$\neq$ 6185

SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE DU BOIS-MARIE
1962

COHOMOLOGIE LOCALE DES FAISCEAUX COHERENTS ET THEOREMES DE LEFSCHETZ LOCAUX ET GLOBAUX

(SGA 2)

Alexander GROTHENDIECK
(rédigé par un groupe d'auditeurs)

Augmenté d'un exposé par
Mme MICHELE RAYNAUD

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY - AMSTERDAM
MASSON & CIE, EDITEUR - PARIS

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Nous présentons ici, sous une forme revisée et complétée, une réédition par photo-offset du deuxième SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE de l'INSTITUT des HAUTES ETUDES SCIENTIFIQUES tenu en 1962 (miméographié). Le lecteur se reportera à l'Introduction au premier de ces Séminaires (cité SGA 1 par la suite) pour les buts que poursuivent ces séminaires, et leurs relations avec les ELEMENTS DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE.

Le texte des exposés I à XI a été rédigé à mesure, d'après mes exposés oraux et notes manuscrites, par un groupe d'auditeurs, comprenant I. GIROGIUTTI, J. GIRAUD, Mlle M. JAFFE (devenue Mme M. HAKIM) et A. LAUDAL. Ces notes à l'origine étaient considérées comme devant être provisoires et à circulation très limitée, en attendant leur absorption par les EGA (absorption devenue maintenant pour le moins problématique, tout comme pour les autres parties des SGA). Comme il était dit dans l'avertissement à l'édition primitive, ce caractère "confidentiel" des notes devait excuser certaines "faiblesses de style", sans doute plus manifestes dans le présent Séminaire SGA 2 que dans les autres. J'ai essayé dans la mesure du possible d'y obvier dans la présente réédition, par une révision relativement serrée du texte initial. J'ai notamment harmonisé les systèmes de numérotation des énoncés, employés dans les différents exposés, en introduisant partout le même système décimal, déjà utilisé dans la plupart des exposés primitifs du présent SGA 2, ainsi que dans toutes les autres parties des SGA. Cela m'a amené en particulier à revoir entièrement la numérotation des énoncés des exposés III à VIII, (et par conséquent, des références auxdits exposés) (*). J'ai essayé également d'extirper du texte primitif les principales erreurs de dactylographie ou de syntaxe (qui étaient nombreuses et gênantes). De plus, Mme M. HAKIM a bien voulu se charger de réécrire l'exposé IV dans un style moins télégraphique que l'exposé initial. Comme dans les autres rééditions des SGA, j'ai également ajouté un certain nombre de notes de bas de page, soit pour donner des références supplémentaires, soit pour signaler l'état d'une question pour laquelle des progrès ont été faits depuis la rédaction du texte primitif. Enfin, ce Séminaire a été augmenté d'un nouval exposé, savoir l'exposé XIV, rédigé par Mme. MICHELE RAYNAUD en 1967, qui reprend et complète des suggestions contenues dans les "Commentaires à l'Exposé XIII" (XIII 6) (rédigés en Mars 1963). Cet exposé reprend les théorèmes du type Lefschetz du point de vue de la cohomologie étale, en utilisant les résultats sur la cohomologie étale exposés dans SGA 4 et SGA 5 (à paraître dans cette même collection SERIES IN PURE MATHEMATICS) ; il est donc à ce titre de nature moins "élémentaire" que les autres exposés du présent volume, qui n'utilisent guère plus que la substance des chapitres I à III des EGA.

Voici une esquisse du contenu du présent volume. L'exposé I contient le sorite de la "cohomologie à support dans Y" $H_Y^*(X,F)$, où Y est un fermé d'un espace X, cohomologie qui peut s'interpréter comme une cohomologie de X <u>modulo</u> l'ouvert X-Y, et qui est l'aboutissement d'une fort utile "<u>suite spectrale de passage du local au global</u>" I 2.6, faisant intervenir des <u>faisceaux</u> de cohomologie "à support dans Y" $\underline{H}_Y^i(F)$. Ce formalisme peut dans de nombreuses

(*) Il va sans dire que toutes les références à SGA 2 qui figurent dans les parties des SGA publiées dans la SERIES IN PURE MATHEMATICS se rapporteront au présent volume, et non à l'édition primitive de SGA 2 !

questions jouer un rôle de "localisation" analogue à celui joué par la considération de voisinages "tubulaires" de Y en géométrie différentielle. L'exposé II étudie les notions précédentes dans le cas des faisceaux quasi-cohérents sur les préschémas, l'exposé III donne leur relation avec la notion classique de profondeur (III 3.3).

Les exposés IV et V donnent des notions de dualité locale, qu'on peut comparer au théorème de dualité projective de Serre (XII 1.1) ; signalons que ces deux types de théorèmes de dualité sont généralisés de façon substantielle dans le Séminaire de HARTSHORNE (cité en note de bas de page à la fin de Exp. IV).

Les exposés VI et VII donnent des notions techniques faciles, utilisées dans l'exposé VIII pour prouver le théorème de finitude (VIII 2.3), donnant des conditions nécessaires et suffisantes, pour un faisceau cohérent F sur un schéma noethérien X, pour que les faisceaux de cohomologie locale $\underline{H}^i_Y(F)$ soient cohérents pour $i \leq n$ (ou ce qui revient au même, pour que les faisceaux $R^i f_*(F|X-Y)$ soient cohérents pour $i \leq n-1$, où $f: X-Y \to X$ est l'inclusion). Ce théorème est un des résultats techniques centraux du Séminaire, et nous montrons dans l'exposé IX comment un théorème de cette nature peut-être utilisé, pour établir un "théorème de comparaison" et un "théorème d'existence" en géométrie formelle, en calquant et généralisant l'utilisation faite dans (EGA III §§ 4 et 5) du théorème de finitude pour un morphisme propre.

On applique ces derniers résultats dans X et XI, consacrés respectivement à des théorèmes du type Lefschetz pour le groupe fondamental, et pour le groupe Picard. Ces théorèmes consistent à comparer sous certaines conditions les invariants (π_1 ou Pic) attachés respectivement à un schéma X et à un sous-schéma Y (jouant le rôle d'une section hyperplane), et à donner notamment des conditions où ils sont isomorphes. Grosso modo, les hypothèses faites servent à passer de Y au complété formel de X le long de Y, et à pouvoir appliquer ensuite les résultats de IX pour passer de là à un voisinage ouvert U de Y dans X. Pour pouvoir passer de U à X, il faut disposer encore de renseignements (type "pureté" ou "parafactorialité") pour les anneaux locaux de X en les points de Z = X-U, (qui est un ensemble fini discret dans les cas envisagés). Ceci explique l'interaction dans les démonstrations des exposés X, XI, XII entre les résultats locaux et globaux, notamment dans certaines récurrences. Les résultats principaux obtenus dans X et XI sont les théorèmes de nature locale X 3.4 (théorème de pureté) et XI 3.14 (théorème de parafactorialité). On notera que ces théorèmes sont démontrés par des techniques cohomologiques, de nature essentiellement globale. Dans XII on obtient, en utilisant les résultats locaux précédents, les variantes globales de ces résultats pour des schémas projectifs sur un corps, ou plus généralement sur un schéma de base plus ou moins quelconque ; parmi les énoncés typiques, signalons XII 3.5 et XII 3.7.

Dans XIII, nous passons en revue quelques uns des nombreux problèmes et conjectures suggérés par les résultats et méthodes du Séminaire. Les plus intéressants peut-être concernent les théorèmes du type Lefschetz cohomologiques et homotopiques pour les espaces analytiques complexes, cf. XIII pages 26 et suivantes. Dans le contexte de la cohomologie étale des schémas, les conjectures correspondantes sont prouvées dans XIV par une technique de dualité qui devrait s'appliquer également dans le cas analytique complexe (cf. commentaires XIII p. 25 et XIV 6.4). Mais les énoncés homotopiques correspondants dans le cas des espaces analytiques (et plus particulièrement les énoncés faisant intervenir le groupe fondamental) semblent exiger des techniques entièrement nouvelles (cf. XIV 6.4).

Je suis heureux de remercier tous ceux qui, à des titres divers, ont aidé à la parution du présent volume, dont les collaborateurs déjà cités dans cette Introduction. Plus particulièrement, je tiens à remercier Mlle CHARDON pour la bonne grâce avec laquelle elle s'est acquittée de la tâche ingrate que constitue la préparation matérielle du manuscrit définitif pour la photo-offset.

Bures-sur-Yvette, Avril 1968

A. Grothendieck.

Exposé I

LES INVARIANTS COHOMOLOGIQUES GLOBAUX ET LOCAUX RELATIFS A UN SOUS-ESPACE FERMÉ

1. Les foncteurs Γ_Z , $\underline{\Gamma}_Z$.

Soient X un espace topologique, $\underline{C}_X$ la catégorie des faisceaux abéliens sur X. Soient Φ une famille de supports au sens de Cartan on définit le foncteur Γ_Φ sur $\underline{C}_X$ par :

(1) $\Gamma_\Phi(F)$ = sous-groupe de $\Gamma(F)$ formé des sections f telles que support $f \in \Phi$.

Si Z est une partie fermée de X , nous désignons par abus de langage par Γ_Z le foncteur Γ_Φ , où Φ est l'ensemble des parties fermées de X contenues dans Z . Donc on a :

(2) $\Gamma_Z(F)$ = sous-groupe des $\Gamma(F)$ formé des sections f telles que support $f \subset Z$.

Nous voulons généraliser cette définition au cas où Z est une partie localement fermée de X , donc fermée dans une partie ouverte convenable V de X . On posera dans ce cas

(3) $\Gamma_Z(F) = \Gamma_Z(F|V)$.

Il faut vérifier que $\Gamma_Z(F)$ "ne dépend pas" de l'ouvert choisi. Il suffit de montrer que si V' , $V \supset V' \supset Z$ est un ouvert, alors l'application $\rho^V_{V'} : F(V) \longrightarrow F(V')$ applique $\Gamma_Z(F|V)$ isomorphiquement sur $\Gamma_Z(F|V')$. Or

(4) $\Gamma_Z(F|V) = \ker \rho^V_{V-Z}$

donc si $f \in \Gamma_Z(F|V)$ et si $\rho^V_{V'}(f) = \rho^V_{V-Z}(f) = 0$ alors $f = 0$ puisque (V';V -Z) est un recouvrement de V . De même si $f' \in \Gamma_Z(F|V')$, alors $f' \in F(V')$

et $0 \in F(V-Z)$ définit un $f \in F(V)$ tel que $\rho^V_{V'}(f) = f'$, $f \in \Gamma_Z(F|V)$, donc $\rho^V_{V'}$ induit un isomorphisme $\Gamma_Z(F|V) \longrightarrow \Gamma_Z(F|V')$.
Notons que tout ouvert W de Z est induit par un ouvert U de X dans lequel W est fermé. Il en résulte que $W \rightsquigarrow \Gamma_W(F)$ définit un préfaisceau sur Z, et on vérifie que c'est un faisceau que l'on notera $i^!(F)$, où $i: Z \to X$ est l'immersion canonique. On trouve :

(5) $\quad \Gamma_Z(F) = \Gamma(i^!(F))$.

Le faisceau $i^!(F)$ est un sous-faisceau de $i^*(F)$; en effet l'homomorphisme canonique :

$$\Gamma(F|U) = \Gamma(U,F) \longrightarrow \Gamma(U \cap Z, i^*(F))$$

est injectif sur $\Gamma_{U \cap Z}(F|U) \subset \Gamma(F|U)$.

En résumant, on a le résultat suivant :

<u>Proposition</u> 1.1. <u>Il existe un sous-faisceau unique</u> $i^!(F)$ <u>de</u> $i^*(F)$ <u>tel que pour tout ouvert</u> U <u>de</u> X <u>tel que</u> $U \cap Z$ <u>soit fermé dans</u> U,

$$\Gamma(F|U) = \Gamma(U,F) \longrightarrow \Gamma(U \cap Z, i^*(F))$$

<u>induise un isomorphisme</u> $\Gamma_{U\cap Z}(F|U) \longrightarrow \Gamma(U \cap Z, i^!(F))$.

Notons que si Z est ouvert on aura simplement

(6) $\quad i^!(F) = i^*(F) = F|Z \quad , \quad \Gamma_Z(F) = \Gamma(Z,F)$.

Supposons à nouveau Z quelconque. Alors pour un ouvert U de X variable, on voit que

$$U \rightsquigarrow \Gamma_{U\cap Z}(F|U) = \Gamma(U \cap Z, i^!(F))$$

est un faisceau sur X, que nous noterons $\underline{\Gamma}_Z(F)$; de façon précise, d'après la formule précédente (exprimant que $i^!$ commute à la restriction aux ouverts) on a un isomorphisme

(7) $\quad \underline{\Gamma}_Z(F) = i_*(i^!(F))$

par définition, on a, pour tout ouvert U de X ,

(8) $\Gamma(U, \underline{\Gamma}_Z(F)) = \Gamma_{U \cap Z}(F|U)$.

Notons ici une différence caractéristique entre le cas où Z est fermé, et celui où Z est ouvert. Dans le premier cas, la formule (8) nous montre que $\underline{\Gamma}_Z(F)$ peut être considéré comme sous-faisceau de F , et on a donc une <u>immersion canonique</u>

(8') $\underline{\Gamma}_Z(F) \hookrightarrow F$.

Dans le cas où Z est ouvert, au contraire, on voit sur (6) que le deuxième membre de (8) est $\Gamma(U \cap Z, F)$, donc reçoit $\Gamma(U, F)$, donc on a un <u>homomorphisme canonique</u> en sens inverse du précédent :

(8") $F \to \underline{\Gamma}_Z(F)$,

qui n'est autre d'ailleurs que l'homomorphisme canonique

$F \to i_* i^*(F)$,

compte tenu de l'isomorphisme

(6bis) $\underline{\Gamma}_Z(F) \simeq i_* i^* (F)$

déduit de (6) et (7).

Bien entendu, pour F variable, $\Gamma_Z(F)$, $\underline{\Gamma}_Z(F)$, $i^!(F)$ peuvent être considérés comme des foncteurs en F , à valeurs respectivement dans la catégorie des groupes abéliens, des faisceaux abéliens sur X , des faisceaux abéliens sur Z . Il est parfois commode d'interpréter le foncteur

$$i^! : \underline{C}_X \to \underline{C}_Z$$

comme le foncteur adjoint d'un foncteur bien connu

$$i_! : \underline{C}_Z \to \underline{C}_X$$

défini par la proposition suivante :

Proposition 1.2. Soit G un faisceau abélien sur Z . Alors il existe un sous-faisceau unique de $i_*(G)$, soit $i_!(G)$, tel que pour tout ouvert U de X, l'isomorphisme (identique)

$$\Gamma(U \cap Z, G) = \Gamma(U, i_*(G))$$

définisse un isomorphisme

$$\Gamma_{\Phi_{U \cap Z, U}}(U \cap Z, G) = \Gamma(U, i_!(G)),$$

où $\Phi_{U \cap Z, U}$ désigne l'ensemble des parties de $U \cap Z$ qui sont fermées dans U.

La vérification se réduit à noter que le premier membre est un faisceau pour U variable, i.e. que la propriété pour une section de $i_*(G)$ sur U, considérée comme section de G sur $U \cap Z$, d'être à support fermé dans U est de nature locale sur U. Le faisceau $i_!(G)$ qu'on vient de définir est connu aussi sous le nom de : faisceau déduit de G en prolongeant par 0 en dehors de Z, cf. Godement. En particulier, si Z est fermé, on a

(9) $$i_!(G) = i_*(G) \quad ;$$

mais dans le cas général, l'injection canonique $i_!(G) \longrightarrow i_*(G)$ n'est pas un isomorphisme, comme il est bien connu déjà pour Z ouvert. Evidemment, $i_!(G)$ dépend fonctoriellement de G (et c'est même un foncteur exact en G). Ceci dit, on a :

Proposition 1.3. Il existe un isomorphisme de bifoncteurs en G, F (G faisceau abélien sur Z, F faisceau abélien sur X) :

(10) $$\mathrm{Hom}(i_!(G), F) = \mathrm{Hom}(G, i^!(F)) \quad .$$

Pour définir un tel isomorphisme, il revient au même de définir des homomorphismes fonctoriels

$$i_! \, i^!(F) \longrightarrow F \quad , \quad G \longrightarrow i^! i_!(G) \quad ,$$

satisfaisant deux conditions de compatibilité bien connues (cf. par exemple l'exposé de Shih au Séminaire Cartan sur les opérations cohomologiques).

Se rappelant que $i_!$ est exact, donc transforme monomorphismes en monomorphismes, on en conclut :

Corollaire 1.4. Si F est injectif, $i^!(F)$ est injectif, donc $\underline{\Gamma}_Z(F) \longrightarrow i_* i^!(F)$ est également injectif.

Remplaçant X par un ouvert variable U de X, on conclut aussi de 1.3.

Corollaire 1.5. On a un isomorphisme fonctoriel en F, G :

$$\underline{Hom}(i_!(G), F) = i_*(\underline{Hom}(G, i^!(F))) \quad . \tag{11}$$

Prenant pour G le faisceau constant sur Z défini par $\underline{Z}$, soit $\underline{Z}_Z$, 1.3. et 1.5. se spécialisent en

Corollaire 1.6. On a des isomorphismes fonctoriels en F :

$$\begin{aligned} \Gamma_Z(F) &= \mathrm{Hom}(\underline{Z}_{Z,X}, F) \ , \\ \underline{\Gamma}_Z(F) &= \underline{Hom}(\underline{Z}_{Z,X}, F) \ , \end{aligned} \tag{12}$$

où $\underline{Z}_{Z,X} = i_!(\underline{Z}_Z)$ est le faisceau abélien sur X déduit du faisceau constant sur Z défini par $\underline{Z}$, en prolongeant par 0 en dehors de Z.

Remarque 1.7. Supposons que X soit un espace annelé, et munissons Z du faisceau d'anneaux $\underline{O}_Z = i^{-1}(\underline{O}_X)$, enfin désignons par $\underline{C}_X$ et $\underline{C}_Z$ la catégorie des Modules sur X resp. Z. Alors les considérations précédentes s'étendent mot à mot, en prenant pour F un Module sur X et pour G un Module sur Z, et en interprétant en conséquence les énoncés 1.3. à 1.6.
Pour finir ces généralités, examinons ce qui se passe quand on change la partie localement fermée Z. Soit $Z' \subset Z$ une autre partie localement fermée, et soient

$$j : Z' \to Z \ , \ i' : Z' \longrightarrow X \ , \quad i' = i\, j$$

les inclusions canoniques. Alors on a des isomorphismes fonctoriels :

(13) $$(ij)^{!} = j^{!}\, i^{!}, \qquad (ij)_{!} = i_{!}\, j_{!} \; .$$

Le premier isomorphisme (13) définit un isomorphisme fonctoriel

(14) $$\Gamma_{Z'}(F) = \Gamma(Z', (ij)^{!}(F)) \simeq \Gamma(Z', j^{!}(i^{!}(F))) = \Gamma_{Z'}(i^{!}(F)) \; .$$

Supposons maintenant que Z' soit <u>fermé</u> dans Z, et soit

$$Z'' = Z - Z'$$

son complémentaire dans Z, qui est ouvert dans Z donc localement fermé dans X. L'inclusion canonique (8') appliquée à $i^{!}(F)$ sur Z muni de Z' nous définit, grâce à (14), un homomorphisme canonique injectif fonctoriel

(15) $$\Gamma_{Z'}(F) \longrightarrow \Gamma_{Z}(F) \; .$$

Si on remplace dans (14) Z' par Z'' et utilise (8"), on trouve un homomorphisme canonique fonctoriel :

(15') $$\Gamma_{Z}(F) \longrightarrow \Gamma_{Z''}(F) \; .$$

<u>Proposition</u> 1.8. <u>Sous les conditions précédentes, la suite d'homomorphismes fonctoriels</u> :

(16) $$0 \rightarrow \Gamma_{Z'}(F) \longrightarrow \Gamma_{Z}(F) \longrightarrow \Gamma_{Z''}(F)$$

<u>est exacte</u>. <u>Si</u> F <u>est flasque, la suite reste exacte en mettant un zéro à droite</u>.

<u>Démonstration</u>. Remplaçant X par un ouvert V dans lequel Z soit fermé, on est ramené au cas où Z est fermé, donc Z' fermé. Alors Z'' est fermé dans l'ouvert $X-Z'$, et on a une inclusion canonique

$$\Gamma_{Z''}(F) \longrightarrow \Gamma(X-Z', F) \; ,$$

et l'exactitude de (16) signifie simplement que les sections de F à support dans Z' sont celles dont la restriction à $X-Z'$ est nulle.

Lorsque F est flasque, tout élément de $\Gamma_{Z''}(F)$, considéré comme section de F sur X-Z', peut se prolonger en une section de F sur X, et cette dernière aura évidemment son support dans Z, ce qui prouve qu'alors le dernier homomorphisme dans (16) est surjectif.

Corollaire 1.9. On a une suite exacte fonctorielle

(16 bis) $$0 \to \underline{\Gamma}_{Z'}(F) \longrightarrow \underline{\Gamma}_{Z}(F) \longrightarrow \underline{\Gamma}_{Z''}(F) \ ,$$

et si F est flasque, cette suite reste exacte en mettant un 0 à droite.

On peut interpréter (1.8) en termes de résultats sur les foncteurs Hom et Hom via 1.6., de la façon suivante. Notons d'abord que si G est un faisceau abélien sur Z, induisant les faisceaux $j^*(G)$ et $k^*(G)$ sur Z' resp. Z" (où $j : Z' \longrightarrow Z$ et $k : Z'' \longrightarrow Z$ sont les injections canoniques), on a une suite exacte canonique de faisceaux sur X :

(17) $$0 \longrightarrow k^*(G)_X \longrightarrow G_X \longrightarrow j^*(G)_X \longrightarrow 0$$

où pour simplifier les notations, l'indice X désigne le faisceau sur X obtenu en prolongeant par 0 dans le complémentaire de l'espace de définition du faisceau envisagé. La suite exacte (17) généralise une suite exacte bien connue lorsque Z = X (cf. Godement), et s'en déduit d'ailleurs en écrivant la suite exacte en question sur Z, et appliquant le foncteur $i_!$. Prenant $G = \underline{Z}_Z$, on en conclut en particulier :

Proposition 1.10. Sous les conditions précédentes, on a une suite exacte de faisceaux abéliens sur X :

(18) $$0 \longrightarrow \underline{Z}_{Z'',X} \longrightarrow \underline{Z}_{Z,X} \longrightarrow \underline{Z}_{Z',X} \longrightarrow 0 \ .$$

Ceci posé, les deux suites exactes 1.8. et 1.9. ne sont autres que les suites exactes déduites de (18) par application du foncteur Hom(-,F) resp. Hom(-,F).

Cela redonne une démonstration évidente du fait que les suites (16) et (16 bis) restent exactes en mettant un zéro à droite, pourvu que F soit injectif.

2. Les foncteurs $H^*_Z(X,F)$ et $\underline{H}^*_Z(F)$.

Définition 2.1. On dénote par $H^*_Z(X,F)$ et $\underline{H}^*_Z(F)$ les foncteurs dérivés en F des foncteurs $\Gamma_Z(F)$ resp. $\underline{\Gamma}_Z(F)$.

Ce sont des foncteurs cohomologiques, à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens resp. dans la catégorie des faisceaux abéliens sur X . Lorsque Z est fermé, $H^*_Z(X,F)$ n'est autre par définition que $H^*_\Phi(X,F)$ où Φ désigne la famille des parties fermées de X contenues dans Z . Lorsque Z est ouvert, on va voir que $H^*_Z(X,F)$ n'est autre que $H^*(Z,F) = H^*(Z,F|Z)$, grâce à la proposition suivante.

Proposition 2.2. (Théorème d'excision). Soit V une partie ouverte de X contenant Z . Alors on a un isomorphisme de foncteurs cohomologiques en F :

$$H^*_Z(X,F) \longrightarrow H^*_Z(V,F|V) \quad . \tag{19}$$

En effet, on a un isomorphisme fonctoriel $\Gamma^X_Z \simeq \Gamma^V_Z\, j^!$, où $j : V \longrightarrow X$ est l'inclusion et où $j^!$ est donc le foncteur restriction (cf (14)). Ce dernier est exact, et transforme injectifs en injectifs par 1.4., d'où aussitôt l'isomorphisme (19).

Lorsque Z est ouvert, on peut prendre V = Z et on trouve :

Corollaire 2.3. Supposons Z ouvert, alors on a un isomorphisme de foncteurs cohomologiques:

$$H^*_Z(X,F) = H^*(Z,F) \quad . \tag{20}$$

On conclut des isomorphismes 1.6. et des définitions (cf.Tohoku) :

Proposition 2.3. On a des isomorphismes de foncteurs cohomologiques :

(21) $$H^*_Z(X,F) \simeq \mathrm{Ext}^*(X; \underline{Z}_{Z,X}, F) \quad ,$$

(21 bis) $$\underline{H}^*_Z(F) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^*(\underline{Z}_{Z,X}, F) \quad .$$

On peut donc appliquer les résultats de Tohoku sur les Ext de Modules. Signalons d'abord l'interprétation suivante des faisceaux $\underline{H}^*_Z(F)$ en terme des groupes globaux $H^*_Z(X,F)$:

Corollaire 2.4. $\underline{H}^*_Z(F)$ est canoniquement isomorphe au faisceau associé au préfaisceau

$$U \rightsquigarrow H^*_{Z \cap U}(U, F|U) \quad .$$

En particulier, utilisant corollaire 2.3., on trouve :

Corollaire 2.5. Supposons Z ouvert, alors on a un isomorphisme de foncteurs cohomologiques :

(22) $$\underline{H}^*_Z(F) = R^*i_* i^*(F)$$

(où $i: Z \to X$ est l'inclusion).

