n\in\mathbb{N}}$ comme en (2) plus haut. On note $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(\widetilde{\mathrm{B}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) l'objet de $\mathbf{Alpg}_{/k}$ associé à la filtration de B (resp. $\widetilde{\mathrm{B}}$) induite par celle de A, i.e. définie par les idéaux $\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{J}^n}$ (resp. $\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{J}^n}$). Alors, il est clair que $\mathrm{B}_n \subseteq \widetilde{\mathrm{B}}_n \subseteq \mathrm{A}_n'$ pour tout n, et que

$$\mathscr{B} = \prod_{n\geqslant 0} \mathrm{B}_n \subseteq \widetilde{\mathscr{B}} = \prod_{n\geqslant 0} \widetilde{\mathrm{B}}_n$$

sont des sous-algèbres de $\mathscr{A}' = \prod_{n\geqslant 0} \mathrm{A}_n'$.

D'autre part, J (resp. $\overline{\mathrm{J}^2}$) est l'image dans A de $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{I}_\mathrm{B}$ (resp. $\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2}$). Par conséquent, l'application

$$\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} (\mathrm{I}_\mathrm{B}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2}) \longrightarrow \mathrm{J}/\overline{\mathrm{J}^2} = \mathrm{A}_1 \simeq \mathrm{A}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{A}_1'$$

[104] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, et l'on a mis à la fin le « supplément » $\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^n} = \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{J}^n}$ (qui n'est pas nécessaire pour établir la proposition 5.1).

est surjective, et elle se factorise par $(\mathrm{A}/\mathrm{J})\,\widehat{\otimes}_k(\mathrm{I}_\mathrm{B}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2})$. On déduit alors du diagramme commutatif et exact :

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{A}/\mathrm{J})\,\widehat{\otimes}_k(\mathrm{I}_\mathrm{B}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2}) \arrow[d] & \mathrm{I}_0\,\widehat{\otimes}_k(\mathrm{I}_\mathrm{B}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2}) \bigoplus(\mathrm{I}_\mathrm{B}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2}) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d] \\
\mathrm{J}/\overline{\mathrm{J}^2} \arrow[d] & \mathrm{I}_0\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{A}'_1 \bigoplus \mathrm{A}'_1 \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

que A'_1 est l'image de $\mathrm{I}_\mathrm{B}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2}$, de sorte qu'on a $\mathrm{B}_1 = \mathrm{A}'_1$. Comme A' est engendrée par A'_1, il en résulte que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{A}'_n \subseteq \mathrm{B}_n \subseteq \widetilde{\mathrm{B}}_n \subseteq \mathrm{A}'_n,$$

d'où $\mathrm{B}_n = \widetilde{\mathrm{B}}_n = \mathrm{A}'_n$. **555**

Enfin, comme le groupe formel G est *infinitésimal*, on a $\mathfrak{r}(\mathrm{A}) = \mathrm{I}_\mathrm{A}$ et donc les idéaux $\overline{\mathrm{I}_\mathrm{A}^n}$ tendent vers 0 (cf. 0.1.2) ; a fortiori, les idéaux $\overline{\mathrm{J}^n}$ tendent vers 0, et donc les filtrations induites sur $\widetilde{\mathrm{B}}$ et B sont séparées. De plus, comme B est une sous-algèbre *fermée* de A, elle est complète pour la topologie définie par les idéaux $\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{J}^n}$. Par conséquent, il résulte de [**CA**, V, § 7, Lemme 1] (voir aussi 5.1.5 ci-dessous) que $\mathrm{B} = \widetilde{\mathrm{B}}$. Ceci achève la démonstration de la proposition 5.1.

