

AVERTISSEMENT

Nous présentons ici une réédition légèrement révisée du Séminaire originel, dont le but et le contenu se trouvent indiqués dans l'Introduction. La révision a consisté pour l'essentiel dans la correction de fautes de frappe, l'addition (en notes de bas de page) de quelques remarques ou références supplémentaires, le découpage actuel en trois volumes munis chacun d'une table des matières détaillée et d'un index des notations, l'adjonction d'un index terminologique à la fin du volume 3. De plus, l'exposé VI_B de J.-E. Bertin a été partiellement réécrit par ses soins, notamment les paragraphes 5 et 10, de sorte que certaines références à cet exposé sont différentes des références à l'exposé originel. Le lecteur trouvera une liste des exposés du Séminaire au début du présent volume.

Depuis la parution de la première édition du présent Séminaire a paru la totalité des *Éléments de Géométrie Algébrique*, Chap. IV, ce qui rend inutile certains passages du Séminaire ; nous avons signalé parfois en note de bas de page les références pertinentes à EGA IV qui permettent de court-circuiter de tels passages.

Pour un autre exposé sur les groupes algébriques utilisant systématiquement le langage des schémas, nous signalons le livre de M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes Algébriques* (North-Holland & Masson et Cie). Contrairement au présent Séminaire, ce livre ne suppose aucune connaissance de Géométrie Algébrique, mais contient tous les préliminaires nécessaires de théorie des schémas, et sa lecture peut donc servir d'introduction à l'étude de notre Séminaire. (Il contient d'ailleurs des thèmes non couverts dans le Séminaire, comme la théorie de structure à la Dieudonné des groupes algébriques affines commutatifs, dans *loc. cit.* Chap.V.)

Bures-sur-Yvette, Mars 1970

⁽⁰⁾version 1.0 du 4 septembre 08

INTRODUCTION

1. Le but du présent séminaire est double.

D'une part, nous visons à donner des fondements commodes pour la théorie des schémas en groupes en général. Les exposés I à IV donneront à cet égard les indispensables exercices préliminaires de syntaxe schématique et catégorique. Pour obtenir un langage qui « colle » sans effort à l'intuition géométrique, et éviter des circonlocutions insupportables à la longue, nous identifions toujours un préschéma X sur un autre S au foncteur $(\mathbf{Sch})_{/S}^{\circ} \rightarrow (\mathbf{Ens})$ qu'il représente ^(*), et il est nécessaire de donner de nombreuses définitions de telle façon qu'elles s'appliquent à des foncteurs quelconques, représentables ou non. D'ailleurs, presque tous les foncteurs que nous aurons à utiliser seront des « faisceaux » (pour la « topologie fidèlement plate quasi-compacte »); l'exposé IV, qui ne traite des groupes que de façon accessoire, donne une esquisse du langage de la « localisation » et des faisceaux, qui s'avère également fort commode dans les questions de représentabilité des foncteurs. Cet exposé nous fournira surtout, pour les questions de passage au quotient, le cadre le plus commode pour la suite.

L'exposé V donne quelques résultats généraux sur l'existence de quotients, repris dans l'exposé VI_A dans le cas du quotient d'un groupe algébrique sur un corps (ou plus généralement, sur un anneau artinien) par un sous-groupe ^(**). Ce dernier exposé et l'exposé VI_B qui lui fait suite contiennent également divers résultats élémentaires spéciaux aux groupes algébriques sur un corps, couramment utilisés par la suite.

(*)Un tel point de vue semble avoir été envisagé pour la première fois il y a huit ou neuf ans à propos de la théorie des groupes formels par P. Cartier, qui n'a pas pris la peine malheureusement de le préciser et de le systématiser comme il le méritait.