La suite spectrale des Ext donne l'importante suite spectrale :

Théorème 2.6. On a une suite spectrale fonctorielle en F, aboutissant à $H^*_Z(X,F)$, et de terme initial

(23) $$E_2^{p,q}(F) = H^p(X, \underline{H}^q_Z(F)) \quad .$$

Remarques 2.7. Il résulte aussitôt de 2.4. que les faisceaux $\underline{H}^q_Z(F)$ sont nuls dans $X-\overline{Z}$, et également nuls dans l'intérieur de Z pour $q \neq 0$ (donc pour un tel q, $\underline{H}^q_Z(F)$ est même porté par la frontière $\dot{Z}$ de Z) .
Par suite, le deuxième membre de (23) peut s'interpréter comme un groupe de cohomologie calculé sur $\overline{Z}$. Nous utiliserons surtout 2.6. dans le cas où Z

est fermé dans X , et où le deuxième membre de (23) peut s'interpréter comme un groupe de cohomologie calculé sur Z :

(23) $$E_2^{p,q}(F) = H^p(Z, \underline{H}_Z^q(F)) \quad .$$

Notons aussi que lorsque Z est ouvert, la suite spectrale 2.6. n'est autre que la suite spectrale de Leray pour l'application continue $i : Z \longrightarrow X$, compte tenu de l'interprétation 2.5. dans le calcul du terme initial de la suite spectrale de Leray.

Reprenons la suite exacte (1.10), elle donne naissance à une suite exacte des Ext(cf. Tohoku) :

Théorème 2.8. *Soient* Z *une partie localement fermée de* X, Z' *une partie fermée de* Z et $Z'' = Z - Z'$. *Alors on a une suite exacte fonctorielle en* F:

(24) $$0 \to H^0_{Z'}(X,F) \to H^0_Z(X,F) \to H^0_{Z''}(X,F) \xrightarrow{\partial} H^1_{Z'}(X,F) \to H^1_Z(X,F) \;\ldots.$$
$$\ldots\ldots\; H^i_{Z'}(X,F) \to H^i_Z(X,F) \to H^i_{Z''}(X,F) \xrightarrow{\partial} H^{i+1}_{Z'}(X,F) \quad \ldots\ldots \quad .$$

Rappelons comment on peut obtenir cette suite exacte. Soit $C(F)$ une résolution injective de F, alors la suite exacte (1.10) donne naissance à la suite exacte

(25) $$0 \longrightarrow \Gamma_{Z'}(C(F)) \longrightarrow \Gamma_Z(C(F)) \longrightarrow \Gamma_{Z''}(C(F)) \longrightarrow 0 \quad ,$$

(qui n'est autre que celle définie dans 1.8.). On en conclut une suite exacte de cohomologie, qui n'est autre que (24).

Le cas le plus important pour nous est celui où Z est fermé (et on peut d'ailleurs toujours s'y ramener en remplaçant X par un ouvert V dans lequel Z est fermé). Alors Z' est fermé, Z'' est fermé dans l'ouvert $X-Z'$, et on peut écrire

(26) $$H^i_{Z''}(X,F) = H^i_{Z''}(X-Z'; F \mid X-Z') \quad ,$$

ce qui nous permet d'écrire la suite exacte (24) en termes de cohomologies à support dans un fermé donné. Le cas le plus fréquent est celui où $Z = X$. Posant alors pour simplifier $Z' = A$, on trouve :

Corollaire 2.9. *Soit* A *une partie fermée de* X . *Alors on a une suite exacte fonctorielle en* F :

$$(27) \qquad 0 \to H^0_A(X,F) \to H^0(X,F) \to H^0(X-A,F) \xrightarrow{\partial} H^1_A(X,F) \ \ldots$$

$$\ldots\ H^i_A(X,F) \to H^i(X,F) \to H^i(X-A,F) \xrightarrow{\partial} H^{i+1}_A(X,F) \ \ldots\ .$$

Cette suite exacte montre que le groupe de cohomologie $H^i_A(X,F)$ joue le rôle d'un groupe de cohomologie relative de X mod $X-A$, à coefficients dans F. C'est à ce titre qu'elle s'introduit de façon naturelle dans les applications. En "faisceautisant" (24) et (27), ou en procédant directement, on trouve :

Corollaire 2.10. *Sous les conditions de* 2.8., *on a une suite exacte fonctorielle en* F :

$$(24\text{bis}) \qquad \ldots\ \underline{H}^i_{Z'}(F) \to \underline{H}^i_Z(F) \to \underline{H}^i_{Z''}(F) \xrightarrow{\partial} \underline{H}^{i+1}_{Z'}(F) \ \ldots$$

Corollaire 2.11. *Soit* A *une partie fermée de* X , *alors on a une suite exacte fonctorielle en* F :

$$(28) \qquad 0 \to \underline{H}^0_A(F) \to F \to f_*(F|X-A) \xrightarrow{\partial} \underline{H}^1_A(F) \to 0 \quad ,$$

et des isomorphismes canoniques, pour $i \geqslant 2$:

$$(29) \qquad \underline{H}^i_A(F) = \underline{H}^{i-1}_{X-A}(F) = R^{i-1}f_*(F|X-A) \quad ,$$

où $f : (X-A) \to X$ *est l'inclusion.*

Cela définit donc $\underline{H}^0_A(F)$ et $\underline{H}^1_A(F)$ respectivement comme Ker et Coker de l'homomorphisme canonique

$$F \to f_*\, f^*(F) = f_*(F|X-A) \quad ,$$

et les $\underline{H}^i_A(F)$ $(i \geqslant 2)$ en terme des foncteurs dérivés de f_* .

Corollaire 2.12. Soit F un faisceau abélien sur X. Si F est flasque, alors pour toute partie localement fermée Z de X et tout entier $i \neq 0$, on a $H^i_Z(X,F) = 0$, $\underline{H}^i_Z(F) = 0$. Inversement, si pour toute partie fermée Z de X on a $H^1_Z(X,F) = 0$, alors F est flasque.

Supposons que F est flasque, alors F induit un faisceau flasque sur tout ouvert, donc pour prouver $H^i_Z(X,F) = 0$ pour $i > 0$, on peut supposer Z fermé, et alors l'assertion résulte de la suite exacte 2.9. On en conclut pour tout Z localement fermé, en "faisceautisant" i.e. appliquant 2.4., que $\underline{H}^i_Z(F) = 0$ pour $i > 0$. Inversement, supposons $H^1_Z(X,F) = 0$ pour tout fermé Z, alors la suite exacte 2.9. prouve que pour tout tel Z, $H^0(X,F) \to H^0(X-Z,F)$ est surjectif, ce qui signifie que F est flasque.

Combinant 2.6. et 2.8., on va déduire :

Proposition 2.13. Scient F un faisceau abélien sur X, Z une partie fermée de X, $U = X - Z$, N un entier. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\underline{H}^i_Z(F) = 0$ pour $i \leqslant N$.

(ii) Pour tout ouvert V de X, considérant l'homomorphisme canonique $H^i(V,F) \to H^i(V \cap U,F)$, cet homomorphisme est :

a) bijectif pour $i < N$,

b) injectif pour $i = N$.

(Lorsque $N > 0$, on peut dans (ii) se borner à exiger a)).

Pour prouver (i) $\Longrightarrow$ (ii), on est ramené, grâce à la nature locale des $\underline{H}^i_Z(F)$ à prouver le

Corollaire 2.14. Si la condition 2.13. (i) est vérifiée, alors
$$H^i(X,F) \to H^i(U,F)$$
est bijectif pour $i < N$, injectif pour $i = N$.

En effet, en vertu de la suite exacte (27), cela signifie aussi
$$H^i_Z(X,F) = 0 \quad \text{pour} \quad i \leqslant N,$$

et cette relation est une conséquence immédiate de la suite spectrale 2.6. Réciproquement, l'hypothèse 2.13. (ii) signifie que pour tout ouvert V de X, on a

$$H^i_{Z\cap V}(V,F|V) = 0 \text{ pour } i \leqslant N ,$$

ce qui implique 2.13. (i) grâce à 2.4. Si d'ailleurs $N > 0$, on peut dire aussi que (ii) a) implique (en passant aux faisceaux associés) que $F \to f_*(F|U)$ est un isomorphisme, et que $\underline{H}^i_U(F) = 0$ pour $1 \leqslant i < N$.

Compte tenu de 2.11. cela prouve encore 2.13.(i)...

Remarque. Soit $Y \to X$ une immersion fermée, et supposons que localement elle est de la forme $\{0\} \times Y \subset R^n \times Y$. Supposons que F est un faisceau localement constant sur X, alors on trouve :

$$(30) \qquad \underline{H}^i_Y(F) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n , \\ F \otimes \underline{T}_{Y,X} & \text{si } i = n, \end{cases} \quad \text{où} \quad \underline{T}_{Y,X} \simeq \underline{H}^n_Y(\underline{Z}_X)$$

est un faisceau, extension à X d'un faisceau sur Y localement isomorphe à $\underline{Z}_Y$, appelé "faisceau d'orientation normale de Y dans X".

Utilisant la suite spectrale 2.6. on trouve dans ce cas :

$$(31) \qquad H^i_Y(X,F) \simeq H^{i-n}(Y,F\otimes \underline{T}_{Y,X}) ,$$

et on retrouve l'"homomorphisme de Gysin" :

$$(32) \qquad H^j(Y,F\otimes \underline{T}_{Y,X}) \longrightarrow H^{j+n}(X,F) .$$

BIBLIOGRAPHIE

R. Godement, Théorie des faisceaux, Acf. Scient. et Ind. 1252 (cité : Godement).

A. Grothendieck, sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Math. Journal, Vol.9 p. 119-221, § 1957, (cité : Tohoku).

Exposé II

APPLICATION aux FAISCEAUX QUASI-COHERENTS SUR les PRESCHEMAS

Proposition 1. Soient X un préschéma, Z une partie localement fermée de la forme $Z = U - V$, où U et V sont deux parties ouvertes de X telles que $V \subset U$ et que les immersions canoniques $U \to X$, $V \to X$ soient quasi-compactes. Alors pour tout Module quasi-cohérent F sur X, les faisceaux $\underline{H}^i_Z(F)$ sont quasi-cohérents.

D'après (I, 24) il existe une suite exacte de cohomologie relative

$$\to \underline{H}^{i-1}_U(F) \to \underline{H}^i_V(F) \to \underline{H}^i_Z(F) \to \underline{H}^i_U(F) \to \underline{H}^{i+1}_V(F) \to \quad .$$

D'après (E G A III, 1.4.17), pour que les $\underline{H}^i_Z(F)$ soient quasi-cohérents il suffit donc que les $\underline{H}^i_U(F)$ et les $\underline{H}^i_V(F)$ le soient. On peut donc supposer Z ouvert et l'immersion canonique $j : Z \to X$ quasi-compacte.

Puisque Z est ouvert on a (I, 22) un isomorphisme canonique :

$$\underline{H}^i_Z(F) \simeq R^i j_*(F|Z)$$

mais j est séparé (E G A I 5.5.1) et quasi-compact donc (E G A III 1.4.10) les $R^i j_*(F|Z) = \underline{H}^i_Z(F)$ sont quasi-cohérents, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 2. Soit Z une partie fermée de X telle que l'immersion canonique $X - Z \to X$ soit quasi-compacte, alors les Modules $\underline{H}^i_Z(F)$ sont quasi-cohérents.

Corollaire 3. Si X est localement noethérien, alors pour toute partie localement fermée Z de X, et tout Module F quasi-cohérent sur X, les $\underline{H}^i_Z(F)$ sont quasi-cohérents.

Résulte immédiatement du corollaire 2 et de (E G A I 6.6.4) .

<u>Corollaire</u> **4.** <u>Supposons que</u> X <u>soit le spectre d'un anneau</u> A <u>et soient</u> U <u>un ouvert quasi-compact de</u> X , $Y = X - U$, F <u>un Module quasi-cohérent sur</u> X , <u>il existe un isomorphisme de foncteurs cohomologiques en</u> F :

$$(4.1) \qquad \underline{H}^i_Y(F) = (H^i_Y(X,F))^{\sim} .$$

<u>On a en outre une suite exacte fonctorielle en</u> F :

$$(4.2) \qquad 0 \longrightarrow H^0_Y(X,F) \longrightarrow H^0(X,F) \longrightarrow H^0(U,F) \longrightarrow H^1_Y(X,F) \longrightarrow 0$$

<u>et des isomorphismes fonctoriels en</u> F :

$$(4.3) \qquad H^i_Y(X,F) \simeq H^{i-1}(U,F) \qquad i \geqslant 2 .$$

D'après (1) les $\underline{H}^i_Y(F)$ sont quasi-cohérents, puisque X est affine on a donc $H^p(X,\underline{H}^i_Y(F)) = 0$ si $p > 0$. La suite spectrale (I,23) dégénère, donc

$$H^i_Y(X,F) = \Gamma(\underline{H}^i_Y(F)) .$$

L'égalité (4.1) résulte alors de (E G A I 1.1.3.7), (4.2) et (4.3) de la suite exacte de cohomologie (I(27)) et de ce que $H^i(X,F) = 0$ si $i > 0$, puisque X est affine.

Avec les hypothèses de (4), U est réunion finie d'ouverts affines X_f , on peut donc trouver un idéal I engendré par un nombre fini d'éléments f_α et définissant Y, soit $\underline{f} = (f_\alpha)$. Avec les notations de (E G A III 1) on a :

<u>Proposition</u> 5. <u>Supposons que</u> X <u>soit le spectre d'un anneau</u> A , <u>soient</u> $\underline{f} = (f_\alpha)$ <u>une famille finie d'éléments de</u> A , Y <u>la partie fermée de</u> X <u>qu'ils définissent,</u> M <u>un</u> A-<u>module,</u> F <u>le faisceau associé à</u> M . <u>On a alors des isomorphismes de</u> ∂-<u>foncteurs en</u> M :

$$(5.1) \qquad H^i((\underline{f}),M) \simeq H^i_Y(X,F) .$$

(Nous noterons aussi $H^i_J(M) = H^i_Y(X,F)$, si Y est la partie fermée de $X = \operatorname{Spec} A$ définie par un idéal J de A).

Pour $i = 0$ et $i = 1$, on utilise les suites exactes (4.2) et (E G A III 1.4.3.2); si $i \geqslant 2$, on utilise (4.3) et (E G A III 1.4.3.2). Cela nous donne des isomorphismes fonctoriels en M. On vérifie qu'à un signe près ne dépendant que de i, ils sont compatibles avec l'opérateur bord, d'où l'existence de l'isomorphisme de ∂-foncteurs (5.1).

Soient maintenant X un préschéma, Y une partie fermée de X et $f : Y \longrightarrow X$ l'inclusion, I un idéal quasi-cohérent définissant Y dans X.
Soit F un faisceau sur X.

On a vu qu'il existe des isomorphismes de ∂-foncteur en F

$$(*) \qquad \mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(X; f_* f^{-1}(\underline{O}_X), F) \longrightarrow H^i_Y(X,F)$$

$$(**) \qquad \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\underline{O}_X}(f_* f^{-1}(\underline{O}_X), F) \longrightarrow \underline{H}^i_Y(F) .$$

Soient n,m des entiers tels que $m \geqslant n \geqslant 0$, on désigne par $i_{n,m}$ l'application canonique : $\underline{O}_{Y_m} = \underline{O}_X/I^{m+1} \longrightarrow \underline{O}_X/I^{n+1} = \underline{O}_{Y_n}$, et par j_n l'application : $f_* f^{-1}(\underline{O}_X) \longrightarrow \underline{O}_{Y_n}$. Les $(\underline{O}_{Y_n}, i_{n,m})$ forment un système projectif et les j_n sont compatibles avec les $i_{n,m}$.

En appliquant le foncteur $\mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(X; \cdot, F)$, on en déduit un morphisme

$$\varphi' : \quad \varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(X; \underline{O}_{Y_n}, F) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(X; f_* f^{-1}(\underline{O}_X), F) ;$$

on montre facilement que c'est un morphisme de foncteurs cohomologiques en F. Le morphisme

$$\varphi : \quad \varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(X; \underline{O}_{Y_n}, F) \longrightarrow H^i_Y(X,F) ,$$

composé de φ' et de $(*)$, est donc lui aussi un morphisme de foncteurs cohomologiques en F.

On définit de même

$$\underset{\sim}{\varphi} : \quad \varinjlim_{n} \underline{\mathrm{Ext}}^{i}_{\underline{O}_X}(\underline{O}_{Y_n}, F) \longrightarrow \underline{H}^{i}_{Y}(F) .$$

On a en vue le théorème suivant :

Théorème 6. a) *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Y *une partie fermée de* X *définie par un Idéal cohérent* I , F *un Module quasi-cohérent. Alors* $\underset{\sim}{\varphi}$ *est un isomorphisme.*

b) *Si* X *est noethérien* φ *est un isomorphisme.*

Le Théorème (6) résultera de (6.a) et du

Lemme 7. *Si l'espace topologique sous-jacent à* X *est noethérien et si* $\underset{\sim}{\varphi}$ *est un isomorphisme, il en est de même de* φ .

On va d'abord prouver (7). On sait qu'il existe une suite spectrale

$$\text{(7.1)} \qquad H^p(X, \underline{H}^q_Y(F)) \Longrightarrow H^m_Y(X,F) \quad .$$

On a d'autre part un système inductif de suites spectrales

$$\text{(7.2}_n\text{)} \qquad H^p(X, \underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{O}_X}(\underline{O}_{Y_n}, F)) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^m_{\underline{O}_X}(X; \underline{O}_{Y_n}, F) \ .$$

Il résulte de la définition de φ et de $\underset{\sim}{\varphi}$ que ces morphismes sont associés à un homomorphisme Φ de suites spectrales de la limite inductive de (7.2$_n$) dans (7.1). Si l'espace sous-jacent à X est noethérien, par (God. 4.12.1)(*)

$$\varinjlim_{n} H^p(X, \underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{O}_X}(\underline{O}_{Y_n}, F)) \xrightarrow{\sim} H^p(X, \varinjlim_{n} \underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{O}_X}(\underline{O}_{Y_n}, F)) \quad ,$$

alors Φ_2 peut s'écrire comme un morphisme :

$$H^p(X, \varinjlim_{n} \underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{O}_X}(\underline{O}_{Y_n}, F)) \longrightarrow H^p(X, \underline{H}^q_Y(F))$$

qui n'est autre que celui qu'on déduit de $\underset{\sim}{\varphi}$.

(*) Cf. première référence bibliographique, à la fin de Exp. I .

Si $\underset{\sim}{\varphi}$ est un isomorphisme il en est donc de même de $\bar{\Phi}_2$, donc de φ d'après (E G A 0_{III} 11.1.5), (7) est donc démontré.

On va maintenant prouver (6.a), c'est une question locale sur X . D'après corollaire 4 et (E G A I 1.3.9 et 1.3.12) on peut supposer que X est le spectre d'un anneau A . Il suffit donc de démontrer que sous les hypothèses du théorème (6.a), l'homomorphisme canonique :

(7.3) $$\varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_A(A/I^n,M) \longrightarrow H^i_Y(X,M)$$

est un isomorphisme.

Soient f_α un nombre fini d'éléments de A engendrant I , $\underline{f} = (f_\alpha)$; alors la suite des idéaux $(\underline{f}^n)$ est décroissante et cofinale à la suite des I^n, de sorte que (7.3) est équivalent à un morphisme de ∂- foncteurs en M :

(7.4) $$\varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_A(A/(\underline{f}^n),M) \longrightarrow H^i_Y(X,M) .$$

On a d'autre part des isomorphismes canoniques :

(7.5) $$\varinjlim_n \mathrm{Hom}_A(A/(\underline{f}^n),M) \simeq \varinjlim_n (\, m\in M \mid (\underline{f}^n)m = 0\,) \simeq H^o((\underline{f}),M) .$$

Comme $\varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_A(A/(\underline{f}^n),M)$ est un ∂-foncteur universel en M, il existe un seul morphisme de ∂- foncteurs en M :

(7.6) $$\varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_A(A/(\underline{f}^n),M) \longrightarrow H^i((\underline{f}),M) ,$$

qui coïncide en degré zéro avec (7.5).

Comme le composé de (7.3) et de (5.1) est un morphisme de ∂-foncteurs en M qui coïncide avec (7.6) en degré 0 , il coïncide avec (7.6) en tout degré. Le théorème (6.a) est donc une conséquence immédiate du

<u>Lemme</u> 8. <u>Soient</u> A <u>un anneau noethérien,</u> I <u>un idéal engendré par un système fini</u> $\underline{f} = (f_\alpha)$ <u>d'éléments,</u> M <u>un</u> A-<u>module</u>. <u>Alors les homomorphismes</u> (7.6) <u>sont des isomorphismes</u>.

Lemme 9. Soient A un anneau, $\underline{f} = (f_\alpha)$ un système fini d'éléments de A, I l'idéal engendré par $\underline{f}$, i un entier > 0. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a) L'homomorphisme (7.6) est un isomorphisme pour tout M.

b) $H^i(\underline{f}),M) = 0$ pour M injectif.

c) Le système projectif $(H_i(\underline{f}^n,A)) = H_{i,n}$ est essentiellement nul, c'est-à-dire : pour tout n, il existe $n' > n$ tel que $H_{i,n'} \longrightarrow H_{i,n}$ soit nul.

a) entraîne b) trivialement.

b) entraîne a), en effet b) entraîne que $M \rightsquigarrow H^i((\underline{f}),M)$ est un foncteur cohomologique universel, (7.6) est alors un morphisme de foncteurs cohomologiques universels. C'est un isomorphisme en degré zéro, donc en tout degré

c) entraîne b), en effet si M est injectif, on a pour tout n

$$H^i(\underline{f}^n,M) = \mathrm{Hom}(H_i(f^n,A),M) = \mathrm{Hom}(H_{i,n'},M) \ ,$$

c) entraîne donc que pour tout i le système inductif $(H^i(\underline{f}^n,M))_{n\in \underline{Z}}$ est essentiellement nul, d'où b).

b) entraîne c). Soit en effet $n > 0$, et j un monomorphisme de $H_{i,n}$ dans un module injectif M. Soit $n' \geq n$ et soit $j_{n'} \in \mathrm{Hom}(H_{i,n'}, M)$ le composé de j et de l'homomorphisme de transition $t_{n',n} : H_{i,n'} \longrightarrow H_{i,n}$. Les $j_{n'}$ définissent un élément de $H^i((\underline{f}),M)$ qui est nul par hypothèse. Il existe donc n_o tel que $j_{n'} = 0$ si $n' > n_o$. Mais puisque j est un monomorphisme, $j_{n'} = 0$ entraîne $t_{n'} = 0$, d'où la proposition.

Corollaire 10. Supposons que l'espace sous-jacent à $X = \mathrm{Spec}(A)$ soit noethérien. Pour que les conditions précédentes soient vérifiées pour toute famille finie d'éléments de A et tout $i > 0$ (ou encore : pour $i = 1$), il faut et il suffit que pour tout A-module injectif M, le faisceau F associé à M soit flasque.

C'est nécessaire : soient en effet $\underline{f} = (f_\alpha)$ un système fini d'éléments de A, Y le fermé défini par $\underline{f}$ et $U = X-Y$, on a alors la suite exacte

$$H^o(X,F) \longrightarrow H^o(U,F) \longrightarrow H^1((\underline{f}),M) \longrightarrow 0 \ ,$$

et grâce à (9.b), $H^o(X,F) \longrightarrow H^o(U,F)$ est surjectif.

C'est suffisant en vertu de (5.1) et de ce que pour toute partie fermée Y de X et tout faisceau flasque F sur X , $H^i_Y(X,F) = 0$ pour $i > 0$.

Lemme 11. Sous les hypothèses du lemme (9), pour tout A-module noethérien N et pour tout $i > 0$, le système projectif $(H_{i,n}(N))_{n \in \mathbb{Z}}$, où $H_{i,n}(N) = H_i(\underline{f}^n, N)$, est essentiellement nul.

Preuve par récurrence sur nombre m d'éléments de $\underline{f}$.

Si $m = 1$, $\underline{f}$ est réduit à un seul élément, soit f , $H_{i,n}(N)$ est nul si $i > 1$ et $H_{1,n}(N)$ est canoniquement isomorphe à l'annulateur $N(n)$ de f^n dans N , l'homomorphisme de transition $N(n') \longrightarrow N(n)$, $n' \geq n$, étant la multiplication par $f^{n'-n}$. Les $N(n)$ forment une suite croissante de sous-modules de N, et puisque N est noethérien il existe n_o tel que $N(n) = N(n_o)$ si $n \geq n_o$. Donc tous les $N(n)$ sont annulés par f^{n_o} et les homomorphismes de transition $N(n') \rightarrow N(n)$ sont tous nuls si $n' \geq n + n_o$. Le lemme est donc prouvé pour $m = 1$.

On suppose maintenant que $m > 1$ et que le lemme est prouvé pour les entiers $m' < m$; soit alors $\underline{g} = (f_1, \ldots, f_{m-1})$ et $\underline{h} = f_m$.

Pour tout $n > 0$, on a (E G A III 1.1.4.1) une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H_o(\underline{h}^n, H_i(\underline{g}^n, N)) \longrightarrow H_i(\underline{f}^n, N) \longrightarrow H_1(\underline{h}^n, H_{i-1}(\underline{g}^n, N)) \longrightarrow 0 \quad ,$$

et pour n variable un système projectif de suites exactes. Il résulte des hypothèses de récurrence que pour $i > 0$ les $H_i(\underline{g}^n, N)$ forment un système projectif essentiellement nul, donc aussi les $H_o(\underline{h}^n, H_i(\underline{g}^n, N)$ qu'on identifie à des quotients de $H_i(\underline{g}^n, N)$. Pour les termes de droite on va factoriser les morphismes de transition de n' à n par :

$$H_1(\underline{h}^{n'}, H_{i-1}(\underline{g}^{n'}, N)) \longrightarrow H_1(h^{n'}, H_{i-1}(\underline{g}^n, N)) \longrightarrow H_1(\underline{h}^n, H_{i-1}(\underline{g}^n, N)) \ .$$

Puisque $H_{i-1}(\underline{g}^n, N)$ est un module noethérien il résulte du cas $m = 1$ qu'il existe, pour n donné, $n' > n$ tel que la seconde flèche soit nulle.