On a de plus le supplément suivant. D'après hypothèse, l'algèbre affine A/J du sous-groupe formel F est topologiquement plate sur k. Donc, d'après le théorème 2.4, le morphisme $\mathrm{G} = \mathrm{Spf}(\mathrm{A}) \to \mathrm{F}\backslash\mathrm{G} = \mathrm{Spf}(\mathrm{B})$ est *surjectif et topologiquement plat*. Comme

$$\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_\mathrm{B}\,\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^n} = \mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_\mathrm{B}(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{J}^n}) = \overline{\mathrm{J}^n},$$

on en déduit que $\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^n} = \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{J}^n}$ pour tout n. Ceci découle aussi du du fait que les applications

$$\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^i}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^{i+1}} \longrightarrow \mathrm{A}'_i = (\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{J}^i})/(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{J}^{i+1}})$$

sont surjectives, et de 5.1.5 (ii) ci-dessous, appliqué à $\mathrm{B}'_i = \overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^i}$ et $\mathrm{B}_i = \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{J}^i}$.

5.1.5. Lemme. — [105] (i) *Soient* M *et* N *deux groupes abéliens filtrés par des suites décroissantes de sous-groupes* $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *et* $(\mathrm{N}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. *On suppose que la réunion des* M_n (*resp.* N_n) *égale* M (*resp.* N), *que l'intersection des* M_n (*resp.* N_n) *est nulle, et que* M *est* complet *pour la topologie définie par les* M_n. *Soit* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *un morphisme de groupes filtrés.*

a) *Si* f *induit une surjection des gradués associés, alors* f *est une surjection et* N *est complet pour la topologie définie par les* N_n.

b) *Si Si* f *induit une injection des gradués associés, alors* f *est une injection.*

(105) N.D.E. : L'original énonçait uniquement le point (ii) ; pour la commodité du lecteur, on a énoncé en (i) le lemme 1 de [**CA**, V, § 7] (voir aussi [**BAC**, III, § 2.8]).

(ii) *Soient* B *un groupe abélien,* $\mathrm{B} = \mathrm{B}'_0 \supseteq \mathrm{B}'_1 \supseteq \cdots$ *et* $\mathrm{B} = \mathrm{B}_0 \supseteq \mathrm{B}_1 \supseteq \cdots$ *deux filtrations séparées de* B *par des sous-groupes tels que* $\mathrm{B}'_n \subseteq \mathrm{B}_n$ *pour tout* n*. On suppose* B complet *pour la topologie définie par la filtration* (B'_n)*.*

Si l'application $\mathrm{B}'_i/\mathrm{B}'_{i+1} \to \mathrm{B}_i/\mathrm{B}_{i+1}$ *est* surjective *pour tout* i*, alors* $\mathrm{B}'_n = \mathrm{B}_n$ *pour tout* n*.*

Soit $n \geqslant 0$. Le point (ii) découle du point (i) appliqué à $\mathrm{M} = \mathrm{B}'_n \supseteq \mathrm{B}'_{n+1} \supseteq \cdots$ et $\mathrm{N} = \mathrm{B}_n \supseteq \mathrm{B}_{n+1} \supseteq \cdots$.

5.2. *Dans toute la suite de ce paragraphe* 5*,* k *désigne un corps parfait de caractéristique* $p > 0$*.*

Nous posons $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si B est une k-algèbre profinie et si $r \in \mathbb{N}$, nous notons $((x^{p^r}))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$ l'idéal fermé de B qui est engendré par les éléments x^{p^r}, où x parcourt le radical $\mathfrak{r}(\mathrm{B})$ de B. Si $r = \infty$, nous utilisons la même notation en convenant que $((x^{p^\infty}))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$ est l'idéal nul. Dans les deux cas, B_r désigne le quotient $\mathrm{B}/((x^{p^r}))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$.

