L'influence d'Alexandre GROTHENDIECK

en K-théorie algébrique et en K-théorie topologique

par Max KAROUBI

Dans sa démonstration du théorème de Riemann-Roch en géométrie algébrique en 1957, Grothendieck avait introduit un groupe mystérieux (à l'époque) dénoté par K(X). Ici X est une variété algébrique quasi projective non singulière disons sur le corps des complexes. Ce groupe K(X) est le quotient du groupe libre engendré par les classes d'isomorphie [E] de fibrés algébriques par le sous-groupe engendré par les relations du type [E] = [E'] + [E"] chaque fois qu'on a une suite exacte

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$

Ce groupe K(X) s'appelle la K-théorie de X, K comme "Klassen" en allemand, la langue maternelle de Grothendieck. Une définition analogue en termes de faisceaux cohérents est possible ; cf [BS] théorème 2 et la remarque au bas de la page 108.

Le groupe K(X) est en fait un foncteur contravariant de X (pour l'image réciproque des fibrés). C'est aussi un foncteur covariant pour les morphismes propres : si $f : X \to Y$ est un tel morphisme, on en déduit un "homomorphisme de Gysin" $f_*^K : K(X) \to K(Y)$ qui jouit de nombreuses propriétés qu'on ne développera pas ici. Cependant, il est important de mentionner que si Y est un point et X une variété projective f_*^K (E) n'est autre que la somme alternée

$$\sum (-1)^k \dim(H^k(X;E))$$

en convenant d'identifier E au faisceau de ses sections algébriques.

Si E est un fibré algébrique, on peut le voir aussi comme un fibré topologique sur l'espace topologique sous-jacent à X et il a donc des classes caractéristiques de Chern $c_i(E)$ appartenant à $H^{2i}(X ; Z)$. Si on écrit formellement la classe totale de Chern $c(E) = \prod (1 + x_i)$, où les x_i sont de degré 2, la "classe de Todd" Todd(E) est le produit formel $\prod \frac{x_i}{1-e^{-x_i}}$. D'après Hirzebruch [H], on a ainsi les formules suivantes, où les c_i sont les classes de Chern de E

$\mathrm{Todd}_0(E) = 1$
$\mathrm{Todd}_1(E) = c_1/2$
$\mathrm{Todd}_2(E) = (c_2 + c_1^2)/12$
$\mathrm{Todd}_3(E) = c_2c_1/24$
$\mathrm{Todd}_4(E) = (-c_4 + c_3c_1 + 3\, c_2^2 + 4c_2c_1^3 - c_2c_1^3)/720$
etc.

Par sa définition même, la classe de Todd est “multiplicative” : on a la formule Todd(E $\oplus$ F) = Todd(E).Todd(F)

On définit par le même formalisme un “caractère de Chern” qui est un homomorphisme d’anneaux de K(X) vers $H^{pair}(X)$, défini par la formule

$$\mathrm{Ch}(E) = \sum \exp(x_i)$$

Parallèlement à f_*^K , un homomorphisme de Gysin est classiquement défini en cohomologie

$$f_*^H : H^*(X) \to H^*(Y)$$

Cependant, le diagramme évident

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{f_*^K} & K(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(X) & \xrightarrow{f_*^H} & H^*(Y) \end{array}$$

n’est PAS commutatif. La déviation de commutativité est donnée précisément par les classes de Todd des fibrés tangents TX et TY à X et Y respectivement. Plus précisément, pour tout fibré E sur X, le théorème de de Riemann-Roch-Grothendieck (RRG) s’écrit sous la forme suivante :

$$f_*^H\ (\mathrm{Ch}(E).\mathrm{Todd}(TX)) = \mathrm{Ch}(\ f_*^K\ (E)).\mathrm{Todd}(TY)$$

En raison du caractère linéaire des deux membres par rapport à E, cette formule s’écrit pour tout élément x de K(X) sous la forme équivalente

$$\mathrm{Ch}(\ f_*^K\ (x)).\mathrm{Todd}(TY) = \ f_*^H\ (\mathrm{Ch}(x).\mathrm{Todd}(TX))$$