On voit donc que dans ce système projectif de suites exactes, les systèmes projectifs extrêmes sont essentiellement nuls, il en est donc de même du système projectif médian.

On a donc prouvé le lemme (11) donc le lemme (8) et partant le théorème (6).

Remarque. On peut aussi obtenir le théorème (6) en démontrant la condition du Corollaire (10) à l'aide des théorèmes de structure des modules injectifs sur un anneau noethérien (Matlis, Gabriel).

Exposé III

INVARIANTS COHOMOLOGIQUES et PROFONDEUR

1. Rappels.

Nous énoncerons quelques définitions et résultats que le lecteur trouvera par exemple dans le chapitre I du cours professé par J.P. SERRE au Collège de France en 1957-58.(*)

Définition 1.1. Soit A un anneau, (commutatif à élément unité comme dans tout ce qui suivra) et soit M un A-module (unitaire comme dans tout ce qui suivra), on appelle :

. annulateur de M et on note AnnM l'ensemble des $a \in A$ tels que pour tout $m \in M$ on ait $am = 0$.

. support de M et on note SuppM l'ensemble des idéaux premiers $\underline{p}$ de A tels que le localisé $M_{\underline{p}}$ soit non nul.

. "assassin de M" ou "ensemble des idéaux premiers associés à M" et on note AssM l'ensemble des idéaux premiers $\underline{p}$ de A tels qu'il existe un élément non nul de M dont l'annulateur soit $\underline{p}$.

Si $\underline{a}$ est un idéal de A , nous noterons $\underline{r}(\underline{a})$ la racine de $\underline{a}$ dans A, i.e. l'ensemble des éléments de A dont une puissance est dans $\underline{a}$.

Les résultats suivants sont valables si l'on suppose que A est noethérien et M de type fini.

Proposition 1.1.

(i) AssM est un ensemble fini.

(ii) Pour qu'un élément de A annule un élément non nul de M , il faut et

(*) Cf. Algèbre locale et multiplicités. Lecture Notes in Mathematics n° , Springer.

il suffit qu'il appartienne à l'un des idéaux associés à M .

(iii) La racine de l'annulateur de M, $\underline{r}(\mathrm{Ann}M)$, est l'intersection des idéaux associés à M qui sont minimaux (pour la relation d'inclusion dans AssM).

Proposition 1.2. Soit $\underline{p}$ un idéal premier de A, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\underline{p} \in \mathrm{Supp}M$.

(ii) Il existe $\underline{q} \in \mathrm{Ass}M$ tel que $\underline{q} \subset \underline{p}$.

(iii) $\underline{p} \supset \mathrm{Ann}M$.

(iii bis) $\underline{p} \supset \underline{r}(\mathrm{Ann}M)$.

Proposition 1.3. Soit N un A-module de type fini, on a la formule :

$$\mathrm{Ass}\,\mathrm{Hom}_A(N,M) = \mathrm{Supp}N \cap \mathrm{Ass}M .$$

2. Profondeur.

Dans tout ce paragraphe, A désigne un anneau commutatif, I un idéal de A, M et N deux A-modules. On notera X le spectre premier de A (on ne se servira pas de son faisceau structural dans ce paragraphe) et Y la variété de I , $Y = \mathrm{Supp}(A/I) = \{\underline{p} \in X, \underline{p} \supset I\}$.

Lemme 2.1. Supposons que A soit noethérien et que les modules M et N soient de type fini. Supposons de plus que SuppN = Y . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Hom}_A(N,M) = 0$.

(ii) $\mathrm{Supp}N \cap \mathrm{Ass}M = \emptyset$.

(iii) L'idéal I n'est pas diviseur de 0 dans M , ce qui signifie que pour tout $m \in M$, $Im = 0$ entraîne $m = 0$.

(iv) Il existe dans I un élément M-régulier. (Un élément a de A est dit M-régulier si l'homothétie de rapport a dans M est injective).

(v) Pour tout $\underline{p} \in Y$, l'idéal maximal $\underline{m}_{\underline{p}}$ de l'anneau local $A_{\underline{p}}$ n'est pas associé à $M_{\underline{p}}$. En formule : $\underline{p}A_{\underline{p}} \notin \mathrm{Ass}M_{\underline{p}}$.

Démonstration

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) car $\mathrm{AssHom}_A(N,M) = \emptyset$ est équivalent à (ii) d'après la Prop. 1.3., et à (i) par une conséquence facile de la Prop. 1.2.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) par l'absurde : "il existe $\underline{p} \in \mathrm{Supp}N \cap \mathrm{Ass}M$" entraîne que $\underline{p} \supset I$ et qu'il existe $m \in M$ dont l'annulateur est $\underline{p}$, donc $Im \subset \underline{p}m = 0$, ce qui contredit (iii).

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) trivialement.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iv) car $\mathrm{Supp}N = Y$, donc (ii) signifie que I n'est contenu dans aucun idéal associé à M ou encore, (car les idéaux associés à M sont premiers et en nombre fini), que I n'est pas contenu dans la réunion des idéaux associés à M . Or, par la Prop. 1.1.(ii), cet ensemble est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas M-réguliers.

(i) $\Longrightarrow$ (v) ; en effet, si $\mathrm{Hom}_A(N,M) = 0$ et si $\underline{p} \in Y$, on en déduit, en vertu de la formule

$$(\mathrm{Hom}_A(N,M))_{\underline{p}} = \mathrm{Hom}_{A_{\underline{p}}}(N_{\underline{p}},M_{\underline{p}}) ,$$

que $\mathrm{Hom}_{A_{\underline{p}}}(N_{\underline{p}},M_{\underline{p}}) = 0$, donc, grâce à la proposition 1.3.,

$$\mathrm{Supp}N_{\underline{p}} \cap \mathrm{Ass}M_{\underline{p}} = \emptyset ,$$

or $\underline{p}A_{\underline{p}} \in \mathrm{Supp}N_{\underline{p}}$, donc $\underline{p}A_{\underline{p}} \notin \mathrm{Ass}M_{\underline{p}}$.

(v) $\Longrightarrow$ (i); en effet, si $\underline{p} \in \mathrm{Ass}M$, il existe $m \in M$ dont l'annulateur est $\underline{p}$, donc l'image canonique de m dans $M_{\underline{p}}$ est non nulle, donc son annulateur est un idéal qui contient $\underline{p}$, donc $\underline{p}A_{\underline{p}}$, donc lui est égal. L'idéal $\underline{p}A_{\underline{p}}$ est donc associé à $M_{\underline{p}}$, donc $\underline{p} \notin Y$ d'après (v), d'où (i) .

C.Q.F.D.

Nous allons travailler sur ces conditions en remplaçant le foncteur Hom par ses dérivés.

Théorème 2.2. Soit A un anneau commutatif, I un idéal de A, M un A-module. Soit n un entier.

a) S'il existe une suite $f_1,\dots,f_{n+1}$, d'éléments de I qui forme une suite M-régulière (i.e. si f_1 est M-régulier et si f_{i+1} est régulier dans $M/(f_1\dots f_i)M$ pour $i \leqslant n$), pour tout A-module N annulé par une puissance de I, on a :

$$\mathrm{Ext}^i_A(N,M) = 0 \quad \text{pour} \quad i \leqslant n .$$

b) Si de plus A est noethérien, si M est de type fini, et si il existe un A-module N de type fini tel que SuppN = V(I) et tel que $\mathrm{Ext}^i_A(N,M) =$ pour $i \leqslant n$, alors il existe une suite $f_1,\dots,f_{n+1}$, d'éléments de I qui est M-régulière.

Démontrons d'abord a), par récurrence. Si $n < 0$ l'énoncé est vide.

Si $n \geqslant 0$, supposons que a) soit démontré pour $n' < n$. Par hypothèse il existe $f_1 \in I$ qui est M-régulier. Désignons par f^i_1 la multiplication par f_1 dans $\mathrm{Ext}^i_A(N,M)$, et par f^M_1 la multiplication par f_1 dans M. La suite

$$(2.1) \qquad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{f^M_1} M \longrightarrow M/f_1M \longrightarrow 0$$

est exacte, donc aussi la suite :

$$\mathrm{Ext}^{i-1}_A(N,M/f_1M) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^i_A(N,M) \xrightarrow{f^i_1} \mathrm{Ext}^i_A(N,M) .$$

Par hypothèse $I^rN = 0$, donc f^o_1 est nilpotent; Ext^i étant un foncteur universel, il en est de même de f^i_1 pour tout i. Par ailleurs, il existe une suite régulière dans M/f_1M qui a n éléments, donc, par l'hypothèse de récurrence,

$$\mathrm{Ext}^{i-1}_A(N,M) = 0 \quad \text{si} \quad i \leqslant n-1 .$$

On en déduit que si $i \leqslant n$, f^i_1 est à la fois nilpotent et injectif donc $\mathrm{Ext}^i_A(N,M) = 0$.

Démontrons b), également par récurrence. Si $n < 0$, l'énoncé est vide. Si $n = 0$, b) résulte de l'assertion (i) $\Rightarrow$ (iv) de (2.1).
Si $n > 0$, d'après b) pour $n = 0$, il existe un élément $f_1 \in I$ qui est M-régulier; de la suite exacte (2.1), on déduit la suite exacte :

$$(2.2) \qquad \mathrm{Ext}_A^{i-1}(N,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^{i-1}(N,M/f_1M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^{i}(N,M) .$$

On en conclut que les hypothèses de b) sont vérifiées pour le module M/f_1M et pour l'entier $n-1$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe une suite de n éléments de I qui est régulière pour M/f_1M, ce qui entraîne qu'il existe une suite de $n+1$ éléments de I, commençant par f_1, et qui est M-régulière.

Ce théorème nous invite à généraliser de la manière suivante la définition classique de la profondeur d'un module de type fini sur un Anneau noethérien :

Définition 2.3. Soit A un anneau commutatif à élément unité, soit M un A-module, soit I un idéal de A. On appelle I-profondeur de M, et on note $\mathrm{prof}_I M$, la borne supérieure de l'ensemble des entiers naturels n, qui sont tels que pour tout A-module de type fini N annulé par une puissance de I, on ait

$$\mathrm{Ext}_A^i(N,M) = 0 \qquad \text{pour tout } i < n .$$

On déduit du théorème précédent que si n est la borne supérieure des longueurs des suites M-régulières d'éléments de I, on a $n \leqslant \mathrm{Prof}_I M$.

Plus précisément :

Proposition 2.4. Soit A un anneau commutatif, I un idéal de A et soit M un A-module, soit enfin $n \in \underline{\mathbb{N}}$. Considérons les assertions :

(1) $n \leqslant \mathrm{prof}_I M$.

(2) Pour tout A-module de type fini N qui est annulé par une puissance de I, on a :

$$\mathrm{Ext}_A^i(N,M) = 0 \qquad \text{pour } i < n .$$

(3) Il existe un A-module de type fini N tel que $\operatorname{Supp} N = V(I)$ et tel que $\operatorname{Ext}_A^i(N,M) = 0$ si $i < n$.

(4) Il existe une suite M-régulière de longueur n formée d'éléments de I.

On a les implications logiques suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} (1) & \Longleftrightarrow & (2) & \Longleftarrow & (4) \\ & & \Downarrow & & \\ & & (3) & & \end{array}$$

De plus, si A est noethérien et M de type fini, ces conditions sont équivalentes.

Démonstration : $(1) \Longleftrightarrow (2)$ par définition et $(2) \Longrightarrow (3)$ en prenant $N = A/I$. De plus $(4) \Longrightarrow (2)$ par (2.2 a). Enfin, si A est noethérien et M de type fini, $(3) \Longrightarrow (4)$ par (2.2 b).

Nous supposons A noethérien et M de type fini jusqu'à la fin de ce paragraphe.

Corollaire 2.5. Soit $f \in I$ un élément M-régulier, on a :

$$\operatorname{prof}_I M = \operatorname{prof}_I M/fM + 1 \quad .$$

En effet, si $n \leq \operatorname{prof}_I M/fM$, il existe une suite d'éléments de I, $f_1,\ldots,f_n$, qui est (M/fM)-régulière ; donc la suite $f,f_1,\ldots,f_n$ est M-régulière, donc $n+1 \leq \operatorname{prof}_I M$, donc $\operatorname{prof}_I M \geqslant \operatorname{prof}_I M/fM + 1$. Par ailleurs, d'après la suite exacte (2.2), si $i < \operatorname{prof}_I M$, on a $\operatorname{Ext}_A^{i-1}(N,M/fM) = 0$, donc $\operatorname{prof}_I M - 1 \leqslant \operatorname{prof}_I M/fM$.

Corollaire 2.6. Toute suite M-régulière finie, formée d'éléments de I, peut être prolongée en une suite M-régulière maximale, dont la longueur est nécessairement égale à la I-profondeur de M.

Remarque 2.7. On ne se retient qu'à grand peine de dire qu'un A-module est d'autant plus beau que sa profondeur est plus grande. Un module dont le support ne rencontre pas V(I) est des plus beaux ; en effet, on peut démontrer que pour que $\mathrm{prof}_I M$ soit fini, il est nécessaire et suffisant que $\mathrm{Supp}\, M \cap V(I) \neq \emptyset$.

Remarque 2.8. Si A est un anneau semi-local, soit $\underline{r}(A)$ son radical et $k = A/\underline{r}(A)$ son anneau résiduel. La notion de profondeur intéressante est obtenue en prenant pour I le radical de A. Nous conviendrons donc de noter simplement prof M la $\underline{r}(A)$-profondeur d'un A-module M. On retrouve dans ce cas la notion de "codimension homologique", (cf. SERRE, op.cit.), que l'on notait $\mathrm{codh}_A M$, et qui est définie comme la borne inférieure des entiers i tels que $\mathrm{Ext}^i_A(k,M) \neq 0$; en effet $\mathrm{Supp}\, k = V(\underline{r}(A))$.

Proposition 2.9. Si A est noethérien et M de type fini, on a :

$$\mathrm{prof}_I M = \inf_{\underline{p} \in V(I)} \mathrm{prof}\, M_{\underline{p}} .$$

Corollaire 2.10. Si A est un anneau semi-local noethérien, et si M est un A-module de type fini, on a :

$$\mathrm{prof}\, M = \inf_{\underline{m}} \mathrm{prof}\, M_{\underline{m}} ,$$

où $\underline{m}$ parcourt l'ensemble des idéaux maximaux de A.

Le corollaire résulte immédiatement de la proposition 2.9 ; en effet les idéaux premiers qui contiennent le radical sont les idéaux maximaux.

Par ailleurs, soit $f \in I$; si f est M-régulier, si $\underline{p} \in X$ et si $\underline{p} \supset I$, l'image g de f dans $A_{\underline{p}}$ appartient à $\underline{m}_{\underline{p}}$, idéal maximal de $A_{\underline{p}}$; de plus g est $M_{\underline{p}}$-régulier, comme il résulte de la suite exacte

$$(2.3) \qquad 0 \longrightarrow M_{\underline{p}} \xrightarrow{g'} M_{\underline{p}} \longrightarrow (M/fM)_{\underline{p}} \longrightarrow 0 ,$$

où g' désigne l'homothétie de rapport g dans $M_{\underline{p}}$. Cette suite exacte donne aussi que $(M/fM)_{\underline{p}}$ est isomorphe à $M_{\underline{p}}/gM_{\underline{p}}$; en appliquant le corollaire 2.5. à M et à $M_{\underline{p}}$, on en déduit, par récurrence, que

$\operatorname{prof}_I M \leqslant v(M)$, où l'on a posé pour tout M :

$$v(M) = \inf_{\underline{p} \in V(I)} \operatorname{prof} M_{\underline{p}} \quad .$$

Plus précisément, toujours par récurrence, on sait, si f est M-régulier, que $v(M) = v(M/fM) + 1$; il reste donc à démontrer que si $v(M) \geqslant 1$, il existe un élément M-régulier dans I. Or, en appliquant (2.1) à $M_{\underline{p}}$, $A_{\underline{p}}$ et $\underline{m}_{\underline{p}}$ pour tout $\underline{p} \in V(I)$, on voit que $\underline{m}_{\underline{p}} \notin \operatorname{Ass} M_{\underline{p}}$, donc, en appliquant (2.1) à A, M et I, on a la conclusion.

Proposition 2.11. *Soit $u : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux noethériens. Soit I un idéal de A, M un A-module de type fini. Posons $I_B = I \otimes_A B$ et $M_B = M \otimes_A B$. Si B est A-plat, on a :*

$$\operatorname{prof}_{I_B} M_B \geqslant \operatorname{prof}_I M \quad ;$$

de plus si B est fidèlement plat sur A, on a égalité.

En effet, soit $N = A/I$; par platitude on a : $N \otimes_A B = B/I_B$, posons $N_B = N \otimes_A B$. Toujours par platitude et hypothèses noethériennes, on a :

$$\operatorname{Ext}^i_B(N_B, M_B) = \operatorname{Ext}^i_A(N, M) \otimes_A B \quad ,$$

donc $\operatorname{Ext}^i_A(N, M) = 0$ entraîne $\operatorname{Ext}^i_B(N_B, M_B) = 0$, et la réciproque est vraie si B est fidèlement plat sur A.

3. Profondeur et propriétés topologiques.

Lemme 3.1. *Soit X un espace topologique, Y un sous-espace fermé, soit F un faisceau de groupes abéliens sur X. Posons $U = X - Y$. Si n est un entier, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\underline{H}_Y^i(X,F) = 0$ <u>si</u> $i < n$.

(ii) <u>Pour tout ouvert</u> V <u>de</u> X , <u>l'homomorphisme de groupes</u>

$$H^i(V,F) \longrightarrow H^i(V \cap U,F)$$

<u>est bijectif si</u> $i < n-1$ <u>et injectif si</u> $i = n-1$.

(iii) <u>Pour tout ouvert</u> V <u>de</u> X ,

$$H^i_{Y \cap V}(V,F|V) = 0 \quad \underline{\text{si}} \quad i < n \ .$$

<u>Démonstration</u>.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii); en effet, soit V un ouvert de X , posons $X' = V$, $Y' = Y \cap V$, $F' = F|V, U' = X'-Y'$; Y' est fermé dans X' on a donc une suite exacte :

$$H^i_{Y'}(X',F') \longrightarrow H^i(X',F') \xrightarrow{\rho_i} H^i(U',F') \longrightarrow H^{i+1}_{Y'}(X',F') \quad .$$

Si les termes extrêmes sont nuls, l'homomorphisme ρ_i est bijectif, et si le terme de gauche est nul, ρ_i est injectif. Donc (iii) $\Longrightarrow$ (ii) . Réciproquement, si $i < n$, $H^i_{Y'}(X',F')$ est nul car ρ_i est injectif et ρ_{i-1} surjectif.

(i) $\Rightarrow$ (iii); en effet la suite spectrale "de passage du local au global" donne :

$$H^p(X,\underline{H}^q_Y(X,F)) \Longrightarrow H^*_Y(X,F) \quad .$$

Or, par hypothèse $\underline{H}^q_Y(X,F) = 0$ si $q < n$, donc $(H_Y(X,F))^{p+q} = 0$ si $p+q < n$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i); en effet (iii) exprime que le préfaisceau

$$V \rightsquigarrow H^i_{Y \cap V}(V,F \mid V)$$

est nul, donc aussi le faisceau associé qui est $\underline{H}^i_Y(X,F)$, car Y est fermé.

Remarque 3.2. Si $n \geqslant 2$, on peut omettre la condition que ρ_{n-1} soit injectif, car le faisceau associé au préfaisceau

$$V \rightsquigarrow H^{n-2}(V \cap U, F)$$

est isomorphe à $\underline{H}_Y^{n-1}(X,F)$, mais par l'hypothèse (ii) pour $i = n-2$, ce préfaisceau est isomorphe au préfaisceau $V \rightsquigarrow H^i(V,F)$ dont le faisceau associé est nul.

Proposition 3.3. Soit X un préschéma localement noethérien, Y un sous-préschéma fermé de X, F un $\underline{O}_X$-Module cohérent. Les conditions de 3.1 sont équivalentes à chacune des conditions suivantes :

(iv) Pour tout $y \in Y$, on a $\operatorname{prof} F_x \geqslant n$;

(v) Pour tout $\underline{O}_X$-Module cohérent G sur X , de support contenu dans Y on a

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\underline{O}_X}(G,F) = 0 \text{ si } i < n \ ;$$

(vi) Il existe un $\underline{O}_X$-Module cohérent G dont le support est égal à Y et tel que

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\underline{O}_X}(G,F) = 0 \text{ si } i < n \ .$$

Si X est affine, on a fait tout ce qu'il faut pour démontrer l'équivalence des trois conditions de la proposition 3.3 , or elles sont locales, donc il suffit de prouver (i) $\Longrightarrow$ (vi) et (v) $\Longrightarrow$ (i) .

Soit $\underline{J}$ l'idéal de Y, c'est un faisceau cohérent d'idéaux ; soit $\underline{O}_{X_m} = \underline{O}_X/\underline{J}^{m+1}$, c'est un $\underline{O}_X$-module cohérent dont le support est égal à Y , et on sait que

$$\underline{H}^i_Y(X,F) = \varinjlim_m \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\underline{O}_X}(\underline{O}_{X_m},F) \qquad ,$$

donc (v)$\Longrightarrow$(i). Par ailleurs, les morphismes de transition sont des épimorphismes dans le système projectif des $\underline{O}_{X_m}$.

Si le foncteur $\underline{\mathrm{Ext}}^i$ est exact à gauche en son premier argument, du moins lorsque celui-ci est dans la catégorie des $\underline{O}_X$-Modules cohérents de support contenu dans Y, les morphismes de transition du système inductif obtenu en appliquant $\underline{\mathrm{Ext}}^i$ aux $\underline{O}_{X_m}$ seront injectifs, or (i) entraîne que la limite est nulle, donc (i) entraînera que les Modules $\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\underline{O}_X}(\underline{O}_{X_m},F)$ sont nuls pour tout m. Raisonnons par récurrence. L'énoncé est trivial pour $n < 0$. Supposons que (i)$\Longrightarrow$(vi) pour $n < q$, alors (i)$\Longrightarrow$(v), donc, par la suite exacte des $\underline{\mathrm{Ext}}$, $\underline{\mathrm{Ext}}^q$ est exact à gauche en son premier argument, donc les Modules $\underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{O}_X}(\underline{O}_{X_m},F)$ sont nuls pour tout m. Donc (i)$\Longrightarrow$(vi) pour $n \leqslant q$.

C.Q.F.D.

Exemple 3.4. Soit A un anneau local noethérien, $\underline{m}$ son idéal maximal, M un A-module de type fini, soit enfin n un entier. Posons $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \{\underline{m}\}$, $U = X-Y$. Soit F le faisceau associé à M. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) prof $M \geqslant n$;

2) l'homomorphisme naturel

$$H^i(X,F) \longrightarrow H^i(U,F) \text{ injectif si } i = n-1 \ ;$$

est bijectif si $i < n-1$,

3) $\mathrm{Ext}^i_A(k,M) = 0$ si $i < n$, où $k = A/\underline{m}$;

4) $H^i_Y(X,F) = 0$ si $i < n$.

Corollaire 3.5. Soit X un préschéma localement noethérien, Y un sous-préschéma fermé de X, F un $\underline{O}_X$-Module cohérent ; les conditions suivantes sont équivalentes :

1) pour tout $x \in Y$, prof $F_x \geqslant 2$;

2) pour tout ouvert V de X, l'homomorphisme naturel

$$H^{o}(V,F) \longrightarrow H^{o}(V \cap (X-Y),F)$$

est bijectif .

Théorème 3.6. (HARTSHORNE). Soit X un préschéma localement noethérien, Y un sous-préschéma fermé de X. Supposons que, pour tout $x \in Y$, prof $\underline{O}_{X,x} \geqslant 2$; alors l'application naturelle

$$\pi_o(X) \longrightarrow \pi_o(X-Y)$$

est bijective.

Démonstration. Puisque X est localement noethérien, X est localement connexe; il suffit donc de prouver que pour que X soit connexe il est nécessaire et suffisant que X-Y le soit. Or, pour qu'un espace annelé en anneaux locaux $(X,\underline{O}_X)$ soit connexe, il est nécessaire et suffisant que $H^{o}(X,\underline{O}_X)$ ne soit pas composé direct de deux anneaux non nuls. Mais l'hypothèse implique, d'après le corollaire 3.5. appliqué à $F = \underline{O}_X$, que l'homomorphisme

$$H^{o}(X,\underline{O}_X) \longrightarrow H^{o}(X-Y,\underline{O}_X)$$

est un isomorphisme, d'où la conclusion.

Corollaire 3.7. Soit X un préschéma localement noethérien. Soit d un entier tel que dim $\underline{O}_{X,x} \geqslant d$ entraîne prof $\underline{O}_{X,x} \geqslant 2$. Alors, si X est connexe, X est connexe en codimension d-1, i.e. si X' et X" sont deux composantes irréductibles de X, il existe une suite de composantes irréductibles :

$$X' = X_o, X_1, \ldots\ldots, X_n = X'' ,$$

telle que pour tout $i, 1 \leqslant i \leqslant n$, la codimension de $X_{i-1} \cap X_i$ dans X soit inférieure ou égale à d-1 .

Remarquons d'abord que si X est de COHEN-MACAULAY, $d = 2$ jouira de la propriété évoquée plus haut. A ce propos, rappelons que l'on définit la codimension de Y dans X comme la borne inférieure des dimensions des anneaux locaux dans X des points de Y .