Nous disons que B *est de hauteur* $\leqslant r$ si $((x^{p^r}))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$ est l'idéal nul ; si cela a lieu et si r est fini, nous disons que B est *de hauteur finie.*

Considérons en particulier le cas où B est de la forme $k[[\omega]]$, ω étant un espace
556 vectoriel linéairement compact (cf. 1.2.5). Nous disons alors que B est une *algèbre de séries formelles* et que B_r est une *algèbre de séries formelles tronquées* ($r \in \overline{\mathbb{N}}$; nous convenons donc de dire que $\mathrm{B} = \mathrm{B}_\infty$ est également « tronquée »). Si $\mathrm{B} = k[[\omega]]$, nous écrivons aussi $((x^{p^r}))_{x\in\omega}$ au lieu de $((x^{p^r}))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$.

Lorsque ω est un k-espace vectoriel linéairement compact filtré par une suite croissante de sous-espaces vectoriels fermés

$$0 = \omega_0 \subseteq \omega_1 \subseteq \omega_2 \subseteq \omega_3 \subseteq \cdots$$

nous noterons $((x^{p^r}))_{r\in\omega_r}$ l'idéal fermé de $k[[\omega]]$ qui est engendré par les éléments x^{p^r}, où r parcourt $\mathbb{N}$ et x parcourt ω_r. Nous désignons par ${}_r\omega$ l'espace vectoriel linéairement compact filtré tel que

$${}_r\omega_i = \omega_i \quad \text{si} \quad i < r \quad \text{et} \quad {}_r\omega_i = \omega \quad \text{si} \quad i \geqslant r.$$

Théorème (Dieudonné-Cartier). — *Soit* $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un monomorphisme de groupes formels* infinitésimaux *sur un* corps parfait k *de caractéristique* $p > 0$*. Soit* B *l'algèbre affine de l'espace homogène* $\mathrm{H}\backslash\mathrm{G}$ *et supposons vérifiée l'une des deux conditions suivantes :*

(i) B *est de* hauteur finie (*ceci a lieu en particulier si* G *est de hauteur finie*).

(ii) B *est un anneau local* noethérien complet*.*

Alors B *est isomorphe au produit tensoriel complété d'une famille finie d'algèbres de séries formelles tronquées.*

557 La démonstration de ce théorème occupe les paragraphes 5.2.1 à 5.2.5.

5.2.1. — Soient A l'algèbre affine de G, $\mathrm{I_A}$ son idéal maximal, et $\mathrm{I} = \mathrm{B} \cap \mathrm{I_A}$ l'idéal maximal de B. D'après 2.4, on a $\mathrm{H} = \mathrm{Spf}(\mathrm{A}/\overline{\mathrm{AI}})$ et

$$\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{A} \mid \Delta(x) - 1 \widehat{\otimes} x \in \overline{\mathrm{AI}} \widehat{\otimes} \mathrm{A}\}.$$

Posons $\omega = \mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$. On désigne par I_r le sous-espace vectoriel fermé de I formé des x tels $x^{p^r} = 0$, par ω_r l'image canonique de I_r dans ω. Nous allons démontrer :

Proposition. — *S'il existe une section* [106] $\sigma : \omega \to \mathrm{I}$ *de la projection* $\mathrm{I} \to \mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$, *telle que* $\sigma(\omega_r) \subseteq \mathrm{I}_r$ *pour tout* r, *alors* B *est isomorphe à* $k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x\in\omega_r}$.

Une telle section se prolonge en effet en un homomorphisme continu $t : k[[\omega]] \to \mathrm{B}$, qui se factorise à travers $\mathrm{B}' = k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x\in\omega_r}$. Nous prouvons de 5.2.2 à 5.2.5 que l'homomorphisme

$$s : \ \mathrm{B}' = k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x\in\omega_r} \longrightarrow \mathrm{B}$$

induit par t, est bijectif.