(**)Pour une étude plus approfondie du passage au quotient, notamment par les groupes réductifs, voir l'importante étude de D. Mumford, *Geometric Invariant Theory*, *Ergebnisse der Mathematik*, Bd 34, Springer 1965. Observons que sur un point important, la terminologie de ce livre ne concorde pas avec la nôtre, car sur un corps de caractéristique $p > 0$, les groupes que Mumford appelle « réductifs » ⁽¹⁾, sont les groupes lisses de type multiplicatif au sens du Séminaire (cf. Exp. IX). On peut sans doute considérer que l'acception de Mumford du sens du mot « réductif », qui perd sa signification sur une base qui n'est pas un corps, a été adoptée par lui à titre provisoire et comme une sorte de pis aller (et c'est aussi à peu près ce qu'explique Mumford pour d'autres motifs, dès le second alinéa de sa préface!). ⁽¹⁾ N.D.E. : voir les remarques ajoutées à la fin de cette Introduction.

L'exposé VII étudie certains faits liés à la caractéristique du corps de base et développe notamment avec la généralité qui convient la correspondance entre schémas en groupes radiciels de hauteur 1 et p -algèbres de Lie restreintes.

Enfin, l'exposé XVIII contient la généralisation, en théorie des schémas, du théorème de Weil sur la définition « birationnelle » des groupes algébriques.

D'autre part, nous nous proposons de généraliser aux groupes sur un préschéma de base quelconque, la théorie de structure de Borel-Chevalley des groupes algébriques affines. Il est d'ailleurs apparu à l'occasion de la rédaction des notes du séminaire que l'hypothèse affine était inutile pour de nombreux résultats de la théorie. Les résultats les plus complets sont obtenus évidemment dans les cas des « schémas en groupes semi-simples » ou plus généralement « réductifs », dont nous nous occuperons exclusivement à partir de l'exposé XIX. Chevalley lui-même avait déjà donné la construction des groupes « de Tôhoku » au-dessus de l'anneau des entiers, construction qui sera reprise dans le présent séminaire. Le théorème d'unicité principal ⁽²⁾ donne une caractérisation simple des variantes « tordues » de ces groupes de Tôhoku, sur un préschéma de base S : ce sont les groupes affines et lisses sur S , dont les fibres géométriques sont des groupes semi-simples connexes au sens habituel ^(***) ⁽²⁾.

2. Comme dans le cas de la théorie connue sur un corps algébriquement clos, un rôle crucial est joué par les sous-tores des schémas en groupes envisagés. Aussi l'étude préliminaire des tores, et plus généralement des « schémas en groupes de type multiplicatif », (tant du point de vue intrinsèque que du point de vue des sous-groupes de type multiplicatif d'un groupe donné), prend une assez large place dans ce Séminaire (exposés VIII à XII). Leur remarquable rigidité (plus grande même à certains égards que celle des schémas abéliens, ou des schémas en groupes semi-simples) en fait des instruments de travail très efficaces pour l'étude de certains groupes plus généraux.

3. À partir de l'exposé XII (à l'exclusion de l'exposé XVIII déjà mentionné) nous utiliserons couramment la théorie des groupes algébriques affines sur un corps algébriquement clos, que le lecteur trouvera dans le Séminaire Chevalley 1956, plus particulièrement dans les exposés IV à IX de ce Séminaire. Nous utiliserons également, mais dans une moindre mesure, les exposés ultérieurs du Séminaire Chevalley, consacrés à la structure des groupes algébriques semi-simples. En effet, nous reprendrons la théorie de Chevalley directement dans le cadre des schémas : on verra que de cette façon (même sur un corps de base) l'exposé gagne en simplicité et en précision.

^(***)C'est là le résultat essentiel de la thèse de M. Demazure (*Schémas en groupes réductifs*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 369-413).

⁽²⁾N.D.E. : Ceci fait référence au corollaire XXIII.5.6, qui se déduit facilement du théorème d'unicité pour les groupes réductifs *déployés* (théorème XXIII.4.1), étant donné que tout S -groupe semi-simple est une « forme tordue » (pour la topologie étale) d'un groupe « de Tôhoku » (cf. corollaire XXII.2.3).