Démonstration. Soit $\underline{F}$ l'ensemble des parties fermées de X dont la codimension dans X est supérieure ou égale à d . On notera que F est un antifiltre de parties fermées de X . Par ailleurs, pour qu'un fermé Y de X soit élément de $\underline{F}$, il faut et il suffit que, pour tout $y \in Y$ il existe un voisinage ouvert V de X tel que $Y \cap V$ soit de codimension $\geqslant d$ dans V . Enfin, si X est connexe et si $Y \in \underline{F}$, X-Y est connexe d'après le théorème de HARTSHORNE. Le corollaire résulte donc du lemme suivant, qui est de nature purement topologique.

Lemme 3.8. Soit X un espace topologique connexe et localement noethérien, et soit $\underline{F}$ un antifiltre de parties fermées de X . On suppose que tout fermé $Y \in X$ qui appartient localement à $\underline{F}$, (i.e. pour tout point $x \in X$ il existe un voisinage ouvert V de x dans X et un $Y' \in \underline{F}$ tel que $V \cap Y = V \cap Y'$), appartient à $\underline{F}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout $Y \in \underline{F}$, X-Y est connexe;

(ii) si X' et X" sont deux composantes irréductibles distinctes de X , il existe une suite de composantes irréductibles de X , $X_o, X_1, \ldots, X_n$, telle que : $X' = X_o$, $X'' = X_n$ et pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $X_{i-1} \cap X_i \notin \underline{F}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $Y \in \underline{F}$, il faut prouver que l'ouvert $U = X-Y$ est connexe. Or, si U' et U" sont deux composantes irréductibles de U , il existe deux composantes irréductibles X' et X" de X telles que $X'' \cap U = U''$ et $X' \cap U = U'$; soit $X_o, \ldots, X_n$ une suite de composantes irréductibles de X possédant la propriété évoquée plus haut; si l'on pose $U_i = X_i \cap U, 0 \leqslant i \leqslant n$, les U_i seront des composantes irréductibles de U , de plus $U_i \cap U_{i+1}$ est non vide si $0 \leqslant i \leqslant n$, car sinon, $X_i \cap X_{i+1} \subset Y$ serait $\in \underline{F}$, ce qui est contraire au choix de la suite des X_i. Ceci entraîne que U est connexe.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $Y = \bigcup\limits_{X',X''} X' \cap X''$, où l'on impose que X' et X'' soient deux composantes irréductibles distinctes de X telles que $X' \cap X'' \in \underline{F}$. La famille des $X' \cap X''$ est localement finie car X est localement noethérien, de plus les $X' \cap X''$ sont fermés, donc Y est fermé. Par ailleurs, Y appartient localement à $\underline{F}$, donc $Y \in \underline{F}$. Donc $U = X - Y$ est connexe. Soient X' et X'' deux composantes irréductibles distinctes de X, soient U' et U'' leurs traces sur U, qui sont non vides par construction de Y. Ce sont des composantes irréductibles de U, or U est connexe, donc U étant localement noethérien, il existe une suite de composantes irréductibles $U_o,\ldots,U_n$ de U, telle que $U_o = U'$, $U_n = U''$ et $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ et $\neq U_i$, $0 \leq i < n$. Soit $X_o,\ldots,X_n$ la suite de composantes irréductibles de X qui est telle que $X_i \cap U = U_i$; si $X_i \cap X_{i+1} \in \underline{F}$, par construction de $\underline{F}$, $U_i \cap U_{i+1} = \emptyset$ ou $U_i = U_{i+1}$, ce qui n'est pas possible d'après le choix des U_i.

C.Q.F.D.

Corollaire 3.9. Soit A un anneau local noethérien. On suppose que pour tout idéal premier $\underline{p}$ de A, on a :

$$(\dim A_{\underline{p}} \geqslant 2) \Longrightarrow (\operatorname{prof} A_{\underline{p}} \geqslant 2) .$$

On suppose de plus que A satisfait la condition des chaines (*). Alors, pour tout $\underline{p}$, idéal premier minimal de A, $\dim A/\underline{p} = \dim A$, ou encore, toutes les composantes irréductibles de Spec A ont même dimension : celle de A.

Si X' et X'' sont deux composantes irréductibles de X, on les joint par une chaîne ayant les propriétés énumérées dans 3.7 ; il suffit alors de démontrer que deux composantes successives ont même dimension, ce qui résulte de la deuxième hypothèse.

(*) Cf. EGA 0_{IV} 14.3.2.

Exemple 3.10. Soit X la réunion de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de dimensions respectives 2 et 3 dans l'espace affine de dimension 5; plus précisément, soit $X = \mathrm{Spec}\, A$, avec $A = B/\underline{p} \cap \underline{q}$, où $B = k[X_1,\ldots,X_5]$, $\underline{p}$ est l'idéal engendré par X_1,X_2,X_3 et $\underline{q}$ l'idéal engendré par X_4 et X_5; X peut être disconnecté par le point d'intersection x des deux sous-espaces vectoriels, donc la profondeur de $\underline{O}_{X,x}$ est égale à 1, car elle ne peut être $\geqslant 2$ en vertu du théorème 3.6. Autre raison : la conclusion d'équidimensionnalité du corollaire précédent est en défaut .

Plus généralement, prenant une réunion X de deux espaces vectoriels de dimension $p,q \geqslant 2$ dans un espace vectoriel de dimension $p+q$, pour aucun plongement de X dans un schéma régulier, X n'est même ensemblistement une intersection complète à l'origine, car (quitte à le modifier sans changer l'espace topologique sous-jacent au voisinage de l'origine), X serait Cohen-Macaulay donc de profondeur $\geqslant 2$ à l'origine, ce qui n'est pas le cas.

Remarque 3.11. Soit X un préschéma localement noethérien, Y un sous-préschéma fermé de X, F un $\underline{O}_X$-Module. La profondeur est une notion purement topologique qui s'exprime en termes de nullité des $\underline{H}^i_Y(X,F)$ pour $i < n$. On désire également étudier ces faisceaux pour un i donné, ou pour $i > n$. On démontre à ce propos le résultat suivant :

Lemme 3.12. Soit m un entier, pour que $\underline{H}^i_Y(X,F) = 0$, $i > m$ pour tout F cohérent, il faut et il suffit que ce soit vrai pour $F = \underline{O}_X$.

Par limite inductive c'est alors vrai pour tout faisceau quasi cohérent. Par exemple, si Y peut être décrit localement par m équations, ou, comme on dit, si Y est localement ensemblistement une intersection complète (ce qui se produit par exemple si X et Y sont non singuliers) il résulte du calcul des $\underline{H}^i_Y(X,F)$ par le complexe de KOSZUL que ces faisceaux sont nuls pour $i > m$. On a d'ailleurs utilisé ce fait implicitement dans l'exemple 3.10. Cette condition cohomologique n'est cependant pas suffisante, comme le prouve l'exemple ci-après :

<u>Exemple</u> 3.13. Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$, ou A est un anneau local noethérien, normal de dimension 2. Soit Y une courbe dans X. On peut démontrer que le complémentaire de la courbe est un ouvert affine donc $\underline{H}^i_Y(X,\underline{O}_X) \approx \underline{H}^i_Y(X,\underline{O}_X) \quad H^{i-1}(X-Y,\underline{O}_X) = 0$ pour $i > 1$. Cependant on peut construire une courbe qui n'est pas décrite par une équation.

Nous chercherons (*) des conditions pour que les $\underline{H}^i_Y(X,F)$ soient cohérents pour un i donné, ce qui n'est pas le cas en général, comme le montrent des exemples évidents, par exemple $H^n_{\underline{m}}(A)$ pour A un anneau local noethérien de dimension $n > 0$; lorsque par exemple A est un anneau de valuation discrète de corps des fractions K, on trouve $H^1_{\underline{m}}(A) \simeq K/A$, qui n'est pas un module de type fini sur A. Pour éclairer la lanterne du lecteur, disons que le problème posé est équivalent au suivant : Soit $f : U \longrightarrow X$ une immersion ouverte, soit G un faisceau cohérent sur U, trouver des critères pour que les images directes supérieures $R^i f_* G$ soient des faisceaux cohérents sur X pour un i donné. Ces conditions sont nécessaires pour l'utilisation de la géométrie formelle que nous avons en vue dans Exp IX et suivants.

(*) Cf. Exp VIII.

Exposé IV

MODULES ET FONCTEURS DUALISANTS

1. Généralités sur les foncteurs de modules.

Soient A un anneau noethérien commutatif,
C la catégorie des A-modules de type fini,
C' la catégorie des A-modules quelconques,
Ab la catégorie des groupes abéliens.

Le but de ce paragraphe est l'étude de certaines propriétés des foncteurs $T : C^{\circ} \longrightarrow \underline{Ab}$ (supposés additifs).

Remarquons que si $M \in \mathrm{Ob}\, C$, $T(M)$ peut être muni de façon canonique d'une structure de A-module qui est la suivante : si f_M est l'homothétie de M associée à $f \in A$, A opère sur $T(M)$ par $f_{T(M)}$. En d'autres termes, T se factorise en :

$$\begin{tikzcd} C^{\circ} \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "T_{\circ}"'] & & \underline{Ab} \\ & C' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où $C' \longrightarrow \underline{Ab}$ est le foncteur canonique.

Dans la suite, $T(M)$ sera considéré comme muni de sa structure de A-module.

En composant avec l'isomorphisme $M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(A,M)$ le morphisme $\mathrm{Hom}_A(A,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T(M),T(A))$, on obtient les morphismes suivants qui se déduisent l'un de l'autre de manière évidente :

$$M \longrightarrow \mathrm{Hom}_A\ (T(M),T(A)) \ ,$$

$$M \times T(M) \longrightarrow T(A) \ ,$$

$$T(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,T(A)),$$

ce qui nous définit un morphisme φ_T de foncteurs contravariants :

$$\varphi_T : T \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,T(A)) \quad .$$

Proposition 1.1. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) φ_T est un isomorphisme de foncteurs.
(ii) T est exact à gauche.

L'implication (i)$\Longrightarrow$(ii) est triviale.

L'implication (ii)$\Longrightarrow$(i) résulte de ce que pour un morphisme $u : F \longrightarrow F'$ de deux foncteurs exacts à gauche F et F' de C° dans $\underline{Ab}$, si u(A) est un isomorphisme, u est un isomorphisme (on utilise le fait que A est noethérien et donc que tout A-module de type fini est de présentation finie).

Remarque 1.2. Ceci montre en particulier que les foncteurs $T : C'^\circ \longrightarrow \underline{Ab}$ qui sont représentables sont les foncteurs qui commutent aux limites projectives quelconques (sur un ensemble préordonné non nécessairement filtrant).

Si $\underline{Hom}(C^\circ,\underline{Ab})_g$ désigne la sous-catégorie pleine de $\underline{Hom}(C^\circ,\underline{Ab})$ dont les objets sont les foncteurs exacts à gauche, on a démontré l'équivalence des catégories

$$C' \xrightarrow{\approx} \underline{Hom}(C^\circ,\underline{Ab})_g$$

par les foncteurs quasi-inverses l'un de l'autre

$$H \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_A(\ ,H)$$

et

$$T(A) \leftarrow\!\!\!\sim T \ .$$

Soient maintenant J un idéal de A, $Y = V(J) \subset \mathrm{Spec}\, A$, et désignons par C_Y la sous-catégorie pleine de C dont les objets sont les A-modules de type fini M tels que $\mathrm{Supp}\, M \subset Y$. On a :

$$C_Y = \bigcup_n C^{(n)} \quad ,$$

où $C^{(n)}$ est la sous-catégorie pleine de C_Y des modules M tels que $J^n M = 0$.

Proposition 1.3. Avec les mêmes notations que précédemment, soit $T : C_Y^o \longrightarrow \underline{Ab}$ un foncteur. A H est associé un morphisme naturel

$$\varphi_T : T \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\ ,H) \quad ,$$

et les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) φ_T est un isomorphisme.

(ii) Le foncteur T est exact à gauche.

Démonstration :

a) Définition de φ_T. Soit $M \in \mathrm{Ob}\ C_Y$. Il existe un entier n tel que $J^n M = 0$. Alors M est un A/J^n-module, et si T_n désigne la restriction de T à $C^{(n)}$, on sait définir le morphisme

$$T_n \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\ ,H_n),\ \text{où } H_n = T(A/J^n) \quad ;$$

d'où
$$T(M) = T_n(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \varinjlim H_n) = \mathrm{Hom}_A(M,H)$$

et
$$\varphi_T : T \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\ ,H) \quad .$$

b) Equivalence de (i) et (ii).

Il est clair que (i) entraîne (ii). Supposons (ii) vérifié et soit $M \in \mathrm{Ob}\ C^{(n)}$. On a vu que $T_n(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M,H_n)$, donc pour tout entier $n' > n$ on a

$$T(M) = T_n(M) = T_{n'}(M) = \varinjlim T_n(M)$$

et
$$T(M) \xrightarrow{\sim} \varinjlim \mathrm{Hom}_A(M,H_n) \quad .$$

Comme il s'agit ici de limites inductives filtrantes, on a aussi l'isomorphisme

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_A(M,H_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, \varinjlim H_n) = \mathrm{Hom}_A(M,H) \quad .$$

Si C'_Y désigne la catégorie des A-modules, de support contenu dans Y, mais non nécessairement de type fini, on a encore l'équivalence naturelle de catégories : $C'_Y \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Hom}}\ (C_Y^o, \underline{Ab})_g$.

Application : Les notations étant les mêmes que précédemment, soit

$$T^* : C_Y^\circ \longrightarrow \underline{Ab}$$

un ∂-foncteur exact. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose $H_n^i = T^i(A/J^n)$ et $H^i = \varinjlim H_n^i$.

Théorème 1.4. *Soit $n \in \mathbb{Z}$. S'il existe $i_\circ \in \mathbb{Z}$ tel que $T^i = 0$ pour tout $i < i_\circ$, alors les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $T^i = 0$ *pour tout* $i < n$.

(ii) $H^i = 0$ *pour tout* $i < n$.

(iii) *Il existe un module* $M_\circ$ *de* C_Y *tel que* $\operatorname{Supp} M_\circ = Y$ *et* $T^i(M_\circ) = 0$ *pour tout* $i < n$.

Démonstration : Il est évident que (i) entraîne (ii) et (iii) (on prend $M_\circ = A/J$). Montrons par récurrence sur n que (ii) entraîne (i) ; c'est vrai pour $n = i_\circ$, et on le suppose démontré jusqu'au rang n. Supposons alors que $H^i = 0$ pour tout $i < n + 1$; par l'hypothèse de récurrence on a $T^i = 0$ pour $i < n$, mais $T^{n-1} = 0$ entraîne que T^n est un foncteur exact à gauche et

$$T^n \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(\ ,H^n) = 0 \quad .$$

Montrons alors que (iii) entraîne (ii). C'est encore vrai pour $n = i_\circ$; supposons-le démontré jusqu'au rang n : soit $M_\circ$ un A-module de C_Y tel que $\operatorname{Supp} M_\circ = Y$ et que $T^i(M_\circ) = 0$ pour tout $i < n + 1$; par l'hypothèse de récurrence on a alors $H^i = 0$ pour tout $i < n$; il reste à montrer que $H^n = 0$. Mais "$H^i = 0$ pour tout $i < n$" implique que $T^{n-1} = 0$ et donc que $T^n \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(\ ,H^n)$. On a alors :

$$\operatorname{Ass} T^n(M_\circ) = \operatorname{Ass} \operatorname{Hom}(M_\circ,H^n) = \operatorname{Supp} M_\circ \cap \operatorname{Ass} H^n = \operatorname{Ass} H^n$$

car

$$\operatorname{Ass} H^n \subset \operatorname{Supp} H^n \subset Y = \operatorname{Supp} M_\circ \quad .$$

D'où $T^n(M_\circ) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ass} H^n = \emptyset \Leftrightarrow H^n = 0$; ce qui achève la démonstration.

2. Caractérisation des foncteurs exacts.

L'anneau A est toujours supposé noethérien et commutatif. Les notations sont celles de la proposition 2 :

$$y = V(J) \quad , \quad T : C_Y^{\circ} \longrightarrow \underline{Ab} \quad , \quad H = \varinjlim T(A/J^n) \quad ,$$

où on suppose que T est un foncteur exact à gauche, d'où :

$$T(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M,H) \quad .$$

Proposition 2.1. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Le foncteur T est exact,

(ii) H est injectif dans C'.

Démonstration : Il suffit évidemment de montrer que (i) implique (ii), c'est-à-dire de démontrer que si la restriction à C_Y du foncteur $\mathrm{Hom}_A(\ ,H)$ est un foncteur exact, H est injectif. Mais comme A est noethérien, pour montrer que H est injectif, on peut se borner à prouver que tout homomorphisme $f : N \to H$ de source un A-module N de type fini, sous-module d'un A-module M de type fini, se prolonge en un homomorphisme $\overline{f} : M \to H$.

La définition de H et le fait que N soit de type fini entrainent qu'il existe un entier n tel que $J^n.f(N) = 0$. Munissons alors M et N de la topologie J-adique. La topologie J-adique de N est équivalente à la topologie induite par la topologie J-adique de M (théorème de Krull). Il existe donc $V = J^k.M$ tel que

$$U = V \cap N \subset J^n N \quad .$$

On a alors la factorisation :

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & N/U \arrow[dl, "u"] \\ H & \end{tikzcd} \quad ,$$

N/U et M/V sont dans C_Y. L'hypothèse permet donc de prolonger u en $\overline{u}$

$$\begin{tikzcd} N/U \arrow[r, hook] \arrow[d, "u"'] & M/V \arrow[dl, "\bar{u}"] \\ H & \end{tikzcd},$$

et $M \longrightarrow M/V \xrightarrow{\bar{u}} H$ donne le prolongement cherché $\overline{f}$.

Corollaire 2.2. Soit K un A-module injectif, alors le sous-module $H^{\circ}_{J}(K)$ de K formé des éléments annulés par une puissance convenable de J est injectif.

Démonstration : Il suffit de vérifier que la restriction à C_y du foncteur $\mathrm{Hom}_A(\cdot,H^{\circ}_{J}(K))$ est un foncteur exact. Or soit $M \in \mathrm{Ob}\, C_y$, il existe k tel que $J^k.M = 0$, et l'inclusion

$$\mathrm{Hom}_A(M,H^{\circ}_{J}(K)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,K)$$

est alors un isomorphisme. D'où le résultat puisque $\mathrm{Hom}_A(\ ,K)$ est exact.

3. Etude du cas où T est exact à gauche et T(M) de type fini pour tout M :

Soit comme plus haut

$$T : C^{\circ}_{Y} \longrightarrow \underline{Ab} ,$$

on suppose désormais que T est exact à gauche et qu'on a la factorisation

$$\begin{tikzcd} C^{\circ}_{Y} \arrow[rr, "T"] \arrow[dr] & & \underline{Ab} \\ & C_Y \arrow[ur] & \end{tikzcd}.$$

On sait donc définir $T(T(M)) = T\circ T(M)$, et le morphisme canonique

$$M \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M,H),H)$$

définit un morphisme

$$M \longrightarrow T\circ T(M)$$

<u>Proposition</u> 3.1. <u>L'anneau</u> A <u>étant toujours supposé noethérien</u>, <u>si on fait l'hypothèse supplémentaire que</u> A/J <u>est artinien</u>, <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) T <u>ext exact à gauche et</u>, <u>pour tout</u> $M \in \mathrm{Ob}\ C_Y$, T(M) <u>est de type fini et</u> $M \to T\circ T(M)$ <u>est un isomorphisme</u>.

(ii) T <u>est exact et</u>, <u>pour tout corps résiduel</u> k <u>associé à un idéal maximal contenant</u> J, <u>on a</u> $T(k) \xrightarrow{\sim} k$.

(iii) <u>On a</u> $T \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\ ,H)$ <u>avec</u> H <u>injectif et</u>, <u>pour tout</u> k <u>comme dans</u> (ii), <u>on a</u> $\mathrm{Hom}_A(k,H) \xrightarrow{\sim} k$.

(iv) T <u>est exact et</u>, <u>pour tout</u> $M \in \mathrm{Ob}\ C_Y$, <u>on a</u> $\mathrm{long}T(M) = \mathrm{long}M$.

<u>Démonstration</u> :

On a déjà montré l'équivalence de (ii) et (iii) (prop.2.1).

Montrons que (ii) entraine (iv) : d'abord si $M \in \mathrm{Ob}\ C_Y$, comme M est un A/J^n-module avec A/J^n artinien, long M est finie. Raisonnons par récurrence sur la longueur de M. La condition (iv) est vraie si long M = 1 , parce qu'alors M est un k. Si long M > 1 , il existe un sous-module M' de M tel que $M' \neq 0$ et que long M' < long M . Formons alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0 \quad .$$

Comme T est exact, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow T(M'') \longrightarrow T(M) \dashrightarrow T(M') \longrightarrow 0 \quad ,$$

et long T(M) = long T(M') + long T(M") = long M' + long M" = long M .

(ii) entraine (i) : Comme (ii) entraine (iv), soit M un A-module de C_Y , on a long T(M) = long M ; donc T(M) est de longueur finie et par suite de type fini.

Il reste à montrer que $M \to T\circ T(M)$ est un isomorphisme ; on raisonne encore par récurrence sur long M. Pour M = k , c'est vrai. Dans le cas général on écrit le diagramme commutatif dont les deux lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & T\circ T(M') \arrow[r] & T\circ T(M) \arrow[r] & T\circ T(M'') \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} ,$$

où M' est un sous-module de M tel que $M' \neq 0$ et $\text{long}\, M' < \text{long}\, M$. Par l'hypothèse de récurrence, les flèches extrêmes sont des isomorphismes, donc

$$M \longrightarrow T\circ T(M)$$

est un isomorphisme.

(i) entraine (ii) : soit

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de A-modules de C_Y, et soit Q le conoyau de $T(M) \longrightarrow T(M')$. Appliquons T à la suite exacte

$$0 \longrightarrow T(M'') \longrightarrow T(M) \longrightarrow T(M') \longrightarrow Q \longrightarrow 0 ,$$

on obtient :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & T(Q) \arrow[r] & T\circ T(M') \arrow[r] & T\circ T(M) \\ & & M' \arrow[r] \arrow[u, "s"'] & M \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd} ,$$

donc $T(Q) = 0$ et $Q \xrightarrow{\sim} T(T(Q)) = 0$.

D'autre part soit k un corps résiduel, $k = A/\underline{m}$, $J \subset \underline{m}$. Il faut montrer que $T(k) \xrightarrow{\sim} k$. Pour cela il suffit de remarquer que $T(k)$ est un k-espace vectoriel. On en déduit :

$$T(k) \simeq k \oplus V ,$$

$$T(T(k) \simeq T(k) \oplus T(V) \simeq k \oplus V \oplus T(V) \simeq k ,$$

d'où $V = 0$.

Montrons enfin que (iv) entraine (iii) : il suffit de montrer que $T(k) \simeq k$; or $\text{long}\, T(k) = \text{long}\, k = 1$, donc $T(k) = k'$ est un corps résiduel et $\text{Supp}\, k' = \text{Supp}\, \text{Hom}_A(k,H) \subset \text{Supp}\, k$. Donc $k = k'$.

Remarque 3.2. On peut montrer que la condition (iv) est équivalente à la condition :

(iv)' Pour tout $M \in \mathrm{Ob}\, C_Y$, on a long $T(M) =$ long M .

4. Module dualisant. Foncteur dualisant.

Définition 4.1. Soient A un anneau local noethérien et $\underline{m}$ son idéal maximal. On appelle foncteur dualisant pour A tout foncteur

$$T : C^{\circ}_{\underline{m}} \longrightarrow \underline{Ab} \quad ,$$

où on note $C_{\underline{m}}$ au lieu de C_Y pour $y = V(\underline{m})$, qui satisfait aux conditions équivalentes de la proposition 3.1. On dit qu'un A-module I est dualisant pour A si le foncteur $M \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_A(M,I)$ est dualisant.

On peut généraliser la définition 4.1. au cas où on ne suppose plus que A soit un anneau local.

Définition 4.2. Soit A un anneau noethérien et soit $\overline{C}$ la sous-catégorie pleine de C formée des A-modules de longueur finie; on appelle foncteur dualisant tout foncteur T, A linéaire, de $\overline{C}^{\circ}$ dans $\overline{C}$, qui est exact et tel que le morphisme de foncteurs

$$\mathrm{id} \longrightarrow T \circ T$$

soit un isomorphisme.

On va démontrer un théorème d'existence et aussi que le module I qui représente un tel foncteur est localement artinien. On montrera aussi que, pour tout idéal maximal $\underline{m}$ de A, la composante $\underline{m}$-primaire du socle de I est de longueur 1.

Proposition 4.3. Soient A et B deux anneaux locaux noethériens d'idéaux maximaux $\underline{m}_A$ et $\underline{m}_B$, tels que B soit une A-algèbre finie. Alors, si I est un module dualisant pour A, $\mathrm{Hom}_A(B,I)$ est un module dualisant pour B.

Démonstration : Soit

$$R : C_{\underline{m}_B} \longrightarrow C_{\underline{m}_A}$$

le foncteur restriction des scalaires ; il est exact. Soit T un foncteur dualisant pour A,

$$T : C_{\underline{m}_A} \longrightarrow \underline{Ab} \quad ;$$

il est exact et, pour tout $M \in \mathrm{Ob}\, C_{\underline{m}_A}$, le morphisme naturel $M \longrightarrow T\circ T(M)$ est un isomorphisme ; donc $T\circ R$ est un foncteur dualisant pour B. Si I représente T, d'après la formule classique $\mathrm{Hom}_A(M,I) = \mathrm{Hom}_B(M,\mathrm{Hom}_A(B,I))$, valable pour tout B-module M, on en déduit que $\mathrm{Hom}_A(B,I)$ est un module dualisant pour B.