Ce qui précède s'applique en particulier quand la filtration de ω est *stationnaire*, c.-à-d., quand il existe un entier n_0 tel que $\omega_n = \omega_{n_0}$ pour $n_0 \leqslant n < +\infty$. Dans ce cas, on peut en effet construire σ d'abord sur ω_1, puis sur un supplémentaire ω_2' de ω_1 dans ω_2, puis sur un supplémentaire ω_3' de ω_2 dans $\omega_3 \ldots$, enfin sur un supplémentaire ω_∞' de ω_{n_0} dans ω. [107] Il est clair qu'on obtient ainsi un isomorphisme de $k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x\in\omega_r}$ sur le produit tensoriel complété :

$$\frac{k[[\omega_1]]}{((x^p))_{x\in\omega_1}} \widehat{\otimes} \frac{k[[\omega_2']]}{((x^{p^2}))_{x\in\omega_2'}} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \frac{k[[\omega_{n_0}']]}{((x^{p^{n_0}}))_{x\in\omega_{n_0}'}} \widehat{\otimes}\, k[[\omega_\infty']].$$

La filtration de ω est évidemment stationnaire si $\omega_r = \omega$ pour r assez grand (cas (i)), ou bien si ω est de dimension finie (cas (ii)). L'énoncé ci-dessus implique donc notre théorème, modulo les points 5.2.2–5.2.5 ci-dessous.

5.2.2. — *Supposons d'abord* B *de hauteur* $\leqslant 1$, c.-à-d., que $x^p = 0$ si $x \in \mathrm{I}$. Il résulte 558
alors de 5.1.2 que le gradué $\mathrm{Gr}_\mathrm{I}(\mathrm{B})$ associé à B pour la filtration $\mathrm{I} \supseteq \overline{\mathrm{I}^2} \supseteq \overline{\mathrm{I}^3} \supseteq \cdots$ est muni d'une structure de cogroupe dans la catégorie $\mathbf{Alpg}_{/k}$. Par conséquent, l'algèbre profinie $\mathrm{C} = \prod_{n\geqslant 0} \mathrm{Gr}_\mathrm{I}(\mathrm{B})_n$ est l'algèbre affine d'un k-groupe formel K. Il est clair qu'on a $\omega_{\mathrm{K}/k} = \mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$ et que K est radiciel de hauteur $\leqslant 1$. D'après 4.4, l'application identique de $\omega_{\mathrm{K}/k}$ induit donc un isomorphisme de $\mathrm{B}' = k[[\omega_{\mathrm{K}/k}]]/((x^p))_{x\in\omega_{\mathrm{K}/k}}$ sur C. Ceci implique en particulier que l'application s de 5.2.1 induit un isomorphisme des gradués associés à B' et B lorsqu'on filtre B' et B par les puissances de l'idéal d'augmentation. Donc s est un isomorphisme, d'après [**CA**, V, § 7, Lemme 1] (voir aussi 5.1.5).

[106] N.D.E. : continue !

[107] N.D.E. : En effet, si V_r est un supplémentaire (fermé !) de $(\mathrm{I}_r \cap \overline{\mathrm{I}^2}) + \mathrm{I}_{r-1}$ dans I_r, la projection $\mathrm{V}_r \to \omega_r'$ (où $\omega_1' = \omega_1$) est un isomorphisme ; de même, le sous-espace fermé $\overline{\mathrm{I}^2} + \mathrm{I}_{n_0}$ admet un supplémentaire $\mathrm{V}_\infty \simeq \omega_\infty'$, d'où des sections $\sigma_r : \omega_r' \xrightarrow{\sim} \mathrm{V}_r$, pour $r = 1, \ldots, n_0, \infty$. On notera que cette construction ne s'étend pas de manière évidente si l'on omet l'hypothèse que la filtration soit stationnaire, car le sous-espace $\bigcup_{r\in\mathbb{N}^*} \omega_r \simeq \bigoplus_{r\in\mathbb{N}^*} \omega_r'$ n'est pas nécessairement fermé, et la continuité de l'application linéaire $\bigoplus_{r\in\mathbb{N}^*} \sigma_r$ n'est pas assurée.