4. L'objet principal du présent Séminaire est évidemment de développer des techniques qui s'appliquent à l'étude des schémas en groupes sur une base quelconque, i.e. essentiellement à l'étude des *familles* de groupes algébriques. À ce titre, les propriétés infinitésimales de telles familles, et en particulier le cas d'un schéma de base artinien, jouent un rôle important. Ces propriétés interviennent même pour l'étude des groupes algébriques sur un corps K , dans le cas où ce dernier n'est pas parfait, pour pouvoir notamment appliquer la technique de descente dans le cas non galoisien. Parmi les résultats nouveaux obtenus dans ce cas, signalons l'existence de tores maximaux et de sous-groupes de Cartan dans un groupe algébrique lisse quelconque, la rationalité de la variété des tores maximaux, et divers résultats connexes (Exp. XIV⁽³⁾), ou la correspondance entre les « formes » d'un groupe semi-simple et les fibrés principaux homogènes sous un groupe algébrique semi-simple (en général non connexe) convenable (Exp. XXIV, 1.16–1.20). De façon générale, on peut dire que les méthodes requises pour travailler sur un corps de base non parfait sont essentiellement celles utilisées pour les préschémas de base quelconques, et par là sortent du cadre de la géométrie algébrique classique.

5. Il n'a pas semblé utile d'indiquer en tête des exposés rédigés la date ou les dates des exposés oraux correspondants du Séminaire. Contentons-nous de dire que l'ordre des exposés multigraphiés (de I à XXVI) correspond bien à l'ordre des exposés oraux. Par ailleurs, la rédaction du texte définitif est parfois nettement postérieure à celle de l'exposé oral, et souvent en diffère assez substantiellement, le texte rédigé étant généralement plus détaillé et plus complet (tels les Exp. IV et VII_B), voire sensiblement plus général (tel l'Exp. XII ou VII_B) que l'exposé oral. D'autres exposés rédigés ne correspondent à aucun exposé oral (VI_B, VII_A, XV, XVI, XVII, et l'essentiel de XXVI), et ont été rédigés et insérés dans le Séminaire multigraphié, soit pour fournir des références commodes pour divers autres exposés (c'est notamment le cas de VI_B), soit parce qu'ils constituent un prolongement naturel des notions et techniques déjà développées. On notera comme conséquence que la lecture des exposés VII_A, VII_B, XV, XVI, XVII n'est pas nécessaire pour l'étude du reste du Séminaire, et notamment pour la partie de ce Séminaire consacrée aux schémas en groupes réductifs.⁽⁴⁾

6. De la théorie des schémas, nous utiliserons surtout le langage général des schémas, exposé dans EGA I, les notions de morphisme plat, morphisme étale, morphisme lisse, exposées dans SGA 1, I à V, enfin la théorie de la descente fidèlement plate de SGA 1, VIII. Nous avons dans la mesure du possible évité de formuler des hypothèses noethériennes inutiles, ce qui nous a obligés en revanche à remplacer l'habituelle hypothèse « de type fini » par l'hypothèse « de présentation finie ». Pour la notion de morphisme de présentation finie, le lecteur consultera EGA IV, 1.4 et 1.6. Les résultats de SGA 1, I à IV, énoncés le plus souvent dans le contexte noethérien, seront développés dans

⁽³⁾N.D.E. : en particulier, théorèmes 1.1 et 6.1.

⁽⁴⁾N.D.E. : Signalons toutefois que, dans l'Exposé VII_B, sont obtenus des résultats sur la structure des anneaux locaux d'un préschéma en groupes G sur un corps k , qui sont utilisés dans l'Exposé III, §§ 4.15 et suivants (voir aussi VI_A, 1.1).

le cas général dans EGA IV ^(****), où seront développées également en détail des méthodes standard pour réduire certains types d'énoncés (faisant intervenir des hypothèses de présentation finie) au cas noethérien (EGA IV, paragraphes 8, 9, 11). Le lecteur qui ne voudra pas admettre ces résultats de EGA IV pourra simplifier certains énoncés ou leur démonstration en supposant le préschéma de base localement noethérien. Il s'expose cependant à des difficultés dans les cas où la démonstration procède par descente de \widehat{A} à A , où \widehat{A} est le complété d'un anneau local noethérien A , car cette méthode amène à introduire l'anneau (en général non noethérien) $\widehat{A} \otimes_A \widehat{A}$.