Corollaire 4.4. Soient A un anneau local noethérien et $\underline{a}$ un idéal de A ; soit $B = A/\underline{a}$. Si I est un module dualisant pour A, l'annulateur de $\underline{a}$ dans I est un module dualisant pour B.

Lemme 4.5. Soient A un anneau local noethérien et I un A-module localement artinien. Il existe un isomorphisme canonique

$$I \longrightarrow \hat{I} = I \otimes_A \hat{A} \quad .$$

Démonstration : Soit I_n l'annulateur de $\underline{m}$ dans I, où $\underline{m}$ est l'idéal maximal de A. Dire que I est localement artinien, c'est dire que I est limite inductive des I_n et que ceux-ci sont de longueur finie. Or le produit tensoriel commute aux limites inductives, on est ramené au cas où I est artinien. Dans ce cas I est annulé par une puissance de l'idéal maximal, soit $\underline{m}^k$; donc, pour $p \geqslant k$, $I \xrightarrow{\sim} I \otimes_A A/m^p$, donc $I \xrightarrow{\sim} I \otimes_A \hat{A}$ car A est noethérien et I est de type fini.

On en conclut que le foncteur restriction des scalaires de $\hat{A}$ à A et le foncteur extension des scalaires induisent des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre de la catégorie des $\hat{A}$-modules localement artiniens et de la catégorie des A-modules localement artiniens.

Proposition 4.6. Soient A un anneau local noethérien, $\hat{A}$ son complété, I un module dualisant pour A (resp. pour $\hat{A}$) et J le complété de I (resp. le A-module obtenu par restriction des scalaires). Alors J est un module dualisant pour $\hat{A}$ (resp. pour A). De plus les groupes abéliens sous-jacents à I et J sont isomorphes.

Démonstration : On remarque simplement que l'équivalence entre la catégorie des A-modules localement artiniens et la catégorie des $\hat{A}$-modules localement artiniens induit un isomorphisme entre les bifoncteurs $\mathrm{Hom}_A(.,.)$ et $\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(.,.)$, et que la caractérisation d'un foncteur ou d'un module dualisant ne fait intervenir que ces bifoncteurs.

Theorème 4.7. Soit A un anneau local neothérien.

a) Il existe toujours un module dualisant I.

b) Deux modules dualisants sont isomorphes (par un isomorphisme non canonique).

c) Pour qu'un module I soit dualisant, il faut et il suffit qu'il soit une enveloppe injective du corps résiduel k de A.

Remarque 4.8. La proposition 4.6 permet de se ramener au cas d'un anneau local noethérien complet. D'après un théorème de structure de COHEN, un tel anneau est quotient d'un anneau régulier. La proposition 4.3. permet alors de supposer A régulier. Comme nous le verrons plus loin, cette remarque permet un calcul explicite du module dualisant (*) ; nous démontrerons cependant le théorème 4.7. par d'autres moyens.

(*) C'était la méthode suivie d'abord par Grothendieck (en 1957). La méthode par enveloppes injectives qui va suivre est due semble-t'il à K. Morita Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum conditions, Sc. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, t.6, 1958-59, p.83-142. Le travail de Morita, est d'ailleurs indépendant de celui de Grothendieck et bien antérieur au présent séminaire, et ne se limite pas au cas des anneaux de base commutatifs.

Rappels :

Avant de démontrer le théorème, nous faisons quelques rappels sur la notion d'enveloppe injective. Cf. P. GABRIEL, Thèse, Paris 1961, Des Catégories Abéliennes, ch II § 5.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne dans laquelle les $\varinjlim$ existent et sont exactes (ex. $\mathcal{C}$ = catégorie des modules). Tout objet M se plonge dans un objet injectif et on appelle enveloppe injective de M tout objet injectif, contenant M, minimal. On a les propriétés suivantes :

(i) Tout objet M a une enveloppe injective I.

(ii) Si I et J sont deux enveloppes injectives de M, il existe entre I et J un isomorphisme (en général non unique) qui induit l'identité sur M.

(iii) I est une extension essentielle de M, c'est-à-dire que $P \subset I$ et $P \cap M = \{0\})$ implique $(P = \{0\})$. De plus si I est injectif et extension essentielle de M, I est enveloppe injective de M.

Ces résultats admis, pour démontrer le théorème 4.7, il suffit évidemment de prouver c).

Démonstration : Soit I un module dualisant pour A. Alors I est injectif et $\mathrm{Hom}_A(k,I)$ est isomorphe à k. En composant l'isomorphisme $k \simeq \mathrm{Hom}_A(k,I)$ avec l'inclusion

$$\mathrm{Hom}_A(k,I) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_A(A,I) \simeq I,$$

on obtient l'inclusion

$$k \hookrightarrow I \quad .$$

Montrons que I est enveloppe injective de k. Soit J un module injectif tel que

$$k \subset J \subset I \quad .$$

Comme J est injectif, il existe un sous A-module injectif J' de I tel que $I = J \oplus J'$. Montrons que $\mathrm{Hom}_A(k,J') = 0$. On a

$$\mathrm{Hom}_A(k,I) \simeq \mathrm{Hom}_A(k,J) \oplus \mathrm{Hom}_A(k,J') \quad ;$$

$\mathrm{Hom}_A(k,J)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}_A(k,I) \simeq k$ non réduit à zéro (puisqu'il contient l'inclusion $k \subset J$), donc $\mathrm{Hom}_A(k,J) \simeq k$ et par suite $\mathrm{Hom}_A(k,J') = 0$.

En raisonnant par récurrence sur la longueur on en déduit que $\mathrm{Hom}_A(M,J') = 0$ pour tout A-module M de longueur finie ; donc J' est l'objet qui représente le foncteur $0 : C^{\circ}_{\underline{m}} \to \underline{Ab}$, et par suite $J' = 0$.

Réciproquement, soit I une enveloppe injective de k. Pour voir que I est un module dualisant, il suffit de montrer que $V = \mathrm{Hom}_A(k,I)$ est isomorphe à k. Or on a la double inclusion

$$k \subset V \subset I \quad ;$$

V est un espace vectoriel sur k qui se décompose en la somme directe de k et d'un sous-espace vectoriel V' de I tel que $V' \cap k = 0$. Or I est une extension essentielle de k, d'où $V' = 0$ et $V = k$.

Corollaire 4.9. Soit A un anneau local noethérien ; tout module dualisant pour A est localement artinien.

Démonstration : Soit I un module dualisant ; c'est une enveloppe injective de k. Utilisons les notations et le résultat du corollaire 2.2. On a

$$k \subset H^{\circ}_{\underline{m}}(I) \subset I \quad ,$$

et $H^{\circ}_{\underline{m}}(I)$ est injectif. On en déduit que $I = H^{\circ}_{\underline{m}}(I)$ et donc que I est localement artinien.

5. Conséquences de la théorie des modules dualisants :

Le foncteur

$$T = \mathrm{Hom}_A(\ ,I) \quad : \quad C_{\underline{m}} \longrightarrow C_{\underline{m}}$$

est une anti-équivalence. En effet $T \circ T$ est isomorphe au foncteur identique et l'argument est formel à partir de là.

On en déduit les propriétés habituelles de la notion d'orthogonalité :

Soit $M^* = \mathrm{Hom}_A(M,I) = T(M)$ et soit $N \subset M$ un sous-module. On appelle orthogonal de N le sous-module N' de M^* formé des éléments de M nuls sur N. On obtient ainsi une bijection entre l'ensemble des sous-modules de M et l'ensemble des sous-modules de M, qui renverse la notion d'ordre.

On a en particulier :

- $\mathrm{long}_M\, N = \mathrm{colong}_{M^*}\, N'$.
- Aux modules M monogènes, i.e. tels que $M/\underline{m}\,M$ soit de dimension 0 ou 1, correspondent dans la dualité des modules dont le socle est de longueur 0 ou 1.
- Si A est artinien, les idéaux de A correspondent aux sous-modules de I.

ect...

Soient A un anneau local noethérien, DA la catégorie des A-modules M tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^{(n)} = M/\underline{m}^{n+1}M$ soit de longueur finie et tels que $M = \varprojlim_n M^{(n)}$, et soit $\hat{A}$ le complété de A. Le foncteur restriction des scalaires et le foncteur complétion sont des équivalences quasi-inverses entre DA et $D\hat{A}$, qui commutent à isomorphisme près à la formation des groupes abéliens sous-jacents aux modules considérés. Notons CA la catégorie des A-modules localement artiniens à socle de dimension finie.

Proposition 5.1. Soit A un anneau local noethérien et soit I un module dualisant pour A. Les foncteurs

$$\mathrm{Hom}_A(\ ,I) \ : \ (CA)^\circ \longrightarrow DA$$

et

$$\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\ ,I) \ : \ DA \longrightarrow (CA)^\circ$$

sont des équivalences de catégories, quasi-inverses l'une de l'autre.

De plus, si l'on transporte ces foncteurs par les équivalences de catégories entre DA et D$\hat{A}$ d'une part, et CA et C$\hat{A}$ d'autre part, on trouve le foncteur $\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\ ,I)$.

Démonstration : Soit $X \in \mathrm{Ob}\ CA$. Par définition on a :

$$X = \varinjlim_{k \in \mathbb{N}} X_k \quad , \qquad X_k = \mathrm{Hom}_A(A/m^{k+1}, X) \quad ,$$

donc

$$\mathrm{Hom}_A(X,I) = \varprojlim \ \mathrm{Hom}_A(X_k, I) \quad .$$

Donc $Y = \varprojlim X_k$ est un $\hat{A}$-module de type fini comme il résulte de EGA 0_I 7.2.9. On remarque à ce propos que D$\hat{A}$ est aussi la catégorie des $\hat{A}$-modules de type fini ou, si l'on veut, que DA est la catégorie des A-modules complets et de type fini sur $\hat{A}$. Soit alors Y un tel module, soit $f : Y \longrightarrow I$ un $\hat{A}$-homomorphisme. L'image de f est un sous-module de type fini, donc est annulée par $\underline{m}^k$ pour un certain k ; en effet tout $x \in I$ est annulé par une puissance de $\underline{m}$. Donc f se factorise par $Y/\underline{m}^k Y$, d'où il résulte que

$$\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(Y,I) = \varinjlim_k \ \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(Y^{(k)},I) \qquad \text{avec } Y^{(k)} = Y/\underline{m}^{k+1}\, Y$$
$$= \varinjlim_k \ (Y^{(k)})^*$$

appartient à Ob CA. D'où il résulte immédiatement que les deux foncteurs de l'énoncé sont quasi-inverses l'un de l'autre.

Il résulte des considérations précédentes que l'on ne change rien aux catégories ou aux foncteurs considérés, non plus qu'aux groupes abéliens sous-jacents aux modules considérés, en remplaçant A par $\hat{A}$;

la proposition 5.1. s'énonce alors ainsi :

La restriction du foncteur $\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\ ,I)$ à la catégorie des $\hat{A}$- modules de type fini prend ses valeurs dans la catégorie des $\hat{A}$-modules localement artiniens à socle de dimension finie, et admet un foncteur quasi-inverse, qui est la restriction du foncteur $\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\ ,I)$. Sur l'intersection de ces deux catégories, ces deux foncteurs coïncident (évidemment !) et établissent une auto-dualité de la catégorie des $\hat{A}$-modules de longueur finie.

Exemple 5.2. (MACAULAY). Soit A un anneau local de corps résiduel k. Soit k_o un sous-corps de A tel que k soit fini sur k_o, $[k:k_o] = d$. Tout A-module de longueur finie peut être considéré comme un k_o-espace vectoriel de dimension finie et égale à d.long(M). Le foncteur T :

$$M \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{k_o}(M,k_o)$$

est alors exact et conserve la longueur, donc est dualisant pour A. Le module dualisant associé est donc :

$$A' = \varinjlim_{n} \mathrm{Hom}_{k_o}(A/\underline{m}^n,k_o) \quad ,$$

c'est le dual topologique de A muni de la topologie $\underline{m}$-adique.

Exemple 5.3. Soit A un anneau local noethérien régulier de dimension n. Soit $\underline{m}$ son idéal maximal, soit k son corps résiduel. Il existe un système régulier de paramètres, $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, qui engendre $\underline{m}$, et qui est une suite A-régulière. On peut donc calculer les $\mathrm{Ext}^i_A(k,A)$ par le complexe de KOSZUL ; on trouve :

$$\mathrm{Ext}^i_A(k,A) = 0 \qquad \text{si } i \neq n \quad ,$$

$$\mathrm{Ext}^n_A(k,A) \simeq k \quad .$$

La profondeur de A étant n, pour tout M annulé par une puissance de $\underline{m}$, $\mathrm{Ext}^i_A(M,A) = 0$ si $i < n$; de plus $\mathrm{Ext}^i_A(M,A) = 0$ si $i > n$, car la dimension cohomologique globale de A est égale à n . Donc $\mathrm{Ext}^n_A(\ ,A)$ est exact et de plus $\mathrm{Ext}^n_A(k,A) \simeq k$; il en résulte que :

<u>Proposition</u> 5.4. <u>Si</u> A <u>est un anneau local noethérien régulier de dimension</u> n, <u>le foncteur</u>

$$M \rightsquigarrow \mathrm{Ext}^n_A(M,A)$$

<u>est dualisant</u>. <u>Le module dualisant associé est</u>

$$I = \varinjlim_r \mathrm{Ext}^n_A(A/\underline{m}^r,A) \quad ,$$

<u>il est isomorphe à</u> $H^n_{\underline{m}}(A)$ (Exposé II, th.6) (*) .

<u>Remarque</u> 5.5. Si A vérifie à la fois les hypothèses des deux exemples précédents, les deux modules dualisants trouvés sont isomorphes. Supposons par exemple que A soit régulier de dimension n, complet et d'égales caractéristiques. Il existe alors un corps des représentants, soit K. Si l'on choisit un système de paramètres $(x_1,\dots,x_n)$ de A, on peut construire un isomorphisme entre A et l'anneau des séries formelles : $K[[T_1,\dots,T_n]]$; d'où, comme nous allons le voir, un isomorphisme <u>explicite</u> entre les deux modules dualisants

$$v : H^n(A) \longrightarrow A' \quad .$$

On peut trouver une interprétation <u>intrinsèque</u> de cet isomorphisme à l'aide du module $\Omega^n(A/K)$ des différentielles relatives complété de degré maximum. En effet, l'on sait que $\Omega^n(A/K)$ admet une base formée de l'élément $dx_1 \wedge dx_2 \dots \wedge dx_n$.

D'où un isomorphisme

$$u : H^n(\Omega^n(A/K)) \longrightarrow H^n(A) \quad .$$

Un fait remarquable est alors que le composé

(*) Soient A un anneau, J un idéal de A, M un A-module, $i \in \mathbb{Z}$; on posera alors $H^i_J(M) = H^i_Y(X,F)$, où $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = V(J)$ et $F = \widetilde{M}$.

$$vu = w : H^n(\Omega^n) \longrightarrow A'$$

ne dépend plus du choix du système de paramètres et commute au changement du corps de base.

Pour construire v on calcule $H^n(A)$ grâce au complexe de KOSZUL associé aux x_i, on trouve :

$$H^n(A) = \varinjlim_r A/(x_1^r, \dots, x_n^r) \quad ,$$

où les morphismes de transition sont définis comme suit : posons $I_r = A/(x_1^r, \dots, x_1^r)$; soit $e^r_{a_1, \dots, a_n}$ l'image de $(x_1)^{a_1}(x_2)^{a_2} \dots (x_n)^{a_n}$ dans I_r. Les $e^r_{a_1, \dots, a_n}$, pour $s \leq a_i < r$, forment une base de I_r.

Ceci dit, si s est un entier, le morphisme de transition :

$$t_{r,r+s} : I_r \longrightarrow I_{r+s}$$

est la multiplication par $x_1^s x_2^s \dots x_n^s$, donc :

$$u_{r,r+s}(e^r_{a_1, \dots, a_n}) = e^{r+s}_{a_1+s, \dots, a_n+s} \quad .$$

Notons que la donnée d'un A-homomorphisme w d'un A-module M dans A' équivaut à la donnée d'une forme K-linéaire $w' : M \longrightarrow K$ qui soit continue sur les sous-modules de type fini. Dans le cas $M = H^n(\Omega^n)$, la définition de w équivaut donc à celle d'une forme linéaire

$$\rho : H^n(\Omega^n) \longrightarrow K \quad ,$$

appelée forme résidu (*). Pour construire ρ, il suffit de définir des formes $\rho_r : I_r \longrightarrow K$ qui se recollent, et on prendra

$$\rho_r (e^r_{a_1, \dots, a_n}) = \begin{cases} 1 \text{ si } a_i = r-1 & \text{pour } 1 \leq i \leq n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad .$$

(*) Pour une étude plus détaillée de la notion de résidu, Cf. R. HARTSHORNE, Residues and Duality, Lecture Notes in Math. n° 20, (1966), Springer.

Exposé V

DUALITE LOCALE ET STRUCTURE DES $H^i(M)$

1. Complexes d'homomorphismes.

1.1. Soient $F^\cdot$ et $G^\cdot$ deux modules gradués, alors on note :

(1) $\quad \mathrm{Hom}^\cdot(F^\cdot,G^\cdot)$

le module gradué des homomorphismes de modules gradués de $F^\cdot$ dans $G^\cdot$. Ainsi on a :

(2) $\quad \mathrm{Hom}^s(F^\cdot,G^\cdot) = \prod_k \mathrm{Hom}(F^k,G^{k+s})$.

Soit $F^\cdot$ (resp. $G^\cdot$) un complexe, et soit d_1 (resp. d_2) sa différentielle, alors pour $h \in \mathrm{Hom}^s(F^\cdot,G^\cdot)$ on posera

(3) $\quad d(h) = h \circ d_1 + (-1)^s d_2 \circ h$.

On vérifie trivialement que $d \circ d = 0$, donc que $\mathrm{Hom}^\cdot(F^\cdot,G^\cdot)$ muni de d est un complexe. Le groupe de cohomologie de ce complexe se note

(4) $\quad \underset{\sim}{\underline{H}}^\cdot(F^\cdot,G^\cdot)$.

Si $G^\cdot$ est injectif en chaque degré, alors

$$F^\cdot \rightsquigarrow \underline{H}^\cdot(F^\cdot,G^\cdot)$$

est un ∂-foncteur exact. De même, pour $F^\cdot$ quelconque,

$$G^\cdot \rightsquigarrow \underline{H}^\cdot(F^\cdot,G^\cdot)$$

est un δ-foncteur exact sur la catégorie des complexes $G^\cdot$ injectifs en chaque degré.

Remarque 1.2. Les cycles de $\mathrm{Hom}^\cdot(F^\cdot,G^\cdot)$ sont les homomorphismes de $F^\cdot$ dans $G^\cdot$ qui commutent ou anticommutent, suivant le degré, avec les différentielles. Les bords de $\mathrm{Hom}^\cdot(F^\cdot,G^\cdot)$ sont les homomorphismes de $F^\cdot$ dans $G^\cdot$ homotopes à zéro.

Soit A un anneau et soient M(resp. N) un A-module, R(M) (resp.R(N)) une résolution injective de M (resp. N), alors il existe un isomorphisme canonique

(1.3) $\underset{\sim}{H}^s(R(M),R(N)) \simeq \mathrm{Ext}^s(M,N)$.

En effet, soit i: $M \to R(M)$ l'augmentation canonique, et soit $h \in \mathrm{Hom}^s(R(M),R(N))$ alors on notera t_s l'application

$$h \rightsquigarrow h_0 \circ i$$

de $\mathrm{Hom}^s(R(M),R(N))$ dans $\mathrm{Hom}(M,R(N)^s)$. La famille $((-1)^s t_s)_{s \geqslant 0}$ définit un homomorphisme de complexes (ordinaires)

$$t: \mathrm{Hom}^\bullet(R(M),R(N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,R(N)) ,$$

i.e. on a $(dh)_0 \circ i = (-1) \; d_2 \circ h_0 \circ i$.

On vérifie facilement que, passant à la cohomologie, t donne un isomorphisme. En particulier il en résulte que

$$\underset{\sim}{H}^\bullet(R(M),R(N))$$

ne "dépend pas" de la résolution injective R(M) (resp. R(N)) de M (resp. N) choisie.

A toute suite exacte de A-modules

(5) $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$

on fait correspondre une suite exacte de résolutions injectives

(6) $0 \longrightarrow R(M') \longrightarrow R(M) \longrightarrow R(M'') \longrightarrow 0$.

On vérifie que l'isomorphisme (5.3.) commute avec les homomorphismes :

(8) $H^s(R(M'),R(N)) \longrightarrow H^{s+1}(R(M''),R(N))$,

(9) $\mathrm{Ext}^s(M',N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{s+1}(M'',N)$,

déduits de (6) et (5).

Soient P un troisième A-module, R(P) une résolution injective de P , alors la composition de morphismes gradués donne un accouplement

(10) $\mathrm{Hom}^i(R(N),R(M)) \times \mathrm{Hom}^j(R(M),R(P)) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{i+j}(R(N),R(P))$,

qui définit un accouplement:

(11) $\underset{\sim}{H}^i(R(N),R(M)) \times \underset{\sim}{H}^j(R(M),R(P)) \longrightarrow \underset{\sim}{H}^{i+j}(R(N),R(P))$,

donc un homomorphisme de foncteurs en M :

(1.4) $\underset{\sim}{H}^i(R(N),R(M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^j(R(M),R(P)),H^{i+j}(R(N),R(P)))$.

On va voir que (5.4.) est un homomorphisme de δ-foncteurs en M .
Les suites exactes (5) et (6) donnent un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}^i(R(N),R(M')) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}^j(R(M'),R(P)),\mathrm{Hom}^{i+j}(R(N),R(P))) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(q,id)} \\
\mathrm{Hom}^i(R(N),R(M)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}^j(R(M),R(P)),\ \mathrm{Hom}^{i+j}(R(N),R(P))) \\
\downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}^i(R(N),R(M'')) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}^j(R(M''),R(P)),\mathrm{Hom}^{i+j}(R(N),R(P)))
\end{array} .$$

Soit $h \in \mathrm{Hom}^i(R(N),R(M''))$ (resp. $g \in \mathrm{Hom}^j(R(M'),R(P))$) un cycle, et soit $h' \in \mathrm{Hom}^i(R(N),R(M))$ (resp. $g' \in \mathrm{Hom}^j(R(M),R(P))$ tel que $p(h') = h$ (resp. $q(g') = g$), alors dire que (1.4) est un homomorphisme de δ-foncteurs en M, c'est dire que

(12) $g \circ dh' - dg' \circ h$

est un cobord dans $\mathrm{Hom}^{\bullet}(R(N),R(P))$.

Or on a :

$$dh' = h' \circ d_1 + (-1)^i d_2 \circ h'$$
$$dg' = g' \circ d_2 + (-1)^j d_3 \circ g'$$

avec les notations évidentes. Donc (12) s'écrit :

$$g \circ h' \circ d_1 \ + \ (-1)^i \ g \circ d_2 \circ h' \ ,$$

$$- \ g' \circ d_2 \circ h \ - \ (-1)^j \ d_3 \circ g' \circ h \ .$$

D'autre part, puisque h et g sont des cycles on a :

$$g \circ d_2 = (-1)^{j+1} d_3 \circ g \ ,$$

$$d_2 \circ h = (-1)^{i+1} h \circ d_1 \ ,$$

donc, finalement, (12) s'écrit :

$$d(g \circ h' \ + \ (-1)^i \ g' \circ h) \ ,$$

ce qui termine la démonstration.

(1.3) et (1.4) donnent ainsi un homomorphisme de δ-foncteurs en M :

(1.5) $$\mathrm{Ext}^i(N,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^j(M,P), \mathrm{Ext}^{i+j}(N,P)) \ .$$

2. Le théorème de dualité locale pour un anneau local régulier.

Soient A un anneau local régulier de dimension r, $\underline{m}$ l'idéal maximal de A et M un A-module de type fini. On pose $H^i(M) = H^i_{\underline{m}}(M)$ (donc $H^i(M) = \varinjlim \mathrm{Ext}^i(A/\underline{m}^k, M)$). On a vu (IV 5.4) que $I = H^r(A)$ est un module dualisant pour A, désignons par D le foncteur dualisant associé. Dans (1.5) posons $N = A/\underline{m}^k, P = A$ alors on obtient un homomorphisme de δ-foncteurs en M

(13) $$\varphi_k : \mathrm{Ext}^i(A/\underline{m}^k, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^{r-i}(M,A), \mathrm{Ext}^r(A/\underline{m}^k, A)) \ .$$

Passant à la limite inductive suivant k, on trouve un homomorphisme de δ-foncteurs

(14) $$\varphi : H^i(M) \longrightarrow D(\mathrm{Ext}^{r-i}(M,A)) \ .$$

Théorème 2.1. (Th. de dualité locale). L'homomorphisme fonctoriel φ précédent est un isomorphisme.

Démonstration. Si $i > r$, le deuxième membre de (14) est trivialement nul, et le premier membre est nul car $H^i(M) = \varinjlim_{k} \mathrm{Ext}^i\,(A/\underline{m}^k, M)$, et c'est vrai pour chaque $\mathrm{Ext}^i(A/\underline{m}^k, M)$ (Théorème des syzygies).

Si $i = r$, d'après ce qui précède, les deux foncteurs en M, $H^r(M)$ et $D(\mathrm{Hom}(M,A))$ sont exacts à droite ; puisque A est noethérien, et M de type fini, il suffit de vérifier l'isomorphisme pour $M = A$, ce qui est immédiat.

Pour montrer que φ est isomorphisme fonctoriel, il suffit maintenant, en procédant par récurrence descendante par rapport à i, de remarquer que tout module de type fini admet une présentation finie, et que pour $i < r$ les deux membres de (14) sont zéro si M est libre de type fini. Cela est évident pour le deuxième membre, et puisque H^i commute avec les sommes finies il suffit, quant au premier, de montrer que $H^i(A)=0$ pour $i < r$. Or ceci résulte, puisque $\mathrm{prof}.A = r$, de (III 3.4).