En multipliant par $(\mathrm{Todd}(TY))^{-1}$, elle s’écrit aussi sous la forme

$$\mathrm{Ch}(\ f_*^K\ (x)) = \ f_*^H\ (\mathrm{Ch}(x).\mathrm{Todd}(Tf))$$

où Todd(f) = Todd(TX).f*(Todd(TY)$^{-1}$) est par définition la classe de Todd du “fibré tangent le long des fibres” de f, soit TX - TY.

Dans le cas particulier où Y est un point, cette formule se réduit à celle de Riemann-Roch-Hirzebruch RRH qu’elle généralise (cf.[H]) :

$$f_*^H\ (\mathrm{Ch}(E).\mathrm{Todd}(TX)) = \sum (-1)^k \dim(H^k(X;E))$$

En particulier, le premier membre est un nombre entier, ce qui n’est nullement évident à priori.

Il est important de noter que dans la formule de RRG on peut remplacer la cohomologie usuelle par une cohomologie plus algébrique qui est l’anneau gradué A(X) des classes de cycles sur X pour l’équivalence linéaire (la graduation étant donnée par la codimension des cycles), un invariant plus fin que la cohomologie usuelle (qui ne dépend que de la topologie). Dans ce cadre plus algébrique, Grothendieck a construit une théorie des classes de Chern et du caractère de Chern tout à fait analogue à la définition classique. En fait, dans ce nouveau cadre, le caractère de Chern induit un isomorphisme

$$K(X) \otimes Q \xrightarrow{\cong} A(X) \otimes Q$$

La formule de RRG énoncée ici est loin d'être la plus générale. Dans SGA6 [G], Grothendieck et ses collaborateurs se débarrassent de plusieurs hypothèses gênantes (nécessité d'un corps de base k, régularité de X et Y, hypothèses trop restrictives de quasi-projectivité pour X et Y, etc). Pour réaliser ce programme, il faut redéfinir le groupe K(X) pour un schéma X le plus général possible. Dans ce cadre, la "bonne" catégorie n'est pas celle des fibrés vectoriels mais celle des complexes parfaits sur un schéma. Par définition, un tel complexe est localement quasi-isomorphe à un complexe borné de fibrés vectoriels. La K-theorie est alors décrite en utilisant des triangles de complexes plutôt que des suites exactes. Une telle K-theorie de complexes a trouvé des applications importantes dans de nombreux travaux : Waldhausen [W], Thomason et Trobaugh [TT][1] , Schlichting [Sc], etc. Nous y reviendrons un peu plus loin.

Revenons cependant à la K-théorie "traditionnelle". Quelques années après Grothendieck, Atiyah et Hirzeburch [A] ont exploité cette idée pour construire une "K-théorie topologique", $K^{top}(X)$, autrement dit une K-théorie construite avec des fibrés vectoriels topologiques (disons à fibre un espace vectoriel complexe pour commencer). Ils ont aussi montré un théorème de Riemann-Roch différentiable sous la forme suivante [AH] : soit $f : X \rightarrow Y$ une application différentiable propre entre deux variétés C^∞ telle que le fibré tangent le long des fibres Tf = TX - TY soit muni d'une structure complexe stable (ou même seulement ^{c}spinorielle) . On a alors une formule de Riemann-Roch dans un contexte différentiable

$$\mathrm{Ch}(f_*^K(x)) = f_*^H(\mathrm{Ch}(x).\mathrm{Todd}(f))$$

Elle mesure aussi la non commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} K^{top}(X) & \xrightarrow{f_*^K} & K^{top}(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(X) & \xrightarrow{f_*^H} & H^*(Y) \end{array}$$

Ici f_*^K est un homomorphisme de Gysin en K-théorie topologique dont la définition est sensiblement différente de celle de Grothendieck. Pour un plongement par exemple, elle utilise l'isomorphisme de Thom

$$K^{top}(X) \rightarrow K^{top}(\nu)$$

démontrée essentiellement grâce au théorème de périodicité de Bott qui exprime la périodicité par rapport à n de la K-théorie topologique des sphères S^n (période 2 dans le cas complexe, 8 dans le cas réel).