5.2.3. — *Supposons maintenant* B *de hauteur finie* $\leqslant n$. Soit π l'isomorphisme $x \mapsto x^p$ de k sur k. L'application linéaire de $\mathrm{B}\,\widehat{\otimes}_\pi\, k$ dans B qui envoie $b\,\widehat{\otimes}_\pi\, x$ sur $b^p x = (bx^{\frac{1}{p}})^p$ a une image fermée qui n'est autre que la sous-algèbre fermée $\mathrm{B}^p = \{b^p \mid b \in \mathrm{B}\}$ de B. Posons $\mathrm{J} = \mathrm{B}^p \cap \mathrm{I} = \mathrm{B}^p \cap \mathrm{I}_{\mathrm{A}}$.

D'après la proposition 5.1, $\mathrm{Spf}(\mathrm{A}/\overline{\mathrm{AJ}})$ est un sous-groupe formel K de G, et B^p est l'algèbre affine du quotient $\mathrm{K}\backslash\mathrm{G}$. Notons $\mathscr{A}(\mathrm{K})$ (resp. $\mathscr{A}(\mathrm{H})$) l'algèbre affine de K (resp. H) et $\mathscr{I}$ l'image de $\overline{\mathrm{AI}}$ dans $\mathscr{A}(\mathrm{K})$. Alors, puisque $\overline{\mathrm{AJ}} \subseteq \overline{\mathrm{AI}}$, on a

$$\mathrm{H} \subseteq \mathrm{K} \subseteq \mathrm{G} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{A}(\mathrm{K})/\mathscr{I} \simeq \mathscr{A}(\mathrm{H}).$$

D'autre part, d'après le théorème 2.4, A est topologiquement libre sur B, donc, d'après 1.3.2, B est un facteur direct du B-module pseudocompact A. Il en résulte que $\overline{\mathrm{AJ}}\cap\mathrm{B} = \overline{\mathrm{AJ}}$; par conséquent, $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}/\overline{\mathrm{BJ}}$ s'identifie à une sous-algèbre fermée de $\mathrm{A}/\overline{\mathrm{AJ}} = \mathscr{A}(\mathrm{K})$. Puisque B est l'algèbre affine de $\mathrm{H}\backslash\mathrm{G}$, on a, pour tout $x \in \mathrm{B}_1$:

$$\Delta(x) - 1\,\widehat{\otimes}\, x \in \mathscr{I}\,\widehat{\otimes}\,\mathscr{A}(\mathrm{K}).$$

Donc, d'après la proposition 5.1, B_1 est l'algèbre affine du quotient $\mathrm{H}\backslash\mathrm{K}$. De plus, $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}/((x^p))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$ est de hauteur $\leqslant 1$.

Soient $\mathrm{B}' = k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x\in\omega_r}$, B'^p la sous-algèbre $\{x^p \mid x \in \mathrm{B}'\}$, et J' l'idéal maximal de B'^p. Alors, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{B}' & \xrightarrow{\ s\ } & \mathrm{B} \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathrm{B}'_1 = \mathrm{B}'/\overline{\mathrm{B}'\mathrm{J}'} & \xrightarrow{\ s_1\ } & \mathrm{B}_1 = \mathrm{B}/\overline{\mathrm{BJ}}
\end{array}$$

559 et, d'après ce qui précède et 5.2.2, s_1 est un isomorphisme de B'_1 sur B_1. Or, d'après 2.4, A est topologiquement libre sur $\mathrm{B} = \mathscr{A}(\mathrm{H}\backslash\mathrm{G})$ et sur $\mathrm{B}^p = \mathscr{A}(\mathrm{K}\backslash\mathrm{G})$, donc, d'après 1.3.3, B est topologiquement libre sur B^p.

D'après 5.2.4 ci-dessous, l'homomorphisme $s^p : \mathrm{B}'^p \to \mathrm{B}^p$, qui est induit par s, est un isomorphisme. Appliquant alors 0.3.4 à l'anneau pseudocompact $\mathrm{B}'^p = \mathrm{B}^p$ et aux modules $\mathrm{M} = \mathrm{B}'$, $\mathrm{N} = \mathrm{B}$, on obtient que s est un isomorphisme, puisque s_1 en est un. Ceci prouve 5.2 lorsque B est de hauteur finie, modulo le point 5.2.4 ci-dessous.