3. Application à la structure des $H^i(M)$.

Théorème 3.1. Soient A un anneau local noethérien, D un foncteur dualisant pour A, M un A-module de type fini $\neq 0$, et de dimension n, alors on a :

(i) $H^i(M) = 0$ si $i < 0$ ou si $i > n$.

(ii) $D(H^i(M))^\wedge$ est un module de type fini sur $\hat{A}$, de dimension $\leq i$.

(iii) $H^n(M) \neq 0$, et si $A = \hat{A}$, $D(H^n(M))$ est de dimension n et $\mathrm{Ass}(D(H^n(M))) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M) \mid \dim.A/\mathfrak{p} = n\}$.

Démonstration. Soit I le module dualisant associé à D. On sait que $\hat{I}$ est un module dualisant pour $\hat{A}$. D'autre part, on a :

$$H^i(M)^\wedge = H^i(\hat{M}) ,$$

$$D(H^i(M))^\wedge = \mathrm{Hom}(H^i(\hat{M}),\hat{I}) \quad \text{et}$$

$$\dim.\hat{M} = \dim.M ,$$

donc on peut supposer A complet. Or, d'après un théorème de Cohen, tout anneau local complet est quotient d'un anneau local régulier. Pour se ramener à ce cas on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2. Soient X (resp. Y) un espace annelé, X' (resp. Y') un sous-espace fermé de X (resp. de Y), et $f: X \to Y$ un morphisme d'espaces annelés tel que $f^{-1}(Y') = X'$. Soit F un $\underline{O}_X$-Module et désignons par A (resp. B) l'anneau $\Gamma(\underline{O}_X)$ (resp. $\Gamma(\underline{O}_Y)$) et par $\bar{f}: B \to A$ l'homomorphisme d'anneaux correspondant à f. Il existe une suite spectrale de B-modules, de terme initial

$$(15) \qquad E_2^{p,q} = H^p_{Y'}(Y, R^q f_*(F)) \quad ,$$

aboutissant au B-module $H^{\cdot}_{X'}(X,F)_{[\bar{f}]}$.

Démonstration. Soit $\underline{O}_{Y,Y'}$ le faisceau $\underline{O}_Y|Y'$ prolongé par 0 en dehors de Y' (voir Exp. I). On a un isomorphisme de B-modules :

$$(16) \qquad \mathrm{Hom}(\underline{O}_{Y,Y'}, f_*(F)) \simeq \mathrm{Hom}(f^*(\underline{O}_{Y,Y'}), F)_{[\bar{f}]} \quad .$$

Or, on a :

$$(17) \qquad f^*(\underline{O}_{Y,Y'}) = \underline{O}_{X,X'} \quad ,$$

et de plus si G est un $\underline{O}_X$-Module injectif, alors $f_*(G)$ est un $\underline{O}_Y$-Module injectif, du moins si f est plat, cas auquel on peut se ramener aisément en remplaçant $\underline{O}_X$ etc par les faisceaux d'anneaux constants $\mathbb{Z}$. Donc la suite spectrale du foncteur composé

$$F \to \mathrm{Hom}(\underline{O}_{Y,Y'}, f_*(F)) \quad ,$$

de terme initial

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p(Y; \underline{O}_{Y,Y'}, R^q f_*(F)) \quad ,$$

aboutit, compte tenu de (16) et (17), à :

$$\mathrm{Ext}^{\cdot}(X: \underline{O}_{X,X'}, F)_{[\bar{f}]} \quad .$$

Le lemme résulte alors de (I 2.3).

Q.E.D.

Soit maintenant $f:B \to A$ un homomorphisme d'anneaux locaux surjectif. Soit

$$f: \mathrm{Spec}\ (A) \longrightarrow \mathrm{Spec}\ (B)$$

le morphisme de schémas affines correspondant. Posons $X=\mathrm{Spec}\ (A)$ (resp. $X' =\{\underline{m}_A\}$), $Y=\mathrm{Spec}.(B)$ (resp. $Y' =\{\underline{m}_B\}$), et soient M un A-module et $\widetilde{M}$ le $\underline{O}_X$-Module correspondant. Puisque $R^q f_*(\widetilde{M}) = 0$ pour $q > 0$, la suite spectrale (15) dégénère, et on obtient d'après (3.2) un isomorphisme de B modules :

$$(18) \qquad H^n_{\{\underline{m}_B\}}(Y, f_*(\widetilde{M})) \simeq H^n_{\{\underline{m}_A\}}(X,\widetilde{M})_{[f]} \quad ,$$

donc un isomorphisme de B-modules :

$$(19) \qquad H^n_{\underline{m}_B}(M_{[f]}) \simeq H^n_{\underline{m}_A}(M)_{[f]} \quad .$$

D'autre part si D_A (resp. D_B) est un foncteur dualisant pour A (resp. B), on a :

$$(20) \qquad D_A(M)_{[f]} \simeq D_B(M_{[f]}) \quad .$$

Enfin, puisque on a un isomorphisme d'anneaux

$$(21) \qquad B/\mathrm{Ann}.M_{[f]} \simeq A/\mathrm{Ann}.M \quad ,$$

on voit que le changement d'anneaux de base envisagé ne change rien. Supposons donc que A est régulier de dimension r.
D'après (2.1) on a :

$$(22) \qquad D(H^i(M)) = \mathrm{Ext}^{r-i}(M,A) \quad .$$

On va démontrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

(a) $\dim.\mathrm{Ext}^j(M,A) \leqslant r - j$;

(b) pour tout $\mathfrak{p} \in X = \mathrm{Spec}\,(A)$ tel que $\dim.A_{\mathfrak{p}} < j$,

on a $\mathrm{Ext}^j(M,A)_{\mathfrak{p}} = 0$;

(c) $\mathrm{codim}\,(\mathrm{supp}(\mathrm{Ext}^j(M,A)),X) \geqslant j$.

Pour démontrer (a) $\Longrightarrow$ (b), soit $\mathfrak{p} \in X, \dim.A_{\mathfrak{p}} < j$, alors $\dim A/\mathfrak{p} > r - j$, donc par (a) $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ext}^j(M,A)) \not\subset \mathfrak{p}$, ce qui entraîne $\mathrm{Ext}^j(M,A)_{\mathfrak{p}} = 0$.

Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(\mathrm{Ext}^j(M,A))$ alors $\mathrm{Ext}^j(M,A)_{\mathfrak{p}} \neq 0$ donc par (b) $\dim A_{\mathfrak{p}} \geqslant j$. Donc $\mathrm{codim}\,(\mathrm{Supp}(\mathrm{Ext}^j(M,A),X) = \inf \{\dim A_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(\mathrm{Ext}^j(M,A))\} \geqslant j$, c'est-à-dire (b) $\Longrightarrow$ (c). Enfin (c) implique (a) trivialement.

Démontrons maintenant le théorème.

(i) Soit $x=(x_1,\ldots x_r)$ un système de paramètres pour A tel que $x_i \in \mathrm{Ann}.M$ pour $i=1,\ldots r-n$. Soit $K^{\cdot}((\underline{x}^k),M)$ le complexe de Koszul. On voit facilement que l'application $K^i((x^k),M) \to K^i((x^{k'}),M)$ pour $k < k'$ est zéro, si $i > n$. Il en résulte que $H^i(M) = \varinjlim.H^i((x^k),M) = 0$ si $i > n$. D'autre part, il est trivial que $H^i(M) = 0$ si $i < 0$, donc (i) est démontré.

(ii) Puisque A est régulier, $\dim A_{\mathfrak{p}} < j$ entraîne $\dim \mathrm{gl}.A_{\mathfrak{p}} < j$ donc $\mathrm{Ext}^j(M,A)_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Ext}^j_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}},A_{\mathfrak{p}}) = 0$, donc on a démontré (b) et par suite (a). (ii) résulte alors de (22) et de (a).

(iii) Il existe un $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$ tel que $\dim A_{\mathfrak{p}} = r - n$ et tel que $\mathrm{Supp}(M_{\mathfrak{p}}) = \{\underline{m}A_{\mathfrak{p}}\}$. Puisque $A_{\mathfrak{p}}$ est régulier si A l'est, on trouve $\mathrm{prof}\, A_{\mathfrak{p}} = r - n$ donc

(23) $$\mathrm{Ext}^{r-n}_A(M,A)_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Ext}^{r-n}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}},A_{\mathfrak{p}}) \neq 0 \quad .$$

Ceci implique, tenant compte à (22), que d'une part :

$$H^n(M) \neq 0 ,$$

d'autre part

$$\dim.D(H^n(M)) \geqslant n ,$$

donc d'après (ii)

$$\dim.D(H^n(M)) = n.$$

Soit maintenant $Y=\mathrm{Supp}(M)$. D'après (i) on sait que $D(H^n(M')) = \mathrm{Ext}^{r-n}(M',A)$ est un foncteur en M', exact à gauche, sur la catégorie $(C_Y)^\circ$. Donc il existe un A-module H et un isomorphisme de foncteurs en M' :

$$\mathrm{Ext}^{r-n}(M',A) = \mathrm{Hom}(M',H) .$$

Soient Y_i, $i=1,\dots k$ les composantes irréductibles de Y de dimension maximum. On va voir que l'assertion $\mathrm{Ext}^{r-n}(M',A) \neq 0$ est équivalente à l'assertion : il existe un i tel que $\mathrm{Supp}M' \supset Y_i$. En effet si $\mathrm{Supp}M' \supset Y_i$ alors $\dim.M' = n$ donc $\mathrm{Ext}^{r-n}(M',A) \neq 0$.

Si $\mathrm{Supp}M' \not\supset Y_i$ pour tout $i=1,\dots k$, alors $\dim.M' < n$

$$D(H^n(M')) = \mathrm{Ext}^{r-n}(M',A) = 0 .$$

Puisque $\mathrm{Ass}(\mathrm{Ext}^{r-n}(M,A)) = \mathrm{Supp}M \cap \mathrm{Ass}H$ on voit que la dernière assertion de (iii) résulte du lemme suivant :

<u>Lemme</u> 3.3. <u>Soit</u> $X=\mathrm{Spec}(A)$, <u>et soient</u> Y <u>une partie fermée de</u> X , $T:(C_Y)^\circ \longrightarrow Ab$ <u>un foncteur exact à gauche</u>, <u>et</u> Y_i , $i=1,\dots,k$, <u>une famille de composantes irréductibles de</u> Y <u>tels que l'assertion</u> : $T(M)=0$ <u>est équivalente à l'assertion</u> : $\forall i$ $\mathrm{Supp}M \not\supset Y_i$, <u>Alors</u> T <u>est représentable par un module</u> H <u>tel que</u> $\mathrm{Ass}.H = \bigcup_{i=1}^{k} \{y_i\}$, <u>où</u> y_i <u>est le point générique de</u> Y_i, $i=1,\dots k$.

Démonstration. Soit $y \in Y$, on fabrique un A-module $M(y)$ tel que $\mathrm{Supp}(M(y)) = \{\overline{y}\}$. Supposons que $y \neq y_i$ pour tout $i=1,\dots k$, alors $Y_i \not\subset \mathrm{Supp}(M(y))$ pour tout $i=1,\dots,k$, donc $T(M)(y))=0$. Il en résulte :

$$\mathrm{Ass}(T(M(y))) = \mathrm{Supp}(M(y)) \cap \mathrm{AssH} = \emptyset \quad ,$$

donc $y \notin \mathrm{AssH}$. Si $y=y_i$, alors $Y_i \subset \mathrm{Supp}(M(y))$, donc $T(M(y)) \neq 0$, donc :

$$\mathrm{Ass}(T(M(y))) = \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{AssH} \neq \emptyset \quad .$$

D'après la première partie de la démonstration, ceci implique $y \in \mathrm{AssH}$, d'où le lemme, Q.E.D.

Exemple 3.4. Soit A un anneau noethérien, soient $X=\mathrm{Spec}(A)$ et Y une partie fermée de X, tel que $X - Y$ soit affine, alors pour toute composante irréductible Y_α de Y on a $\mathrm{codim.}(Y_\alpha, X) \leqslant 1$.

En effet, considérons X comme préschéma au-dessus de X. Soit $y_\alpha \in Y_\alpha$ un point générique, et considérons le morphisme $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X,Y_\alpha}) \longrightarrow X$.

Le schéma affine obtenu par extension du schéma de base de X à $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X,Y_\alpha})$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X,Y_\alpha})$.

D'après (EGA I 3.2.7) on voit que si y_o est l'unique point fermé de $Y_o=\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X,Y_\alpha})$ alors $Y_o - y_o$ est affine. Par (EGA III 1.3.1) on trouve :

$$H^i(Y_o - y_o, \underline{O}_{Y_o}) = 0 \qquad \text{si } i > 0 ,$$

donc par (I.2.11)

$$H^i(\underline{O}_{X,y_\alpha}) = H^i_{\{y_o\}}(Y_o, \underline{O}_{Y_o}) = 0 \qquad \text{si } i \geqslant 2 .$$

Tenant compte de (5.7.) il vient :

$$\mathrm{dim.}\underline{O}_{X,y_\alpha} \leqslant 1 \quad ,$$

donc $\mathrm{codim.}\,(Y_\alpha, X) = \inf_{y \in Y_\alpha} \mathrm{dim.}\underline{O}_{X,y} \leqslant 1$,

Q.E.D.

Soient A un anneau local noethérien, $\underline{m}$ l'idéal maximal et M un A-module de type fini. Supposons que A est quotient d'un anneau local régulier. Posons $X=\mathrm{Spec}(A)$, et pour tout $x \in X$, $\underline{m}_x = \underline{m}A_x$.

Proposition 3.5. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

a) $H^i(M)$ *est de longueur finie* .

b) $\forall x \in X - \{\underline{m}\}$, $H^{i-\dim\{\bar{x}\}}_{\underline{m}_x}(M_x) = 0$.

Démonstration. Compte tenu de (3.3) nous pouvons supposer A régulier. D'après la formule (1.3) nous avons :

$$H^i(M) = D(\mathrm{Ext}^{r-i}(M,A)) ,$$

où $r=\dim.A$. D'après (IV 4.7), a) est équivalent à :

(24) $\mathrm{Ext}^{n-i}(M,A)$ est de longueur finie.

Or (24) est équivalent à :

(25) $\forall x \in X - \{\underline{m}\}$, on a $\mathrm{Ext}^{r-i}(M,A)_x = 0$.

D'autre part A_x est régulier de dimension $r-\dim\{\bar{x}\}$, donc d'après (2.1)

(26) $$H^{i-\dim\{\bar{x}\}}_{\underline{m}_x}(M_x) = D(\mathrm{Ext}_{A_x}^{(r-\dim\{\bar{x}\})-(i-\dim\{\bar{x}\})}(M_x,A_x)) = D(\mathrm{Ext}_{A_x}^{r-i}(M_x,A_x)) .$$

Puisque M est de type fini on a :

$$\mathrm{Ext}_A^{r-i}(M,A)_x = \mathrm{Ext}_{A_x}^{r-i}(M_x,A_x)$$

d'où la proposition.

Corollaire 3.6. *Pour que* $H^i(M)$ *soit de longueur finie pour* $i \leq n$, *il faut et il suffit que*

$$\mathrm{prof}.M_x > n-\dim\{\bar{x}\}$$

pour tout $x \in X - \{\underline{m}\}$.

Démonstration. Résulte de (3.5) et de (III 3.1).

Exposé VI

LES FONCTEURS $\mathrm{Ext}^{\cdot}_{Z}(X;F,G)$ et $\underline{\mathrm{Ext}}^{\cdot}_{Z}(F,G)$.

1. Généralités.

1.1. Soient $(X,\underline{O}_X)$ un espace annelé et Z une partie localement fermée de X. Soient F et G des $\underline{O}_X$-Modules, on désignera par $\mathrm{Ext}^{i}_{Z}(X;F,G)$ (resp. $\underline{\mathrm{Ext}}^{i}_{Z}(F,G)$) le i-ème foncteur dérivé du foncteur $G \rightsquigarrow \Gamma_Z(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F,G))$ (resp. $\underline{\Gamma}_Z(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F,G)$.

Lemme 1.2. *Le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^{i}_{Z}(F,G)$ est canoniquement isomorphe au faisceau associé au préfaisceau*

$$U \rightsquigarrow \mathrm{Ext}^{i}_{Z\cap U}(U;F|U,G|U) \quad .$$

Cela résulte de (T, 3.7.2.) et de ce que $\Gamma(U;\underline{\Gamma}_Z(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F,G))$ est canoniquement isomorphe à $\Gamma_{Z\cap U}(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X|U}(F|U,G|U))$.

Théorème 1.3. (Théorème d'excision). *Soit V un ouvert de X contenant Z, on a alors un isomorphisme de foncteurs cohomologiques*

$$\mathrm{Ext}^{\cdot}_{Z}(X;F,G) \simeq \mathrm{Ext}^{\cdot}_{V}(V;F|V,G|V) \quad . \tag{1.3.1}$$

En effet, si $G^{\cdot}$ est une résolution injective de G, alors $G^{\cdot}|V$ est une résolution injective de $G|V$. Le théorème en résulte immédiatement.

1.4. Soit $\underline{O}_{X,Z}$ le $\underline{O}_X$-Module défini par les conditions suivantes (G, 2.9.2.): $\underline{O}_{X,Z}|X-Z = 0$ et $\underline{O}_{X,Z}|Z = \underline{O}_X|Z$. On a vu que pour tout $\underline{O}_X$-Module H, il existe un isomorphisme fonctoriel : $\Gamma_Z(H) \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(\underline{O}_{X,Z},H)$. On en déduit donc des isomorphismes fonctoriels en F et G :

$$\Gamma_Z(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F,G) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(\underline{O}_{X,Z},\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F,G)) \quad , \tag{1.4.1}$$

$$(1.4.2)\qquad \Gamma_Z(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F,G) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(\underline{O}_{X,Z}\otimes_{\underline{O}_X}F,G)\ ,$$

$$(1.4.3)\qquad \Gamma_Z(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F,G) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(F,\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(\underline{O}_{X,Z},G)) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(F,\underline{\Gamma}_Z(G))\ .$$

Il résulte en particulier de (1.4.2) qu'il existe un isomorphisme ∂ fonctoriel en F et G entre $\mathrm{Ext}^i_Z(X;F,G)$ et $\mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(\underline{O}_{X,Z}\otimes_{O_X}F,G)$.

1.5. Par définition le foncteur $G \rightsquigarrow \Gamma_Z(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F,G))$ est le composé du foncteur $G \rightsquigarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F,G)$ et du foncteur Γ_Z . Comme Γ_Z est exact à gauche (I, 1.9) et comme $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F,G)$ est flasque si G est injectif, et que Γ_Z est exact sur les flasques (I, 2.12), il résulte de (T, 2.4.1) qu'il existe un foncteur spectral aboutissant à $\mathrm{Ext}^\bullet_Z(X;F,G)$ et dont le terme initial est $H^p_Z(X,\underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{O}_X}(F,G))$.

D'autre part, il résulte de (1.4.3) que $\Gamma_Z(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F,G)$ est le composé $\underline{\Gamma}_Z$ et du foncteur $H \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(F,H)$.

Puisque le foncteur $\underline{\Gamma}_Z$ transforme les injectifs en injectifs (I, 1.4.), il résulte de (T, 2.4.1) qu'il existe un foncteur spectral aboutissant à $\mathrm{Ext}^\bullet_Z(X;F,G)$ et dont le terme initial est $\mathrm{Ext}^p_{\underline{O}_X}(X;F,\underline{H}^q_Z(G))$.

Il résulte enfin, de (1.4.2) et de la suite spectrale des Ext, qu'il existe un foncteur spectral aboutissant à $\mathrm{Ext}^\bullet_Z(X;F,G)$ et dont le terme initial est $H^p(X;\underline{\mathrm{Ext}}^\bullet_Z(F,G))$. D'où le

<u>Théorème</u> 1.6. <u>Il existe trois foncteurs spectraux aboutissant à</u> $\mathrm{Ext}^\bullet_Z(X;F,G)$ <u>et dont les termes initiaux sont respectivement</u> :

$$(1.6.1)\qquad H^p_Z(X,\underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{O}_X}(F,G))$$

$$(1.6.2)\qquad H^p(X,\underline{\mathrm{Ext}}^q_Z(F,G))$$

$$(1.6.3)\qquad \mathrm{Ext}^p_{O_X}(X;F,\underline{H}^q_Z(G))\ .$$

1.7. Soit maintenant Z' une partie fermée de Z et soit $Z'' = Z-Z'$. On a une suite exacte.

$$(1.7.1) \qquad 0 \longrightarrow \underline{O}_{X,Z''} \rightarrow \underline{O}_{X,Z} \longrightarrow \underline{O}_{X,Z'} \longrightarrow 0$$

qui généralise la suite exacte de (G, 2.9.3). Cette suite exacte splitte localement, on a donc, pour tout $\underline{O}_X$-Module F, une autre suite exacte :

$$(1.7.2) \qquad 0 \longrightarrow F \otimes_{\underline{O}_X} \underline{O}_{X,Z''} \longrightarrow F \otimes_{\underline{O}_X} \underline{O}_{X,Z} \longrightarrow F \otimes_{\underline{O}_X} \underline{O}_{X,Z'} \longrightarrow 0 .$$

Soit maintenant G un $\underline{O}_X$-Module; si on applique le foncteur $\mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(\cdot,G)$ à la suite exacte (1.7.2), on déduit de (1.4.2) et de la suite exacte des Ext le théorème suivant :

<u>Théorème</u> 1.8. <u>Soient</u> Z <u>une partie localement fermée de</u> X, Z' <u>une partie fermée de</u> Z <u>et</u> $Z'' = Z-Z'$. <u>On a alors une suite exacte fonctorielle en</u> F <u>et</u> G :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Z'}(F,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_Z(F,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Z''}(F,G) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{Z'}(F,G) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \mathrm{Ext}^i_Z(F,G) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_{Z''}(F,G) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_{Z'}(F,G) \longrightarrow \ldots$$

<u>Corollaire</u> 1.9. <u>Soit</u> Y <u>une partie fermée de</u> X <u>et soit</u> $U = X-Y$. <u>On a alors une suite exacte fonctorielle en</u> F <u>et</u> G :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_Y(F,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(F,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X|U}(F|U,G|U) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_Y(F,G) \rightarrow \ldots$$

$$\ldots \mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(F,G) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X|U}(F|U,G|U) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_Y(F,G) \longrightarrow \ldots .$$

Ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème (1.3) et du théorème (1.8).

2. Applications aux faisceaux quasi-cohérents sur les préschémas.

Proposition 2.1. *Soit X un préschéma localement noethérien; pour toute partie localement fermée Z de X, pour tout Module cohérent F et tout Module quasi-cohérent G sur X, les $\underline{Ext}^i_Z(F,G)$ sont quasi-cohérents.*

On montre, comme pour (1.6.3), que les Modules $\underline{Ext}^i_Z(F,G)$ sont l'aboutissement d'une suite spectrale de terme initial $\underline{Ext}^p_{\underline{O}_X}(F,\underline{H}^q_Z(G))$. D'après (II, corol. 3), les $\underline{H}^q_Z(G)$ sont quasi-cohérents, et donc aussi les $\underline{Ext}^p_{\underline{O}_X}(F,\underline{H}^q_Z(G))$, puisque F est cohérent. La proposition en découle alors immédiatement.

2.2. Soient maintenant Y un sous-préschéma fermé de X et I un idéal de définition de Y. Soient m et n des entiers tels que $m \geqslant n \geqslant 0$; on désigne par $i_{n,m}$ l'application canonique $\underline{O}_{Y_m} = \underline{O}_X/I^{m+1} \longrightarrow \underline{O}_X/I^{n+1} = \underline{O}_{Y_n}$ et par j_n l'application $\underline{O}_{X,Y} \longrightarrow \underline{O}_{Y_n}$. Les $(\underline{O}_{Y_n}, i_{n,m})$ forment un système projectif et les j_n sont compatibles avec les $i_{n,m}$.

En appliquant le foncteur $\mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(F \otimes \cdot\,, G)$, on en déduit un morphisme

$$\varphi' : \quad \varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(X;F \otimes \underline{O}_{Y_n}, G) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(X;F \otimes \underline{O}_{X,Y}, G) ;$$

c'est un morphisme de foncteurs cohomologiques en G. Le morphisme

$$\varphi : \quad \varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(X;F \otimes \underline{O}_{Y_n}, G) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_Y(X;F,G)$$

composé de φ' et de θ (cf. 1.4.) est donc lui aussi un morphisme de foncteurs cohomologiques en G.

On définit de même

$$\Phi : \quad \varinjlim_n \underline{Ext}^i_{\underline{O}_X}(F \otimes \underline{O}_{Y_n}, G) \longrightarrow \underline{Ext}^i_Y(F,G) .$$

Théorème 2.3. Soient X un préschéma localement noethérien, Y une partie fermée de X définie par un idéal cohérent I , F un Module cohérent, G un Module quasi-cohérent. Alors,

a) Φ est un isomorphisme.

b) Si X est noethérien, φ est un isomorphisme.

La démonstration de b) étant presque mot à mot celle de (II, 6 b)), grâce à la suite spectrale 1.6.2 , nous ne la reproduirons pas.

Pour la démonstration de a), on peut, d'après (2.1), supposer X affine d'anneau A , F (resp. G) défini par un A-module M (resp. N) et I par un idéal $\underline{i}$. Il suffit de prouver que l'homomorphisme

(2.3.1.) : $$\varinjlim_n \operatorname{Ext}^i_A(M/\underline{i}^n M, N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_Y(X;F,G)$$

déduit de Φ est un isomorphisme.