En fait, le théorème de Grothendieck (dans le cas complexe et dans le cadre de la cohomologie ordinaire résulte du théorème d'Atiyah-Hirzebruch [AH] et d'un théorème de Baum-Fulton-Mac Pherson [BFP] qui exprime la commutativité du diagramme

[1] En fait, Thomason et Trobaugh supposent toujours quelques conditions du type X quasi-compact et quasi-séparé.

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{f_*^K} & K(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K^{top}(X) & \xrightarrow{f_*^K} & K^{top}(Y) \end{array}$$

où les deux f_*^K sont des homomorphismes de Gysin en K-théorie algébrique ou topologique.

Une différence essentielle entre les K-théories algébrique et topologique est que cette dernière est plus calculable. Par exemple le caractère de Chern induit un isomorphisme entre $K^{top}(X)$ et $H^{pair}(X;Q)$. Par contre, les deux K-théories ont beaucoup de points en commun, notamment l'existence d'opérations (non additives) définies à partir des puissances extérieures des fibrés

$$\lambda^k : K(X) \to K(X)$$

qui font de K(X) ce que Grothendieck appelle un λ-anneau. D'autres opérations en K-théorie ont été introduites ultérieurement par Adams, soit $\psi^k = Q_k(\lambda^1, ..., \lambda^k)$, où Q_k est le polynôme de Newton. Ces opérations λ^k et ψ^k sont beaucoup plus maniables que leurs analogues cohomologiques. Pour s'en convaincre, il suffit de parcourir les ouvrages classiques de topologie algébrique et constater la technicité considérable requise pour définir avec soin les opérations de Steenrod par exemple.

La K-théorie topologique a connu des applications spectaculaires dans les années 60 et a été une des inspirations d'Atiyah et Singer pour leur célèbre théorème de l'indice. La manière la plus élégante d'énoncer ce théorème est de définir deux indices analytique et topologique (X étant une variété C^∞ compacte)

$$i_a : K(T^*X) \to Z \text{ et } i_t : K(T^*X) \to Z$$

L'homomorphisme i_a est défini grâce aux opérateurs pseudo-différentiels sur X tandis que i_t est défini en utilisant essentiellement l'homomorphisme de Gysin en K-théorie topologique. L'égalité de ces deux indices i_a et i_t est une généralisation du théorème de Riemann-Roch-Hirsebruch. En considérant des familles d'opérateurs, Atiyah et Singer obtiennent même une généralisation de RRG (dans un cadre différentiable) mais il est clair que les idées fondamentales de Grothendieck ont inspiré une grande partie de ce formalisme.

L'influence de Grothendieck s'est étendue bien au delà des années 60 en mélangeant intimement géométrie algébrique et topologie. Si nous revenons à la géométrie algébrique classique, il paraissait clair dans les années 60 qu'une bonne définition des "foncteurs dérivés" de la K-théorie se posait (K(X) n'étant que le premier groupe $K_0(X)$ de cette série de foncteurs). Des définitions de K_1 et de K_2 avaient été déjà proposées par Bass et Milnor [Ba][M1], motivées par des applications arithmétiques intéressantes. Le déclic est venu de Grothendieck lui-même qui avait eu le premier l'idée d'associer un ensemble simplicial à une catégorie arbitraire, bien qu'il ne l'ait jamais publiée : les simplexes de dimension 0 sont les objets, ceux de dimension 1 les flèches, ceux de dimension 2 les flèches composables, etc. La réalisation géométrique de cet objet simplicial est un objet intéressant en soi (on retrouve par exemple le classifiant d'un groupe discret G si on considère la catégorie avec un seul objet, les morphismes étant les élément de G).