5.2.4. — Pour tout espace vectoriel linéairement compact V sur k, nous notons ${}_\pi\mathrm{V}$ l'espace $\mathrm{V}\,\widehat{\otimes}_\pi\, k$ déduit de V par l'extension $x \mapsto x^p$ du corps des scalaires. On a alors un diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & {}_\pi\overline{\mathrm{I}^2} & \xrightarrow{\ \alpha\ } & {}_\pi\mathrm{I} & \xrightarrow{\ \beta\ } & {}_\pi\omega & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle u} & & \big\downarrow{\scriptstyle v} & & \big\downarrow{\scriptstyle w} & & \\
0 & \longrightarrow & \overline{\mathrm{J}^2} & \xrightarrow{\ \gamma\ } & \mathrm{J} & \xrightarrow{\ \delta\ } & \overline{\omega} & \longrightarrow & 0
\end{array} \quad ,$$

où l'on a posé $\overline{\omega} = \mathrm{J}/\overline{\mathrm{J}^2}$ et où les applications u, v, w sont induites par l'application linéaire $x\,\widehat{\otimes}\, a \mapsto x^p a$ de ${}_\pi\mathrm{B}$ dans B^p. Si l'on pose $\mathrm{J}_n = \{x \in \mathrm{J} \mid x^{p^n} = 0\}$ et $\overline{\omega}_n = \delta(\mathrm{I}_n)$, il est clair qu'on a $\mathrm{J}_n = v({}_\pi\mathrm{I}_{n+1})$ et $\overline{\omega}_n = w({}_\pi\omega_{n+1})$.

De plus, comme u et v sont des surjections, w est une surjection et a pour noyau l'image ω_0 du noyau de v. La section ${}_\pi\sigma : {}_\pi\omega \to {}_\pi\mathrm{I}$, qui est induite par la section σ de 5.2.1, définit donc par passage au quotient une section $\tau : \overline{\omega} \to \mathrm{J}$ qui est compatible avec les filtrations de J et $\overline{\omega}$.

Comme B^p est de hauteur $\leqslant n-1$, cette section induit, par hypothèse de récurrence, un isomorphisme

$$s' : \mathrm{B}'' = k[[\overline{\omega}]]/((x^{p^r}))_{x\in\overline{\omega}_r} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{B}^p.$$

Comme B″ s'identifie manifestement à B'^p et s' à s^p, *notre théorème est donc démontré quand* B *est de hauteur finie.* 560

5.2.5. — *Il reste à considérer le cas où* B *est de hauteur infinie*, et où la projection $\mathrm{I} \to \omega$ possède une section σ compatible avec les filtrations de ω et I. Considérons l'homomorphisme

$$s : \mathrm{B}' = k[[\omega]]/((x^{p^n}))_{x\in\omega_n} \longrightarrow \mathrm{B}$$

induit par σ ; il suffit de montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'application $s_r : \mathrm{B}'_r \to \mathrm{B}_r$ induite par s est inversible. [108]

Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathrm{L}_r = \mathrm{B}^{p^r} \cap \mathrm{I} = \{x^{p^r} \mid x \in \mathrm{I}\}$. Comme, d'après 1.3.2, B est un facteur direct du B-module pseudocompact A, on a $\overline{\mathrm{AL}_r} \cap \mathrm{B} = \overline{\mathrm{BL}_r}$, et donc $\mathrm{B}/\overline{\mathrm{BL}_r}$ s'identifie à une sous-algèbre fermée de $\mathrm{A}/\overline{\mathrm{AL}_r}$. De plus, comme en 5.2.3, on déduit de la proposition 5.1 que $\mathrm{A}/\overline{\mathrm{AL}_r}$ est l'algèbre affine d'un sous-groupe formel G_r de G contenant H et que $\mathrm{B}_r = \mathrm{B}/\overline{\mathrm{BL}_r}$ est l'algèbre affine de l'espace homogène $\mathrm{H}\backslash\mathrm{G}_r$.