7. Les références se feront suivant le système décimal habituel : la référence 5.7.11 renvoie à la proposition (ou lemme, définition, etc.) de ce nom dans le même exposé ; dans la référence XVII 7.8 le chiffre romain indique le numéro de l'exposé. Nous utiliserons les sigles suivants pour nos références standard :

Bible	=	Séminaire Chevalley « Groupes de Lie algébriques », 1956/58
EGA X, x.y.z	=	J. Dieudonné et A. Grothendieck, <i>Éléments de Géométrie Algébrique</i> , Chap. X, énoncé x.y.z (ou sous-paragraphe x.y, etc.)
SGA n , X.y.z	=	Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, année n , énoncé y.z de l'exposé X.
TDTE	=	A. Grothendieck, Techniques de descente et Théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique, exposés dans le Séminaire Bourbaki entre 1959 et 1962.

⁽¹⁾ N.D.E. : Concernant le quotient par un groupe réductif, la situation a beaucoup évolué depuis la rédaction de la Note (**) par A. Grothendieck. En effet, pour un groupe algébrique affine sur un corps arbitraire k , la « bonne » notion, introduite par Mumford, est celle de groupe « géométriquement réductif ». (On dit, d'autre part, que G est « linéairement réductif » si toute représentation rationnelle de G est complètement réductible, mais, comme signalé dans la Note (*), cette condition est trop contraignante si $\text{car}(k) > 0$). D'après les résultats de M. Nagata et W. J. Haboush ([Na64], [NM64], [Ha75]), les k -groupes géométriquement réductifs sont exactement les k -groupes réductifs au sens du présent Séminaire. Pour tout ceci, voir les éditions ultérieures du livre de Mumford ([MF82]). De plus, l'extension au cas d'une base arbitraire de la notion de « réductivité géométrique », et de ses conséquences pour le passage au quotient, a été faite par C. S. Seshadri ([Se77]), et des additions, dues à M. Raynaud, se trouvent dans l'article [CTS79] de J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc. Enfin, pour des développements plus récents concernant le passage au quotient par un groupe algébrique ou, plus généralement, par un groupoïde (cf. l'Exposé V du présent Séminaire), signalons les articles [Ko97] et [KM97] de J. Kollar et de S. Keel et S. Mori.

Bibliographie

- [CTS79] J.-L. Colliot-Thélène & J.-J. Sansuc, *Fibrés quadratiques et composantes connexes réelles*, Math. Ann. **244** (1979), 105-134.
 [Ha75] W. J. Haboush, *Reductive groups are geometrically reductive*, Ann. of Math. **102** (1975), n°1, 67-83.
 [KM97] S. Keel & S. Mori, *Quotient by groupoids*, Ann. of Math. **145** (1997), n°1, 193-213.

(****) Depuis la rédaction de cette introduction, les quatre parties (§§ 1 à 21) de EGA IV sont parues.

- [Ko97] J. Kollár, *Quotient spaces modulo algebraic groups*, Ann. of Math. **145** (1997), n°1, 33-79.
- [MF82] D. Mumford & J. Fogarty, *Geometric invariant theory*, 2ème éd., Springer-Verlag, 1982; (resp. 3ème éd., avec F. Kirwan, 1994).
- [Na64] M. Nagata, *Invariants of a group in an affine ring*, J. Math. Kyoto Univ. **3** (1964), n°3, 369-377.
- [NM64] M. Nagata & T. Miyata, *Note on semi-reductive groups*, J. Math. Kyoto Univ. **3** (1964), n°3, 379-382.
- [Se77] C. S. Seshadri, *Geometric reductivity over an arbitrary base*, Adv. Math. **26** (1977), n°3, 225-274.