Pour définir les groupes $K_n(X)$ (avec $K_0(X) = K(X)$), Quillen [Q] a eu l'idée d'associer à X une catégorie astucieuse Q(X), dont les objets sont les fibrés vectoriels E sur X, les morphismes de E vers F étant donnés par un sous-fibré F' de F et une surjection de F' sur E (avec une loi de composition évidente)

$$\begin{array}{ccc} F' & \to & F \\ \downarrow & & \\ E & & \end{array}$$

Quillen définit alors les groupes $K_n(X)$ comme les groupes d'homotopie de l'ensemble simpliciticial associé à Q(X) et qu'on notera simplement $\pi_{n+1}(Q(X))$. Il est facile de voir que $\pi_1(Q(X))$ est bien le groupe K(X) de Grothendieck.

Quillen a explicité de nombreuses applications de cette définition. Par exemple, si X = Spec(A), le calcul (rationnel) de $K_*(X)$ est équivalent à celui de l'homologie rationnelle du groupe linéaire infini discret GL(A) = lim $GL_n(A)$. Plus précisément $H_*(GL(A))$ est une algèbre extérieure sur les groupes $K_*(X)$. Le cas où A n'est pas commutatif peut être traité de manière analogue en remplaçant les fibrés vectoriels sur X par les modules projectifs de type fini sur A.

Par exemple, si A est l'anneau des entiers algébriques d'un corps de nombres avec r_1 places complexes et r_2 places réelles, on déduit des calculs de Borel [Bo] que

$K_{2j}(X)$ est un groupe fini pour $j > 0$
$K_{4j-1}(X) = Z^{r1}$ + un groupe fini
$K_{4j+1}(X) = Z^{r1+r2}$ + un groupe fini

Un des multiples liens avec la géométrie algébrique est le suivant : soit $\mathcal{K}_p$ le faisceau associé au préfaisceau

$$U \mapsto K_p(U)$$

Alors le groupe de cohomologie $H^p(X; \mathcal{K}_p)$ est isomorphe au groupe de Chow $A^p(X)$. Voir le livre de Srinivas [Sr] pour de nombreuses autres applications.

Une autre idée maîtresse dans l'œuvre de Grothendieck a été l'introduction des catégories dérivées et des catégories triangulées. Cette formalisme a permis à Waldhausen [W] puis à Thomason-Trobaugh [TT] de définir les groupes $K_n(X)$ (avec de bonnes propriétés formelles) pour des schémas quasiment arbitraires, ce que nous avons déjà évoqué un peu plus haut. En effet, dans SGA6, Grothendieck et ses collaborateurs définissent le groupe K_0 d'une catégorie dérivée. Pour définir les groupes K_n d'un schéma X, on considére de manière plus approfondie la catégorie des complexes parfaits de faisceaux sur X. Dans cette catégorie on a la notion de quasi-isomorphisme et de cofibrations, notions de base que Waldhausen et Thomason-Trobaugh utilisent pour étendre la définition de Quillen à ce nouveau cadre. Comme dans le cas des fibrés vectoriels, on associe à cette catégorie de complexes parfaits de faisceaux un ensemble simplicial dont les groupes d'homotopie sont (à un décalage près) les groupes $K_n(X)$ cherchés.
A cette occasion, Thomason et Trobaugh répondent à une question ouverte dans SGA 6 : si X est un schéma et $\mathcal{F}$ un complexe parfait au-dessus d'un ouvert affine U de X, on peut l'étendre à quasi-isomorphisme près en un complexe parfait sur X si et seulement si sa classe dans $K_0(U)$ appartient à l'image de l'homomorphisme $K_0(X) \to K_0(U)$. Ce résultat est une application frappante des méthodes de K-théorie à la géométrie algébrique.

Comme autres illustrations, voici deux applications spectaculaires de la K-théorie algébrique.