Posons $\mathrm{M}(r) = \mathrm{I}/\overline{\mathrm{BL}_r}$; la projection canonique de B sur B_r induit évidemment un isomorphisme de $\omega = \mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$ sur $\mathrm{M}(r)/\overline{\mathrm{M}(r)^2}$, qui nous permet d'identifier ces deux espaces. Soit $\omega_n(r)$ l'image dans ω de l'idéal $\mathrm{M}_n(r) = \{x \in \mathrm{M}(r) \mid x^{p^n} = 0\}$ et soit $\mathrm{I}_n(r) = \{x \in \mathrm{I} \mid x^{p^n} \in \overline{\mathrm{BL}_r}\}$. [109] Il est clair que $\omega_n(r) = \omega$ si $n \geqslant r$. Montrons que $\omega_n(r) = \omega_n$ si $n < r$. Pour tout r, n, la suite ci-dessous est exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{I}_n(r) \cap \overline{\mathrm{I}^2} \longrightarrow \mathrm{I}_n(r) \longrightarrow \omega_n(r) \longrightarrow 0.$$

De plus, pour tout n, on a $\bigcap_r \mathrm{I}_n(r) = \mathrm{I}_n$, puisque $\bigcap_r \overline{\mathrm{BL}_r} = 0$. Comme dans $\mathbf{PC}(k)$ les limites projectives filtrantes sont exactes (cf. 0.2), il en résulte que, pour tout n,

$$(*) \qquad \omega_n = \bigcap_r \omega_n(r).$$

D'autre part, comme le théorème 5.2 est déjà prouvé pour les algèbres de hauteur finie, on a $\mathrm{B}_r \simeq \mathrm{B}'_r$, d'où on déduit que $\omega_n(r) = \omega_n(r+1)$ si $n < r$. Combiné avec $(*)$, ceci entraîne $\omega_n(r) = \omega_n$ si $n < r$.

Par conséquent, l'espace vectoriel ω filtré par les sous-espaces $(\omega_n(r))_{n\geqslant 0}$ n'est autre que ${}_r\omega$ (5.2). A fortiori, l'application $\sigma(r)$ composée de $\sigma : \omega \to \mathrm{I}$ et de la projection $\mathrm{I} \to \mathrm{M}(r)$ est compatible avec les filtrations $(\omega_n(r))$ et $(\mathrm{M}_n(r))$ de ω et M. Comme $k[[{}_r\omega]]/((x^{p^n}))_{x\in{}_r\omega_n}$ n'est autre que B'_r et que $s_r : \mathrm{B}'_r \to \mathrm{B}_r$ est l'homomorphisme 561

[108] N.D.E. : En effet, B′ (resp. B) est la limite projective des B'_r (resp. B_r).

[109] N.D.E. : On a corrigé l'original, qui définissait $\mathrm{I}_n(r)$ comme l'image réciproque de $\mathrm{M}_n(r)$ dans I. D'autre part, on a détaillé ce qui suit.

induit par $\sigma(r)$, le résultat déja établi pour les algèbres de hauteur finie montre que s_r est un isomorphisme. C.Q.F.D.

5.3. Remarques. — a) Appelons *stationnaire* toute k-algèbre profinie qui est le produit tensoriel complété d'une famille [110] d'algèbres de séries formelles tronquées. Si G est un k-groupe formel infinitésimal et B l'algèbre affine d'un espace homogène de G, il résulte du théorème 5.2 que l'algèbre $\mathrm{B}/((x^{p^r}))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$ est stationnaire pour tout entier $r\in\mathbb{N}$. Cela implique en particulier que B est une limite projective d'algèbres stationnaires.