En effet, on peut, pour $i = 0$, identifier canoniquement les deux membres de (2.3.1) au sous-module de $\operatorname{Hom}_A(M,N)$ défini par les éléments de $\operatorname{Hom}_A(M,N)$ annulés par une puissance de $\underline{i}$. On voit alors que l'homomorphisme (2.3.1) n'est autre que l'application identique.

Le foncteur $N \rightsquigarrow \varinjlim_n \operatorname{Ext}^{\bullet}_A(M/\underline{i}^n M, N)$ est un ∂-foncteur universel.

On va montrer qu'il en est de même du foncteur $N \rightsquigarrow \operatorname{Ext}^{\bullet}_Y(M , N)$. En effet si N est un module injectif, d'après (II, lemme 9 et lemme 11), $\underline{H}^q_Y(N) = 0$ si $q \neq 0$; et d'après (IV 2.3) $H^0_Y(N)$ est injectif.

Il en résulte alors que $\operatorname{Ext}^p_{\underline{O}_X}(X;M , \underline{H}^q_Y(N)) = 0$ si $p + q \neq 0$; on a donc, d'après (1.6.3), $\operatorname{Ext}^i_Y(M ,N) = 0$ pour $i \neq 0$ et N injectif. Ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

Mêmes références que celles listées à la fin de l'Exp. I, citées respectivement T et G.

Exposé VII

CRITERES DE NULLITE, CONDITIONS DE COHERENCE DES FAISCEAUX $\underline{\mathrm{Ext}}^i_Y(F,G)$

1 - Etude pour $i < n$.

Démontrons un lemme :

Lemme 1.1. *Soient X un préschéma localement noethérien, Y une partie fermée de X et G un $\underline{O}_X$-Module quasi-cohérent. Supposons que pour tout $\underline{O}_X$-Module cohérent F de support contenu dans Y, on ait :*

$$\underline{\mathrm{Ext}}^{n-1}(F,G) = 0 .$$

Alors pour tout $\underline{O}_X$-Module cohérent F et tout fermé Z de X tels que $Y \supset \mathrm{Supp}\, F \cap Z$, on a

$$\underline{\mathrm{Ext}}^n_Z(F,G) \approx \underline{\mathrm{Hom}}(F, \underline{H}^n_Y(G)) .$$

On remarque d'abord que

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_Z(F,G) = \underline{\mathrm{Ext}}^i_{Z \cap \mathrm{Supp}\, F}(F,G) ,$$

(trivial, cf Exposé VI). On fait d'abord la démonstration pour $Z = X$ donc $\mathrm{supp}\, F \subset Y$. Le foncteur

$$F \rightsquigarrow \underline{\mathrm{Ext}}^n(F,G) ,$$

défini sur la catégorie des $\underline{O}_X$-Modules cohérents de support contenu dans Y, est exact à gauche. En vertu de (IV 1.2), il est représentable par

$$I = \varinjlim_k \underline{\mathrm{Ext}}^n(\underline{O}_X/\mathcal{J}^{k+1}, G),$$

où $\mathcal{J}$ est l'idéal de définition de Y. Or, d'après (II, 6), on sait que :

$$\underline{H}^n_Y(G) \approx \varinjlim_k \underline{\mathrm{Ext}}^n(\underline{O}_X/\mathcal{J}^{k+1}, G) .$$

D'où la conclusion si $Z = X$. Toujours d'après (VI, 2.3) on sait que :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^n_Z(F,G) \approx \varinjlim_k \underline{\mathrm{Ext}}^n(F/\mathcal{J}^{k+1}F,G) ,$$

où $\mathcal{J}$ est l'idéal de définition de Z. Le support de $F/\mathcal{J}^{k+1}F$ est contenu dans Y si $Z \cap \mathrm{Supp}\, F \subset Y$; d'après ce que nous venons de démontrer, on a donc :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^n_Z(F,G) \approx \varinjlim_k \underline{\mathrm{Hom}}(F/\mathcal{J}^{k+1}F,\underline{H}^n_Y(G)) .$$

Il reste à faire voir que l'homomorphisme naturel :

$$\varinjlim_k \underline{\mathrm{Hom}}(F/\mathcal{J}^{k+1}F,\underline{H}^n_Y(G)) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(F,\underline{H}^n_Y(G)) ,$$

est un isomorphisme lorsque $Z \cap \mathrm{Supp}\, F \subset Y$. Or X peut être recouvert par des ouverts affines noethériens; on est ainsi ramené au cas où X est affine noethérien; alors $F(X)$ est un $\underline{O}_X(X)$-module de type fini et $\mathrm{Supp}\, \underline{H}^n_Y(G) \subset Y$. Donc tout homomorphisme $u: F(X) \longrightarrow \underline{H}^n_Y(G)(X)$ est annulé par une puissance de $\mathcal{I}$ donc par une puissance de $\mathcal{J}$, C.Q.F.D.

Proposition **1.2.** Soient X un préschéma localement noethérien, Y une partie fermée de X, G un $\underline{O}_X$-Module quasi-cohérent et n un entier. Quelles que soient Z et S, parties fermées de X telles que $Z \cap S = Y$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\underline{H}^i_Y(G) = 0$ si $i < n$;

(ii) il existe un $\underline{O}_X$-Module cohérent F, de support S, tel que :

$$\mathrm{Ext}^i_Z(F,G) = 0 \quad \text{si} \quad i < n ;$$

(iii) pour tout $\underline{O}_X$-Module F cohérent de support contenu dans S (i.e. $\mathrm{Supp}\, F \cap Z = \mathrm{Supp}\, F \cap Y$), on a :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_Z(F,G) = 0 \quad \text{si} \quad i < n \ ;$$

(iv) pour tout $\underline{O}_X$-Module cohérent F , on a :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_Y(F,G) = 0 \quad \text{si} \quad i < n \ .$$

De plus, si elles sont vérifiées, alors pour tout $\underline{O}_X$-Module cohérent F et toute partie fermée Z' de X telle que $Z' \cap \operatorname{Supp} F = Y \cap \operatorname{Supp} F$, on a des isomorphismes :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^n_{Z'}(F,G) \approx \underline{\mathrm{Ext}}^n_Y(F,G) \approx \underline{\mathrm{Hom}}(F,\underline{H}^n_Y(G)) \ .$$

Démonstration Raisonnons par récurrence. La proposition est triviale pour $n < 0$. Supposons la démontrée pour $n < q$. Si l'une des conditions est vérifiée pour $n = q$, et pour deux parties Z et S comme dit, par l'hypothèse de récurrence on a, pour tout fermé Z' de X et tout $\underline{O}_X$-Module cohérent F tels que $Z' \cap \operatorname{Supp} F = Y \cap \operatorname{Supp} F$, des isomorphismes :

$$(1.1) \qquad \underline{\mathrm{Ext}}^{q-1}_{Z'}(F,G) \approx \underline{\mathrm{Hom}}(F,\underline{H}^{q-1}_Y(G)) \approx \underline{\mathrm{Ext}}^{q-1}_Y(F,G) \ .$$

Donc :

(i) $\Longrightarrow$ (iv), car on prend $Z' = Y$ dans (1.1) ;

(iv) $\Longrightarrow$ (iii), car on prend $Z' = Z$ dans (1.1) ;

(iii) $\Longrightarrow$ (ii), car on prend $F = \underline{O}_S$;

(ii) $\Longrightarrow$ (i), car on prend $Z' = Z$ dans (1.1) ; d'où $\underline{\mathrm{Hom}}(F,\underline{H}^{q-1}_Y(G)) = 0$; on remarque alors que :

$$\operatorname{Supp} \underline{H}^{q-1}_Y(G) \subset Y = Z \cap S \subset S = \operatorname{Supp} F \ ,$$

et on applique le lemme suivant :

Lemme 1.3. Soit X un préschéma, soit P un $\underline{O}_X$-Module cohérent, et soit H un $\underline{O}_X$-Module quasi-cohérents tels que :

$$\underline{\mathrm{Hom}}(P,H) = 0 \text{ et } \operatorname{Supp} P \supset \operatorname{Supp} H \ .$$

Alors $H = 0$.

Il suffit de démontrer le lemme quand X est affine, car les ouverts affines forment une base de la topologie de X et les hypothèses se conservent par restriction à un ouvert. Or, dans ce cas, on est ramené à un problème sur les A-modules, où $X = \mathrm{Spec}(A)$. On applique la formule (valable sous la seule hypothèse que M est de type fini) :

$$\mathrm{Ass}\ \mathrm{Hom}_A(P,H) = \mathrm{Supp}\ P \cap \mathrm{Ass}\ H \ ;$$

On sait que $\mathrm{Ass}\ H \subset \mathrm{Supp}\ H \subset \mathrm{Supp}\ P$ et que $\mathrm{Ass}\ \mathrm{Hom}_A(P,H) = \emptyset$; donc $\mathrm{Ass}\ H = \emptyset$, donc $H = 0$.

Pour terminer la démonstration de la proposition, il reste à remarquer que (iv) permet d'appliquer (1.1).

<u>Corollaire</u> 1.4. <u>Soit</u> G <u>un</u> $\underline{O}_X$<u>-Module cohérent et de</u> COHEN-MACAULAY, <u>soit</u> $n \in \underline{\underline{Z}}$. <u>Les conditions de</u> (1.2) <u>équivalent à</u> :

(v) $\qquad \mathrm{codim}(Y \cap \mathrm{Supp}\ G\ ,\ \mathrm{Supp}\ G) \geqslant n$.

Rappelons d'abord qu'un $\underline{O}_X$-Module est dit de COHEN-MACAULAY si, pour tout $x \in X$, la fibre G_x est un $\underline{O}_{X,x}$-module de COHEN-MACAULAY, i.e. on a, pour tout $x \in S = \mathrm{Supp}\ G$:

(1.2) $\qquad \mathrm{prof}\ G_x = \dim G_x = \dim \underline{O}_{S,x}$.

D'après la (III 3.3), la condition (i) de (1.2) est équivalente à :

(1.3) $\qquad \mathrm{prof}_Y\ G = \inf\limits_{x \in Y} \ \mathrm{prof}\ G_x \geqslant n$,

donc aussi à :

$$\mathrm{prof}_Y\ G = \inf_{x \in Y \cap S} \ \mathrm{prof}\ G_x \geqslant n \ ;$$

car la profondeur d'un module nul est infinie.

Or, par définition :

$$\mathrm{codim}(Y \cap S,S) = \inf_{s \in S \cap Y} \ \dim \underline{O}_{S,x},$$

d'où la conclusion, en appliquant la formule (1.2).

Nous allons maintenant démontrer un résultat permettant de déduire les conditions de cohérence que nous avons en vue de certains critères de nullité.

Lemme 1.5. Soit X un préschéma localement noethérien. Soit T^* un ∂-foncteur contravariant exact, défini sur la catégorie des $\underline{O}_X$-Modules cohérents, à valeurs dans la catégorie des $\underline{O}_X$-Modules. Soit Y une partie fermée de X. Soit $i \in \underline{Z}$. Supposons que, pour tout $\underline{O}_X$-Module cohérent de support contenu dans Y, T^iF et $T^{i-1}F$ soient cohérents. Soit F un $\underline{O}_X$-Module cohérent. Pour que T^iF soit cohérent, il faut et il suffit que T^iF'' le soit, où l'on a posé :

$$F'' = F/\underline{\Gamma}_Y(F) .$$

En effet, $F' = \underline{\Gamma}_Y(F)$ est cohérent car X est localement noethérien; la suite exacte de cohomologie de T^* donne alors :

$$T^{i-1}F' \longrightarrow T^iF'' \longrightarrow T^iF \longrightarrow T^iF'$$

où les termes extrêmes sont cohérents, d'où la conclusion.

Lemme 1.6. Si F et G sont cohérents, et si Supp $F \subset Y$, $\underline{Ext}^i_Y(F,G)$ est cohérent.

En effet, $\underline{Ext}^i_Y(F,G)$ est isomorphe à $\underline{Ext}^i(F,G)$; ceci est valable sur tout espace annelé X , d'ailleurs: si Z est un fermé qui contient $Y \cap \mathrm{Supp}F$, $\underline{Ext}^i_Z(F,G)$ est isomorphe à $\underline{Ext}^i_Y(F,G)$ (cf. Exposé VI).

Proposition 1.7. Supposons F et G cohérents et posons Supp F = S, $S' = \overline{S \cap (X-Y)}$. Supposons que, pour tout $x \in Y \cap S'$, on ait prof $G_x \geqslant n$, alors $\underline{Ext}^i_Y(F,G)$ est cohérent pour $i < n$.

En effet, (1.6) permet d'appliquer (1.5) à $T^*(F) = \underline{Ext}^*_Y(F,G)$. En posant $F'' = F/\underline{\Gamma}_Y(F)$, on voit que Supp F'' = S', donc $T^iF'' = 0$ pour $i < n$, grâce à (1.2) et à (III 3.1), d'où la conclusion.

2. Etude pour $i > n$.

Soit X un préschéma localement noethérien régulier, c'est-à-dire dont tous les anneaux locaux sont réguliers. Soit Y une partie fermée de X . Soient F et G deux $\underline{O}_X$-Modules cohérents. Posons $S = \operatorname{Supp} F, S' = \overline{S \cap (X-Y)}$. Posons :

$$m = \sup_{x \in Y \cap S} \dim \underline{O}_{X,x} \quad ,$$

$$n = \sup_{x \in Y \cap S'} \dim \underline{O}_{X,x'} \quad ;$$

on a $n \leqslant m$.

Proposition 2.1. Dans la situation décrite ci-dessus, on a :

(1) $\underline{\mathrm{Ext}}^i_Y(F,G) = 0$ si $i > m$,

(2) $\underline{\mathrm{Ext}}^i_Y(F,G)$ est cohérent si $i > n$.

Remarquons d'abord que $\underline{\mathrm{Ext}}^i_Y(F,G)$ est cohérent pour tout i lorsque $\operatorname{Supp} F \subset Y$. De plus, en posant comme ci-dessus $F'' = F/\underline{\Gamma}_Y(F)$, on voit que $\operatorname{Supp} F'' = S'$, donc (2) résulte de (1) et de (1.3).

Pour démontrer (1), on remarque d'abord que

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_Y(F,G) \approx \varinjlim_k \underline{\mathrm{Ext}}^i(F/\mathcal{J}^k.F,G) \ ,$$

où $\mathcal{J}$ est l'idéal de définition de Y . Par ailleurs, il résulte du théorème 4.2.2. de (A. GROTHENDIECK, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Mathematical Journal 1957) que les $\underline{\mathrm{Ext}}$ commutent à la formation des fibres, du moins lorsque X est un préschéma localement noethérien et lorsque le premier argument est cohérent; comme il en est de même des limites inductives, on trouve des isomorphismes :

$$(\underline{\mathrm{Ext}}^i_Y(F,G))_x \approx \varinjlim_k \mathrm{Ext}_{\underline{O}_{X,x}} \left((F/\mathcal{J}^k F)_x, G_x \right)$$

pour tout $x \in X$. Comme $\operatorname{Supp} \underline{\mathrm{Ext}}^i_Y(F,G) \subset S \cap Y$, il suffit, pour conclure, de remarquer que $x \in Y \cap S$ entraîne $\dim \underline{O}_{X,x} \leq m$, donc :

$$\mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_{X,x}}((F/\mathfrak{I}^k.F)_x, G_x) = 0 \quad \text{si} \quad i > m ,$$

car la dimension cohomologique globale d'un anneau local régulier est égale à sa dimension (*).

Soit X un préschéma loc. noethérien; pour toute partie P de X, posons :

$$D(P) = \left\{ \dim \underline{O}_{X,p} \mid p \in P \right\} .$$

Lemme 2.2. Si P est l'espace sous-jacent d'un sous-préschéma connexe de A, D(P) est un intervalle.

En effet, soient a et b appartenant à D(P), correspondant à des points p et q de P. Montrons qu'il existe une suite de points de P: $(p = p_1, \ldots, p_n = q)$ telle que, pour $1 \leq i < n$, on ait $\left| \dim \underline{O}_{X,p_i} - \dim \underline{O}_{X,p_{i+1}} \right| = 1$; il en résultera que D(P) contient l'intervalle $[p,q]$. Pour cela, on remarque que p et q peuvent être joints par une suite de composantes irréductibles de P, telle que deux composantes successives se coupent. On est ramené au cas où p est le point générique d'une composante irréductible Q de P, et où $q \in Q$ et donc $q \supset p$, en tant qu'idéaux de $\underline{O}_q$, où c'est trivial sur la définition de la dimension.

Proposition 2.3. Soient X un préschéma localement noethérien régulier, Y une partie fermée de X et F un $\underline{O}_X$-Module cohérent. Soit $P = Y \cap \mathrm{Supp}\, F \cap (X-Y)$. Soit $n \in \underline{\underline{Z}}$, et supposons que $n \notin D(P)$. Alors $\underline{\mathrm{Ext}}^n_Y(F, \underline{O}_X)$ est cohérent.

La conclusion est locale et les hypothèses se conservent par restriction à un ouvert. Or P est fermé donc localement noethérien, donc localement connexe; on peut donc supposer X affine et noethérien, et P connexe. Posons $D(P) = [a,b[$, ce qui est licite d'après le lemme précédent; si $n > b$, on conclut par (2.1) ; si $n < a$, on a $n < \dim \underline{O}_{X,x} = \mathrm{prof}\, \underline{O}_{X,x}$ pour tout $x \in P$, et on conclut par (1.7).

(*) Cf. EGA 0_{IV} 17.3.1.

Exposé VIII

LE THEOREME DE FINITUDE

1. Une suite spectrale de bidualité (*).

Enonçons le résultat auquel nous désirons parvenir :

Proposition 1.1. Soit A un anneau noethérien et soit I un idéal de A. Posons $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $Y = V(I)$. Soit M un A-module de type fini et de dimension projective finie. Soit $F = M^{\sim}$ le $\underline{O}_X$-Module associé à M.

1) Il existe une suite spectrale :

$$H_Y(X,F) \Longleftarrow \mathrm{Ext}_Y^p(\mathrm{Ext}^{-q}(M,A),A) \quad .$$

2) Il existe une suite spectrale :

$$\underline{H}_Y(F) \Longleftarrow \underline{\mathrm{Ext}}_Y^p(\underline{\mathrm{Ext}}^{-q}(F,\underline{O}_X),\underline{O}_X) \quad .$$

Bien entendu, 2) se déduit de 1) en remarquant que, si M et N sont deux A-modules de type fini et si l'on pose $F = M^{\sim}$ et $G = N^{\sim}$, on a des isomorphismes :

$$\underline{H}_Y(F) \approx (H_Y(X,F))^{\sim} \quad ,$$
$$\underline{\mathrm{Ext}}_Y(F,G) \approx (\mathrm{Ext}_Y(F,G))^{\sim} \quad ,$$
$$\underline{\mathrm{Ext}}_{\underline{O}_X}(F,G) \approx (\mathrm{Ext}_A(M,N))^{\sim} .$$

Soit $\underline{C}$ la catégorie des A-modules, et $\underline{Ab}$ celle des groupes abéliens. Soit $\underline{F}$ le foncteur :

$$\underline{F} : \underline{C} \longrightarrow \underline{Ab} \quad \text{défini par}$$
$$M \rightsquigarrow \Gamma_Y(M^{\sim}) \quad .$$

(*) Le lecteur au courant du langage des catégories dérivées de Verdier reconnaitra la suite spectrale associé à un *isomorphisme de bidualité*. Cf. SGA 6 I.

On sait depuis l'exposé II qu'il existe un isomorphisme de ∂-foncteurs :

$$H^*_Y(X, M^\sim) \approx R^*\underline{F}(M) .$$

De plus, soient Ext^*_Y les foncteurs dérivés droits en le deuxième argument de

$$\underline{F} \circ \mathrm{Hom} : \underline{C}^o \times \underline{C} \longrightarrow \underline{Ab} \quad .$$

On sait depuis l'exposé VI que l'on a un isomorphisme de ∂-foncteurs :

$$\mathrm{Ext}^*_Y(M,N) \simeq \mathrm{Ext}^*_Y(M^\sim, N^\sim) .$$

Retenons enfin le résultat suivant de l'exposé VI : si C est un A-module injectif et si N est un A-module de type fini, le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}(N^\sim, C^\sim) \approx \mathrm{Hom}(N,C)^\sim$ est flasque, donc $R^1F(\mathrm{Hom}(N,C)) = 0$.

Il nous reste à démontrer le résultat suivant :

Lemme 1.2. Soit A un anneau noethérien et soit $\underline{C}$ la catégorie des A-modules. Soit $\underline{F} : \underline{C} \longrightarrow \underline{Ab}$ un foncteur additif exact à gauche tel que, pour tout A-module N et tout A-module injectif C, on ait $R^1F(\mathrm{Hom}(N,C)) = 0$. Soit M un A-module de type fini et de dimension projective finie. Il existe une suite spectrale :

$$R^*\underline{F}(M) \Longleftarrow \mathrm{Ext}^p_{\underline{F}}(\mathrm{Ext}^{-q}(M,A),A) ,$$

où $\mathrm{Ext}^p_{\underline{F}}$ désigne le p-ième foncteur dérivé droit de $\underline{F} \cdot \mathrm{Hom}$.

Nous ne considèrerons que des complexes dont la différentielle est de degré + 1 . D'après l'hypothèse faite sur M , il existe une résolution libre de M de longeur finie :

$$u : L^\cdot \longrightarrow M ,$$

où, de plus, les L^p sont des modules de type fini et $L^p = 0$ si $p \notin [-n, 0]$. Soit par ailleurs $v : M \longrightarrow I^\cdot$ une résolution injective de M .

Je dis que

(1.1) $v \cdot u : L^{\bullet} \longrightarrow I^{\bullet}$

est une résolution injective de $L^{\bullet}$. Il convient de préciser ce que cela signifie.

Définition 1.3. Soit $X^{\bullet}$ un complexe de A-modules; on appelle résolution injective de $X^{\bullet}$ un homomorphisme de complexes :

$$x : X^{\bullet} \longrightarrow CX^{\bullet} ,$$

tel que CX^p soit injectif pour tout $p \in \underline{\underline{Z}}$, et que x induise un isomorphisme en homologie.

Proposition 1.4. Tout complexe limité à gauche, i.e. tel qu'il existe $q \in \underline{\underline{Z}}$ avec $X^p = 0$ pour $p < q$, admet une résolution injective. De plus, si $u : X^{\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet}$ est un homomorphisme de complexes (limités à gauche) et si $x : X^{\bullet} \longrightarrow CX^{\bullet}$ et $y : Y^{\bullet} \longrightarrow CY^{\bullet}$ sont des résolutions injectives de $X^{\bullet}$ et $Y^{\bullet}$, il existe un homomorphisme de complexes :

$$Cu : CX^{\bullet} \longrightarrow CY^{\bullet} ,$$

unique à homotopie près, tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X^{\bullet} \arrow[r, "x"] \arrow[d, "u"'] & CX^{\bullet} \arrow[d, "Cu"] \\ Y^{\bullet} \arrow[r, "y"] & CY^{\bullet} \end{tikzcd}$$

soit commutatif à homotopie près.

La démonstration est laissée au lecteur (*).

Rappelons une notation introduite dans l'exposé V .

(*) Cf. aussi H. Cartan - S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton University Press, 19

<u>Notation</u>. Soient $X^\bullet$ et $Y^\bullet$ deux complexes. On note $\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet,Y^\bullet)$ le <u>complexe simple</u> dont la composante de degré n est

$$(\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet,Y^\bullet))^n = \prod_{-p+q=n} \mathrm{Hom}(X^p,Y^q) \ ,$$

notée aussi $\mathrm{Hom}^n(X^\bullet,Y^\bullet)$, et dont la différentielle est donnée par :

$$\partial_n : \mathrm{Hom}^n(X^\bullet,Y^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{n+1}(X^\bullet,Y^\bullet)$$

$$\partial_n = d' + (-1)^{n+1}d'' \ ,$$

où d' et d'' sont les différentielles (de degré + 1) induites par celles de $X^\bullet$ et de $Y^\bullet$.

Soit alors $A^\bullet$ le complexe défini par $A^p = 0$ si $p \neq 0$ et $A^0 = A$. Soit

$$a : A^\bullet \longrightarrow CA^\bullet$$

une résolution injective de $A^\bullet$. Considérons le double complexe :

(1.2) $$Q^{p,q} = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(L^q,A),CA^p) \ .$$

La première suite spectrale du bicomplexe $\underline{F}Q^{\bullet\bullet}$ donnera la conclusion du lemme 1.2.

Posons

(1.3) $$L'^\bullet = \mathrm{Hom}^\bullet(L^\bullet,A^\bullet) \ ,$$

et

(1.4) $$P^\bullet = \mathrm{Hom}^\bullet(L'^\bullet,CA^\bullet) \ .$$

On voit facilement que $P^\bullet$ est le complexe simple associé à $Q^{\bullet\bullet}$. Calculons l'aboutissement de la suite spectrale i.e. l'homologie de $\underline{F}P^\bullet$. Pour cela, utilisant le fait que $L^\bullet$ est libre de type fini en toute dimension, on prouve que $L^\bullet$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}^\bullet(L'^\bullet,A^\bullet)$. De l'homomorphisme

$a : A^{\bullet} \longrightarrow CA^{\bullet}$, on déduit un homomorphisme :

$$b: \mathrm{Hom}^{\bullet}(L'^{\bullet},A^{\bullet}) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\bullet}(L'^{\bullet},CA^{\bullet}) ,$$

ou encore, un homomorphisme

$$(1.5) \qquad c: L^{\bullet} \longrightarrow P^{\bullet} .$$

Ceci dit, il est facile de voir, en utilisant le fait que $L'^{\bullet}$ est libre de type fini en toute dimension et limité à gauche, que (1.5) est une résolution injective de $L^{\bullet}$. Utilisant la proposition 1.4., on en conclut que $P^{\bullet}$ est homotopiquement équivalent à $I^{\bullet}$, où $I^{\bullet}$ est la résolution injective de M introduite plus haut (1.1). On en déduit que l'<u>aboutissement</u> de la première suite spectrale du double complexe $\underline{F}Q^{\bullet\bullet}$, qui est $H^*(\underline{F}P^{\bullet})$, <u>est isomorphe à</u> $R^*F(M)$.