Théorème de Matsumoto. Si F est un corps, $K_2(F)$ est isomorphe au quotient de $F \otimes_Z F$ par le sous-groupe engendré par les relations $u \otimes (1-u)$, où $u \in F - \{0,1\}$.

Théorème de Merkujev Suslin. Si F est un corps, on a un isomorphisme

$$K_2(F)/nK_2(F) = H^2(G; (\mu_n)^{\otimes 2})$$

où μ_n désigne le groupe des matrices de l'unité dans la cloture algébrique de F. Si en outre on suppose $\mu_n \subset F$, ce groupe est isomorphe à la 2-torsion du groupe de Brauer.

Exemple : si n = 2, on démontre ainsi que tout élément de la 2-torsion du groupe de Brauer d'un corps <u>quelconque</u> est la classe du produit tensoriel d'algèbres de quaternions.

Parallèlement à la K-théorie algébrique qui s'est développée après Grothendieck sous l'impulsion de Bass, Milnor, Quillen, Waldhausen, Thomason... , la K-théorie topologique ne s'est pas arrêtée à Atiyah et Hirzebruch. Dès la fin des années 60 et surtout dans les années 70, elle a pris un nouveau départ. Ainsi pour toute algèbre de Banach A (non nécessairement commutative), on sait définir des groupes de K-théorie topologiques $K_n(A)$ qui sont périodiques de période 8 dans le cas réel et 2 dans le cas complexe (théorèmes de Bott).
Cette périodicité a beaucoup intrigué les algébristes, car les groupes K_n de Quillen (ou Thomason) sont loin d'être périodiques. Il existe cependant une périodicité galoisienne "cachée" ; cf. par exemple [FG] où plusieurs versions de la périodicité de Bott sont présentées.
En fait, Kasparov (cf. [Bl]) a même réussi à définir des bifoncteurs $KK_n(A, B)$ par des méthodes purement analytiques et montré que le théorème d'Atiyah-Singer peut se démontrer par un simple formalisme de "KK-théorie". Il n'existe pas d'analogue de groupe de KK-théorie dans un cadre purement algébrique.

C'est sans aucun doute les travaux de Connes [C] qui ont donné à la K-théorie topologique ses nouvelles lettres de noblesse dans le cadre de la "géométrie non commutative", un concept paradoxalement éloigné de la problématique initiale de Grothendieck.

Faute de place, je me limiterai à une seule application de la K-théorie topologique concernant les algèbres AF. Une telle algèbre A est l'adhérence (dans l'algèbre des opérateurs bornés sur un Hilbert) d'une limite inductive d'algèbres semi-simples complexes de dimension finie. Alors deux telles algèbres AF, soient A et B, sont isomorphes si et seulement si les groupes ordonnés $K_0(A)$ et $K_0(B)$ sont isomorphes (un élément de K_0 est dit "positif" s'il est la classe d'un module). Voir [Bl], [C] et [R] pour de nombreuses autres applications, notamment en physique théorique.

Il existe enfin une théorie intermédiaire entre la K-théorie algébrique et la K-théorie topologique qui est la K-théorie hermitienne qu'on dénote par KQ (plus précisément ${}_\varepsilon KQ$ en tenant du compte du signe de symétrie $\varepsilon = \pm 1$). Très sommairement, on la construit comme la K-théorie algébrique des fibrés vectoriels E en se donnant en plus une forme ε-hermitienne non dégénérée sur E. Nous allons donner deux applications frappantes des méthodes de Grothendieck à cette théorie.