b) Je ne sais pas si, avec les notations de 5.2.1, on peut choisir A et B de telle façon qu'il n'existe pas de section $\sigma : \omega \to \mathrm{I}$ compatible avec les filtrations. On remarquera cependant qu'on peut avoir pour ω n'importe quel espace vectoriel linéairement compact filtré par une suite croissante de sous-espaces fermés. En effet, si $\omega_1 \subseteq \omega_2 \subseteq \cdots \subseteq \omega$ est un tel espace filtré, on peut définir dans l'algèbre $\mathrm{B} = \mathrm{A} = k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x\in\omega_r}$ un morphisme diagonal $\Delta_\mathrm{A} : \mathrm{A} \to \mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{A}$ vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) de 2.1 ; il suffit de poser $\Delta_\mathrm{A}(y) = y\mathbin{\widehat{\otimes}}1 + 1\mathbin{\widehat{\otimes}}y$ lorsque y est l'image dans A d'un élément de ω.

562 ***5.4. Corollaire***. — *Soient* G *un groupe algébrique sur un corps parfait k de caractéristique $p>0$,* H *un sous-groupe algébrique de* G*, e l'image de l'élément neutre de* G *dans* $\mathrm{H}\backslash\mathrm{G}$ *et* A *l'algèbre locale de* $\mathrm{H}\backslash\mathrm{G}$ *en e. Alors* $\widehat{\mathrm{A}}$ *est isomorphe à une algèbre de la forme*

$$k[[\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_r,\dots\mathrm{X}_s]]/(\mathrm{X}_1^{p^{n_1}},\dots,\mathrm{X}_r^{p^{n^r}}).$$

Ceci résulte de 5.2 (ii) et 1.3.4.

Bibliographie

[CA] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323-448. [111]

[Br00] C. Breuil, *Groupes p-divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Ann. of Math. **152** (2000), n°2, 489-549.

[BAlg] N. Bourbaki, *Algèbre*, Chap. I-III, Hermann, 1970.

[BAC] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chap. I-IV, Masson, 1985.

[BEns] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Chap. I-IV, Hermann, 1970.

[BLie] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. II-III, Hermann, 1970.

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[De72] M. Demazure, *Lectures on p-divisible groups*, Lect. Notes Math. **302**, Springer-Verlag, 1972.

[Fo77] J.-M. Fontaine, *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*, Astérisque 47-48, Soc. Math. France, 1977.

(110) N.D.E. : Faut-il lire « *famille finie* » ?

(111) N.D.E. : On a ajouté à cette référence, figurant dans l'original, les références qui suivent.

[Gr57] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. **9** (1957), 119-221.

[Gr74] A. Grothendieck, *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné*, Presses Univ. Montréal, 1974.

[Il85] L. Illusie, *Déformations de groupes de Barsotti-Tate, d'après A. Grothendieck*, pp. 151-198 *in* : Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, Astérisque **127**, Soc. Math. France, 1985.

[La75] M. Lazard, *Commutative formal groups*, Lect. Notes Math. **443**, Springer-Verlag, 1975.

[LT65] J. Lubin, J. Tate, *Formal complex multiplication in local fields*, Ann. of Math. **81** (1965), 380-387.

[LT66] J. Lubin, J. Tate, *Formal moduli for one-parameter formal Lie groups*, Bull. Soc. Math. France **94** (1966), 49-60.

[Me72] W. Messing, *The crystals associated with Barsotti-Tate Groups : with applications to abelian schemes*, Lect. Notes Math. **264**, Springer-Verlag, 1972.

[MM65] J.W. Milnor, J.C. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math. **81** (1965), 211-264.

[Mi65] B. Mitchell, *Theory of categories*, Academic Press, 1965.

[Po73] N. Popescu, *Abelian categories with applications to rings and modules*, Academic Press, 1973.

[Ta67] J. Tate, *p-divisible groups*, pp. 158-183 *in* : Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966) (éd. T. A. Springer), Springer-Verlag, 1967.

[We95] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Univ. Press, 1995.