La première est due à Voevodsky [V]. Par des méthodes astucieuses combinant la théorie des schémas (avec la topologie de Nisnevich) et la topologie algébrique, il a réussi à démontrer la conjecture de Milnor [M2] qui est la suivante. Si F un corps de caractéristique différente de 2, désignons par W(F) l'anneau de Witt construit avec les formes quadratiques non dégénérées sur F (les modules hyperboliques étant identifiés à 0). On a un idéal fondamental I(F) qui est le noyau de l'homomorphisme d'augmentation W(F) $\rightarrow$ Z/2. Les puissantes $I^n(F)$ forment alors une filtration décroissante de W(F). La conjecture de Milnor démontrée par Voevodsky est la suivante : les quotients successifs $I^n(F)/I^{n+1}(F)$ sont isomorphes (par des flèches explicites) à certains groupes de K-théorie $k_n^M(F) = K_n^M(F)/2$. Ici les groupes de "K-théorie de Milnor" $K_n^M(F)$ (à ne pas confondre avec les groupes de Quillen) sont définis de manière purement algébrique (comme dans le théorème de Matsumoto), en considérant le quotient du produit tensoriel de F* n fois par lui-même - en tant que Z-module - par le groupe engendré par les produits tensoriels $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$, où on a $x_i + x_j = 1$ pour un couple (i, j) avec $i \neq j$.

Par ailleurs, Marco Schlichting [Sc] a réussi à étendre la théorie de Grothendieck et Thomason-Trobaugh dans ce cadre hermitien. Il a pu ainsi redémontrer de manière purement algébrique les théorèmes de périodicité de Bott (sous une forme beaucoup plus générale). Dans ce but, on introduit des théories intermédiaires ${}_{\varepsilon}U$ et ${}_{-\varepsilon}V$ comme "fibres" des foncteur hyperbolique

$$K \rightarrow {}_{\varepsilon}KQ$$

et oubli

$${}_{-\varepsilon}KQ \rightarrow K$$

respectivement (pour des schémas quasiment arbitraires). Ce que Schlichting démontre est que la théorie ${}_{-\varepsilon}V$ est la même que la théorie ${}_{\varepsilon}U$ avec un décalage de degrés. Ceci lui permet de redémontrer dans le cadre des groupes classiques un de mes théorèmes [K2]. Pour une algèbre de Banach involutive réelle ou complexe, on a ainsi une équivalence d'homotopie naturelle entre les composantes connexes des espaces suivants

$$GL(A)/{}_{\varepsilon}O(A)) \quad \text{et} \quad \Omega({}_{-\varepsilon}O(A)/GL(A))$$

Il est facile de voir que ce théorème implique les théorèmes de périodicité de Bott classiques en choisissant A = R, C ou H avec des involutions adéquates.

Je voudrais terminer ce court article par quelques souvenirs personnels sur Grothendieck. Dans un certain sens, mon chemin a commencé comme celui d'Illusie (entré comme moi à l'Ecole Normale Supérieure et qui a été ensuite élève de Grothendieck), en participant au séminaire Cartan-Schwartz de 1963/64. Je voudrais d'ailleurs rendre hommage à Henri Cartan qui a été mon patron de thèse et qui est décédé il y a quelques semaines à l'âge de 104 ans. En fait, j'avais commencé ma thèse un peu par hasard, avec l'aide de Shih Weishu et Cartan et j'avais déjà quelques éléments écrits à la fin des années 1965. C'est de cette année que date ma première rencontre avec Grothendieck qui, avec sa générosité habituelle, n'hésitait pas à me prodiguer des conseils (bien que je n'ai pas été formellement un de ses élèves). Ainsi par exemple cette phrase dont je me rappelle après une première rédaction bien balbutiante : "Karoubi, ce n'est pas comme ça qu'on écrit des mathématiques". Par contre, je ne me suis pas engagé dans la géométrie algébrique et suis resté sous la houlette de Henri Cartan, en approfondissant mes connaissances de K-théorie topologique. Cependant, Grothendieck restait attentif à la progression de mes travaux. Par exemple, au détour d'un théorème de ma thèse, j'avais introduit la notion d'enveloppe pseudo-abélienne d'une catégorie additive. Cette notion n'avait pas échappé à la perspicacité de Grothendieck qui, comme chacun le sait, l'a utilisée plus tard dans sa théorie des motifs. Je l'ai appris d'ailleurs de manière inoppinée lors d'un séjour à l'Institute for Advanced Study à Princeton en 1967 : un visiteur m'a un jour interpelé en m'apprenant que Grothendieck avait utilisé dans ses premiers travaux sur les motifs la notion de catégorie "karoubienne". J'en ai été le premier surpris !

En conclusion, je garde de Grothendieck le souvenir d'une personnalité hors norme sur tous les plans, y compris sur le plan humain par sa volonté très forte de faire partager ses idées (mathématiques et philosophiques), sa disponibilité sans limite et ses conceptions sur ce qu'il est important de faire de notre vie. C'est avec un immense regret que je l'ai vu quitter prématurément la scène scientifique et réduire au strict minimum ses relations avec les nombreux mathématiciens qui l'ont admiré et continuent à le faire en trouvant tous les jours des application de ses travaux.

REFERENCES

(liste non exhaustive)

[A] M..F. Atiyah. K-theory. Benjamin, New York (1967).

[AS] M.F. Atiyah and I.M. Singer. The index of elliptic operators. Ann. of Math. 87, 484-530, 531-545 (with G. Segal), 546-604 (1968).

[AH] M.F. Atiyah and F. Hirzebruch. Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. 65, 276-281 (1959).

[Ba] H. Bass. Algebraic K-theory, Benjamin, New York (1968).

[Be] J. Berrick. An approach to Algebraic K-theory. Pitman (1982).

[Bl] Blackladar. K-theory of operator algebras. Springer (1986).

[BFP] P. Baum, W. Fulton and R. MacPherson. Riemann Roch and topological K-theory for singular varieties. Acta Math 143, p. 155-192 (1979).

[Bo] A. Borel. Stable real cohomology of arithmetic groups. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., p. 235-272 (1974).

[BS] A. Borel et J.-P. Serre. Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck). Bull. Soc. Math. France 86, 97-136 (1958).

[C] A. Connes. Noncommutative Geometry. Academic Press, San Diego (1994).

[FG] E. Friedlander and D. Grayson. Handbook of K-theory. Springer (2005).

[FW] E. Friedlander and C. Weibel. School on Algebraic K-theory and applications. An overview of the subject.

[G] A. Grothendieck, P. Berthelot et L. Illusie (SGA6). Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch. Springer Lecture Notes in Maths N° 225 (1971).

[H] F. Hirzebruch. Topological methods in Algebraic Geometry. Springer (1965).

[K1] M. Karoubi. K-theory, an introduction. Grundlehren 226, Springer (1978). Nouvelle édition (2008) dans la série "Classics in Mathematics".

[K2] M. Karoubi. Le théorème fondamental de la K-théorie hermitienne. Annals of Math. 112, p. 259-282 (1980).

[K3] M. Karoubi. Homologie cyclique et K-théorie. Astérisque 149. Société Mathématique de France (1987).

[M1] J. Milnor. Introduction to Algebraic K-theory. Annals of Math. Studies 197. Princeton University Press (1974).

[M2] J. Milnor. Algebraic K-theory and quadratic forms. Inventiones Math 9, p. 318-344 (1969).

[Q] D. Quillen. Higher Algebraic K-theory. Springer Lecture Notes in Math N° 341 (1973).

[R] J. Rosenberg. Algebraic K-theory and its applications. Graduate Texts in Maths. N° 147. Springer (1994).

[Sc] M. Schlichting. The Mayer-Vietoris principle for the Grothendieck-Witt group of schemes (à paraître au Journal of K-Theory).

[Sr] V. Srinivas. Algebraic K-theory. Birkhauser (1996).

[TT] R. Thomason and T. Trobaugh. Higher Algebraic K-theory of schemes and of derived categories. In the Grothendieck Festshrift, vol. III. Prog. in Maths Vol. 88, p. 247-435. Birkhauser (1990).

[V] V. Voevodsky. The Milnor conjecture. Preprint 1996, availabe at http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0170/

[W] F. Waldhausen. Algebraic K-theory of spaces. Springer Lecture Notes N° 1126, p. 318-419 (1983).