Le terme initial de la première suite spectrale du bicomplexe $\underline{F}Q^{\bullet\bullet}$ est :

$$E_2^{p,q} = {}'H^p({}''H^q(\underline{F}Q^{\bullet\bullet})) .$$

Pour tout $p \in \underline{\underline{Z}}$, CA^p est injectif. D'après l'hypothèse faite sur $\underline{F}$, le foncteur :

$$N \rightsquigarrow \underline{F}\mathrm{Hom}(N,CA^p)$$

est exact. D'où l'on déduit des isomorphismes :

$$''H^q(\underline{F}\mathrm{Hom}(L'^{\bullet},CA^p)) \approx \underline{F}\mathrm{Hom}(H^q(L'^{\bullet}),CA^p) .$$

D'après la définition de $\mathrm{Ext}^*_{\underline{F}}$ comme foncteur dérivé de $\underline{F}^*\mathrm{Hom}$, on en déduit des isomorphismes :

$$E_2^{p,q} \approx \mathrm{Ext}^p_{\underline{F}}(H^q(L'^{\bullet}),A) .$$

Or $L'^{\bullet} = \mathrm{Hom}^{\bullet}(L^{\bullet},A^{\bullet})$, où $L^{\bullet}$ est une résolution libre de M d'où des isomorphismes :

$$\mathrm{Ext}^{-q}(M,A) \approx H^q(L'^{\bullet}) ,$$

ce qui donne la conclusion.

C.Q.F.D.

2. Le théorème de finitude .

Théorème 2.1. Soient X un préschéma localement noethérien, Y une partie fermée de X et F un $\underline{O}_X$-Module cohérent. Supposons que X soit localement immergeable dans un préschéma régulier (*).
Soit $i \in \underline{\underline{Z}}$. Supposons que :

a) pour tout $x \in U = X-Y$, on a
$$H^{i-c(x)}(F_x) = 0 ,$$

où l'on a posé :

$$(2.1) \qquad c(x) = \operatorname{codim}(\overline{\{x\}} \cap Y, \overline{\{x\}}) .$$

Alors :

b) $\underline{H}^i_Y(F)$ est cohérent .

Corollaire 2.2. Sous les hypothèses du théorème précédent, la condition a) est équivalente à :

c) pour tout $x \in U$ tel que $c(x) = 1$, on a $H^{i-1}(F_x) = 0$.

Corollaire 2.3. Soient X un préschéma localement noethérien et localement immergeable dans un préschéma régulier, Y une partie fermée de X, F un $\underline{O}_X$-Module cohérent, n un entier. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout $x \in U$, on a prof $F_x > n-c(x)$;

(ii) pour tout $x \in U$ tel que $c(x) = 1$, on a prof $F_x \geqslant n$;

(iii) pour tout $i \in \underline{\underline{Z}}$, $\underline{H}^i_Y(F)$ est cohérent si $i \leqslant n$.

Supposons ces résultats acquis lorsque X est le spectre d'un anneau noethérien régulier A et lorsque F est le faisceau associé à un A-module de dimension projective finie.

(*) Cette condition peut se généraliser en l'hypothèse d'existence localement sur X, d'un "complexe dualisant", au sens défini dans R. Hartshorne, Residues and duality (cité dans Exp. IV p.23).

Remarquons d'abord que, si $(X_j)_{j \in J}$ est un recouvrement ouvert de X, chacune des conditions ci-dessus est équivalente à la conjonction des conditions analogues obtenues en remplaçant X par X_j, Y par $Y_j = Y \cap X_j$ et F par F/X_j. En effet, seules les conditions faisant intervenir $c(x)$ peuvent faire une difficulté. Soit $x \in U$. Si $x \in X_j$, posons

$$c_j(x) = \operatorname{codim}(X_j \cap \overline{\{x\}} \cap Y, X_j \cap \overline{\{x\}}) ,$$

on a nécessairement $c_j(x) \geq c(x)$. Soit $y \in \overline{\{x\}} \cap Y$, qui "donne la codimension", i.e. tel que $c(x) = \dim \underline{O}_{\overline{\{x\}},y}$, soit X_j un ouvert du recouvrement tel que $y \in X_j$, alors $x \in X_j$, donc $c_j(x) = c(x)$, ce qui permet de conclure.

On choisit un recouvrement de X par des ouverts immergeables dans un préschéma régulier. Appliquant ce qui précède, on voit qu'on peut supposer X fermé dans un X' régulier. La réduction à X' est alors immédiate.

On peut donc supposer X régulier, et même affine en recouvrant X par des ouverts affines. Que l'on puisse supposer que $F = M^{\sim}$, où M est de dimension projective finie résultera du lemme suivant :

Lemme 2.4. Soit X un préschéma noethérien régulier. Soit F un $\underline{O}_X$-Module cohérent. La fonction qui à tout $x \in X$ associe la dimension projective de F_x est bornée supérieurement.

Soit en effet $x \in X$ et soit U un voisinage ouvert affine de x. Soit $L^{\bullet}$ une résolution projective du module $F(U)$, où les L^i sont de type fini. Par hypothèse, l'anneau $\underline{O}_{X,x}$ est régulier, donc la dimension projective de F_x est finie; soit d cet entier. Soit

$$K = \operatorname{Ker}(L^{d-1} \longrightarrow L^{d-2}) .$$

Le module K_x est libre, car d est la dimension projective de F_x ([M], Ch. VI. Prop. 2.1.). D'après (EGA 0_I 5.4.1 Errata), on en déduit que le $\underline{O}_U$-Module $K^{\sim}$ est libre sur un voisinage U' de $x, U' \subset U$. Choisissant

$f \in \underline{O}_X(U)$ tel que $D(f) \subset U'$, on a donc une résolution projective de M_f, $(M = F(U))$:

$$0 \longrightarrow K_f \longrightarrow (L^{d-1})_f \longrightarrow \dots \longrightarrow M_f \longrightarrow 0 \quad ,$$

ce qui prouve que la fonction étudiée est semi-continue supérieurement. Or X est quasi-compact, d'où la conclusion.

Nous supposons désormais X affine noethérien régulier et nous supposons que $F = M^{\sim}$, où M est un A-module de type fini, nécessairement de dimension projective finie. Nous procèderons en plusieurs étapes. Tout d'abord, nous trouvons une condition d), équivalente à a), et prouvons qu'elle équivaut également à c). Puis, à l'aide de la suite spectrale du numéro précédent, nous prouvons d) $\Longrightarrow$ b). Il reste alors à prouver que (iii) $\Longrightarrow$ (ii); en effet, (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) résulte immédiatement de a) $\Longleftrightarrow$ c) $\Longrightarrow$ b).

Soit $x \in U$, par hypothèse $\underline{O}_{X,x}$ est un anneau local régulier; en désignant par D le foncteur dualisant relatif à l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$, il résulte de (V 2.1) que :

$$DH^{i-c(x)}(F_x) \approx \operatorname{Ext}^{d(x)-i}_{\underline{O}_{X,x}}(F_x, \underline{O}_{X,x}) \;,$$

où l'on a posé :

$$(2.2) \qquad d(x) = \dim \underline{O}_{X,x} + c(x) = \dim \underline{O}_{X,x} + \operatorname{codim}(\overline{\{x\}} \cap Y, \overline{\{x\}}) \;.$$

Or X est noethérien et F cohérent, donc :

$$(2.3) \qquad DH^{i-c(x)}(F_x) \approx (\operatorname{Ext}^{d(x)-i}_{\underline{O}_X}(F, \underline{O}_X))_x .$$

De plus, pour qu'un module soit nul, il faut et il suffit que son dual le soit.

Pour tout $q \in \underline{\underline{Z}}$, posons :

$$(2.4)\qquad \begin{cases} S_q = \operatorname{Supp} \underline{\operatorname{Ext}}^q_{\underline{O}_X}(F,\underline{O}_X) \ , \\ S'_q = S_q \cap U, \quad (U = X-Y) \ , \\ Z_q = \overline{S'_q} \cap Y \ . \end{cases}$$

De la formule (2.3), il résulte que a) et c) sont respectivement équivalentes à

a') pour tout $q \in \underline{\underline{Z}}$ et tout $x \in S'_q$, on a $q+i \neq d(x)$.

c') pour tout $q \in \underline{\underline{Z}}$ et tout $x \in S'_q$, si $c(x) = 1$, on a $q+i \neq d(x)$.

Voici la condition d) promise plus haut :

d) pour tout $q \in \underline{\underline{Z}}$ et tout $y \in Z_q$, on a $q+i \neq \dim \underline{O}_{X,y}$.

Ces conditions sont équivalentes :

a') $\Longrightarrow$ c') pour mémoire.

d) $\Longrightarrow$ a') . En effet, soit $q \in \underline{\underline{Z}}$ et soit $x \in S'_q$; soit $y \in \overline{\{x\}} \cap Y$ qui "donne la codimension", i.e. tel que :

$$(2.5)\qquad \dim \underline{O}_{\overline{\{x\}},y} = \operatorname{codim}(\overline{\{x\}} \cap Y, \overline{\{x\}}) = c(x) \ .$$

Du fait que X est régulier en y, on déduit :

$$(2.6)\qquad \dim \underline{O}_{X,y} = d(x) \qquad (\text{cf. } (2.2)).$$

Mais $y \in \overline{\{x\}}$, donc $y \in Z_q$, d'où la conclusion.

c') $\Longrightarrow$ d) . Soit $q \in \underline{\underline{Z}}$ et soit $y \in Z_q$. Admettons provisoirement qu'il existe $x \in S'_q$ tel que :

$$\dim \underline{O}_{\overline{\{x\}},y} = 1 \ ;$$

(on dit aussi que x <u>suit</u> y). Il en résulte que $c(x) = 1$, car y "donne la codimension de $\overline{\{x\}} \cap Y$ dans $\overline{\{x\}}$ ", puisque $x \notin Y$. D'après c') on en tire

$$q+i \neq d(x) \ .$$

D'où la conclusion, si l'on remarque que $d(x) = \dim \underline{O}_{X,y}$ (2.6).
Le résultat admis s'exprime dans le lemme suivant :

<u>Lemme</u> 2.5. <u>Soit</u> X <u>un préschéma localement noethérien et soit</u> Y <u>une partie fermée de</u> X . <u>Posons</u> $U = X-Y$ <u>et supposons que</u> U <u>est dense dans</u> X . <u>Pour tout</u> $y \in Y$, <u>il existe</u> $x \in U$ "<u>qui le suit</u>", <u>i.e. tel que</u> :

$$y \in \overline{\{x\}} \quad \underline{\text{et}} \ \dim \underline{O}_{\overline{\{x\}},y} = 1 .$$

Nous avons appliqué le lemme en prenant pour X le préschéma $\overline{S'_q}$ et pour Y la partie $Y \cap \overline{S'_q}$.

<u>Démonstration</u> de 2.5. Il existe $x \in U$ tel que $y \in \overline{\{x\}}$; choisissons donc un $x \in U$ tel que $y \in \overline{\{x\}}$ et tel que $\dim \underline{O}_{\overline{\{x\}},y} = r$ soit minimal. Il faut prouver que $r = 1$. Puisque l'on a choisi x de telle sorte que tout $z \in \overline{\{x\}}$, $z \neq x$, soit dans Y, $\{x\}$ est ouvert dans $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{\overline{\{x\}},y})$. D'où la conclusion.

<u>La deuxième étape consiste à déduire</u> b) <u>de</u> d).
Posons $D(Z_q) = \{\dim \underline{O}_{X,y} \mid y \in Z_q\}$. D'après d), on sait que, pour tout $q \in \underline{\underline{Z}}$, on a $q+i \notin D(Z_q)$. On applique alors 2.2, et l'on voit que

$$\underline{\mathrm{Ext}}_Y^{q+i}(\underline{\mathrm{Ext}}^q(F,\underline{O}_X),\underline{O}_X) \text{ est cohérent.}$$

Le terme initial de la suite spectrale du numéro précédent est donné par :

$$E_2^{p,q} = \underline{\mathrm{Ext}}_Y^p(\underline{\mathrm{Ext}}^{-q}(F,\underline{O}_X),\underline{O}_X) .$$

On en déduit que $E_2^{p,q}$ est cohérent pour tout $p \in \underline{\underline{Z}}$ et tout $q \in \underline{\underline{Z}}$ tels que $p+q = i$. Or il n'y a qu'un nombre fini de couples (p,q) tels que $p+q = i$, et cette suite spectrale converge vers $\underline{H}_Y^*(F)$, d'où la conclusion.

<u>Il nous reste à prouver que</u> (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Notons :

$$i\colon U \longrightarrow X$$

l'immersion canonique de U dans X . Compte tenu de la suite exacte d'homologie du fermé Y (I, 2.11) on voit que (iii) <u>équivaut à</u> :

(iv) $R^i\, i_*(F|U)$ est cohérent pour $i < n$.

En effet, on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \underline{H}_Y^0(F) \longrightarrow F \longrightarrow i_*(F|U) \longrightarrow \underline{H}_Y^1(F) \longrightarrow 0 .$$

Or $\underline{H}_Y^0(F)$ est un sous-faisceau quasi-cohérent de F qui est cohérent, donc est cohérent. Donc $\underline{H}_Y^1(F)$ est cohérent si et seulement si $i_*(F|U)$ l'est. Par ailleurs, si $p > 0$, la suite exacte de cohomologie du fermé Y se réduit à des isomorphismes :

$$R^p i_*(F|U) \xrightarrow{\approx} \underline{H}_Y^{p+1}(F) .$$

Nous allons démontrer que (iv) $\Longrightarrow$ (ii). Pour cela, rappelons (ii) :

(ii) pour tout $x \in U$ tel que $c(x) = 1$, on a prof $F_x \geqslant n$.

Raisonnons par récurrence sur n .

Si $n = 0$, les deux conditions sont vides.

Si $n = 1$, on suppose que $i_*(F|U)$ est cohérent. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $x \in U$ tel que $c(x) = 1$ et prof $F_x = 0$, i.e. $x \in \mathrm{Ass}\, F_x$. Soit $y \in \overline{\{x\}} \cap Y$ tel que $\dim \underline{O}_{\overline{\{x\}},y} = 1$. Posons :

$$A = \underline{O}_{X,y} \quad \text{et} \quad X' = \mathrm{Spec}(A) .$$

Effectuons le changement de base $v : X' \longrightarrow X$, qui est plat.

$$(2.7) \qquad \begin{array}{ccc} U' = X' \times_X U & \xrightarrow{v'} & U \\ {\scriptstyle i'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ X' & \xrightarrow{v} & X \end{array} .$$

Le morphisme i est séparé (car c'est une immersion), et de type fini (car c'est une immersion ouverte et X est localement noethérien), le changement de base est plat donc (EGA III 1.4.15) on a un isomorphisme :

$$(2.8) \qquad v^*(i_*(F|U)) \approx i'_*(v'^*(F|U)) .$$

Notons $\underline{x}$ (resp. $\underline{y}$) l'idéal de A correspondant à x (resp. y).

Posons $G = v'^{*}(F|U)$; G est cohérent et $\underline{x} \in \mathrm{Ass}\ G$, donc il existe un monomorphisme $\underline{O}_{\overline{\{x\}}} \longrightarrow G$, et par suite $i'_{*}(\underline{O}_{\overline{\{x\}}}|U')$ est cohérent. D'après le choix de y, $\dim A/\underline{x} = 1$, et par suite le support de $\underline{O}_{\overline{\{x\}}}$ est réduit à $\overline{\{\underline{x}\}} = \{\underline{x}\} \cup \{\underline{y}\}$, car $\overline{\{\underline{x}\}} = \mathrm{Spec}(A/\underline{x})$ en tant que schéma. Il en résulte que

$$(\underline{O}_{\overline{\{x\}}}|U')(U') = \mathrm{Frac}\ (A/\underline{x}) ,$$

anneau des fractions de $A/\underline{x}$, et

$$i'_{*}(\underline{O}_{\overline{\{x\}}}\ |\ U')(X') = \mathrm{Frac}\ (A/\underline{x}) .$$

Mais Frac $(A/\underline{x})$ n'est pas un A-module de type fini car $\underline{x}$ est différent de l'idéal maximal de A . D'où une contradiction.

Supposons $n > 1$ et le résultat acquis pour les $n' < n$. Par l'hypothèse de récurrence, pour tout $x \in U$ tel que $c(x) = 1$, on a $x \notin \mathrm{Ass}\ F_x$. Soit un tel x, et soit $y \in \overline{\{x\}} \cap Y$ tel que x suive y, i.e. $\dim \underline{O}_{\overline{\{x\}},y} = 1$. On effectue le changement de base $v : \mathrm{Spec}\ (\underline{O}_{X,y}) \longrightarrow X$ en conservant les notations du diagramme (2.7). On trouve, en appliquant (EGA III 1.4.15), des isomorphismes :

$$v^{*}(R^{p}i_{*}(F|U) \simeq R^{p}i'_{*}(v'^{*}(F|U)), \quad p \in \underline{\underline{Z}} \quad .$$

<u>On se ramène ainsi au cas où</u> X <u>est le spectre d'un anneau local</u> A <u>dans lequel</u> x <u>est un idéal premier de dimension</u> 1, i.e. $\dim A/x = 1$. Posons alors $F' = \underline{\Gamma}_{Y}(F)$ et $F'' = F/F'$.
On voit que $F_x \simeq F''_x$ et que $y \notin \mathrm{Ass}\ F''$. Par ailleurs $F'|U = 0$ d'où, par la suite exacte des $R^{p}i_{*}$, des isomorphismes :

$$R^{p}i_{*}(F|U) \simeq R^{p}i_{*}(F''|U), \quad p \in Z \quad .$$

Puisque $n > 1$, on en déduit que ni x ni y n'appartiennent à Ass F'' . Or ce sont les seuls idéaux premiers de A qui contiennent x; il en résulte

(III, 2.1) qu'il existe un élément $g \in x$ qui est M-régulier, où l'on a posé $F = M^{\sim}, M = F(X)$. D'où une suite exacte :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{g'} M \longrightarrow N \longrightarrow 0 \quad ,$$

dans laquelle g' désigne l'homothétie de rapport g dans M. Par la suite exacte d'homologie, on voit que :

$$R^p i_*(N^{\sim}|U) \text{ est cohérent pour } p < n-1 \text{ ,}$$

donc, par l'hypothèse de récurrence, prof $(N^{\sim})_x \geqslant n-1$, donc prof $F_x \geqslant n$,

QED .

3. Applications.

On déduit de ces résultats une condition de cohérence pour les images directes supérieures d'un faisceau cohérent par un morphisme qui n'est pas propre.

Théorème 3.1. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de préschémas. Supposons que Y est localement noethérien et que f est propre. Supposons que X soit localement immergeable dans un préschéma régulier. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Soit U un ouvert de X et soit F un $\underline{O}_U$-Module cohérent. Supposons que, pour tout $x \in U$ tel que codim$(\overline{\{x\}} \cap (X-U), \overline{\{x\}}) = 1$, on ait prof $F_x \geqslant n$. Alors les $\underline{O}_Y$-Modules $R^p(f\circ g)_*(F)$ sont cohérents pour $p < n$, où g est l'immersion canonique de U dans X .

En effet, il existe une suite spectrale de LERAY dont l'aboutissement est $R^*(f\circ g)_*(F)$ et dont le terme initial est donné par :

$$E_2^{p,q} = R^p f_*(R^q g_*(F)) \text{ .}$$

Par ailleurs, il existe un $\underline{O}_X$-Module cohérent G tel que $G|U \simeq F$, (EGA I 9.4.3). Il résulte alors du paragraphe précédent que la condition (iv) est vérifiée, i.e. que $R^q g_*(G|U)$ est cohérent pour $q < n$. On applique alors le théorème de finitude de EGA III 3.2.1 à f et aux faisceaux $R^q g_*(F)$, et on trouve que $E_2^{p,q}$ est cohérent pour $q < n$, d'où la conclusion.

Proposition 3.2. Soit X un préschéma localement noethérien et localement immergeable dans un préschéma régulier. Soit U un ouvert de X et soit $i : U \longrightarrow X$ l'immersion canonique. Soit $n \in \underline{\underline{Z}}$. Soit enfin F un $\underline{O}_U$-Module cohérent et de COHEN-MACAULAY (sur U !). Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $R^p i_*(F)$ est cohérent pour $p < n$;

(b) pour toute composante irréductible S' de l'adhérence $\overline{S}$ du support S de F, on a :

$$\operatorname{codim}(S' \cap (X-U), S') > n .$$

Soit G un $\underline{O}_X$-Module cohérent tel que $G|U \simeq F$ (EGA I 9.4.3). Appliquant le corollaire 2.3. à G, on trouve que la condition (a) équivaut à (c) :

(c) pour tout $x \in S$, on a prof $F_x > n - c(x)$, avec

$$c(x) = \operatorname{codim}(\overline{\{x\}} \cap Y, \overline{\{x\}}) .$$

(a) $\Longrightarrow$ (b). En effet, soit S' une composante irréductible de $\overline{S}$ et soit s son point générique. Puisque F est de COHEN-MACAULAY, on a prof $F_s = \dim \underline{O}_{S,s} = 0$. De plus $\overline{\{s\}} = S'$, d'où la conclusion.

(b) $\Longrightarrow$ (a). Soit $x \in S$ et soit S' une composante irréductible de $\overline{S}$ telle que $x \in S'$. Soit s le point générique de S'. Puisque F est de COHEN-MACAULAY, on sait que :

$$\operatorname{prof} F_x = \dim \underline{O}_{\overline{\{s\}},x} .$$

Si $c(x) = +\infty$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, il existe $y \in Y \cap \overline{\{x\}}$, tel que :

$$c(x) = \dim \underline{O}_{\overline{\{x\}},y} \quad .$$

Or $\underline{O}_{X,y}$ est quotient d'un anneau local régulier par hypothèse, donc :

$$\dim \underline{O}_{\overline{\{s\}},y} = \dim \underline{O}_{\overline{\{s\}},x} + \dim \underline{O}_{\overline{\{x\}},y} > n \ .$$

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[M] H. Cartan- S. Eilenberg. Homological Algebra. Princeton University Press, 1956.

-:-:-:-:-

Exposé IX

GEOMETRIE ALGEBRIQUE ET GEOMETRIE FORMELLE

Le but de cet exposé est de généraliser au cas d'un morphisme qui n'est pas propre les théorèmes 3.4.2 et 4.1.5 de EGA III .

1. Le théorème de comparaison .

Soit $f: X \longrightarrow X'$ un morphisme de préschémas, séparé et de type fini. Supposons que X' soit localement noethérien. Soit Y' une partie fermée de X' et soit $Y \subset f^{-1}(Y')$. Soient $\hat{X}$ et $\hat{X}'$ les complétés formels de X et de X' le long de Y et de Y'. Soit $\hat{f}$ le morphisme déduit de f par passage aux complétés.

(1.1)
$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\ X' & \longleftarrow & Y' \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\ j\ } & X \\ {\scriptstyle \hat{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \hat{X}' & \xrightarrow{\ i\ } & X' \end{array} \quad .$$

On désigne par j (resp. i) l'homomorphisme de $\hat{X}$ dans X (resp. de $\hat{X}'$ dans X'). On sait que i et j sont plats.

Soit $\mathcal{J}'$ un idéal de définition de Y' et soit $\mathcal{J} = f^*(\mathcal{J}').\underline{O}_X$, c'est un idéal de définition de Y . On a donc :

(1.2)
$$\hat{X}' = (Y', \varprojlim_{k \in \underline{\underline{N}}} \underline{O}_{X'} / \mathcal{J}'^{k+1}) , \quad \hat{X} = (Y, \varprojlim_{k \in \underline{\underline{N}}} \underline{O}_X / \mathcal{J}^{k+1}) .$$

Pour tout $k \in \underline{\underline{N}}$, posons :

(1.3)
$$Y'_k = (Y', \underline{O}_{X'} / \mathcal{J}'^{k+1}) \quad , \qquad Y_k = (Y, \underline{O}_X / \mathcal{J}^{k+1}) .$$

Soit F un $\underline{O}_X$-Module cohérent. Pour tout $k \in \underline{\underline{N}}$, on pose :

(1.4)
$$F_k = F / \mathcal{J}^{k+1} F , \qquad \hat{F} = j^*(F) \simeq \varprojlim F_k \quad .$$

Si l'on pose :

$$(1.5)\qquad R^i f_*(F)^{\wedge} = \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} (R^i f_*(F)\hat{\otimes}_{\underline{O}_{X'}} \underline{O}_{Y'_k}) \ ,\ i \in \underline{\underline{Z}},$$

on a un homomorphisme naturel :

$$(1.6)\qquad r_i : i^*(R^i f_*(F)) \longrightarrow R^i f_*(F)^{\wedge},$$

qui est un <u>isomorphisme</u> lorsque $R^i f_*(F)$ est <u>cohérent</u> .

Ainsi qu'il est expliqué dans EGA III 4.1.1 , on a un diagramme commutatif :

$$(1.7)\qquad \begin{array}{ccc} i^*(R^i f_*(F)) & \xrightarrow{\rho_i} & R^i \hat{f}_*(\hat{F}) \\ \downarrow r_i & & \downarrow \psi_i \\ R^i f_*(F)^{\wedge} & \xrightarrow{\varphi_i} & \varprojlim_{k\in\underline{\underline{N}}} R^i f_*(F_k) \end{array} \quad .$$

Dans loc. cit. on trouve un diagramme commutatif, car on sait que $R^i f_*(F)$ est cohérent, et l'on identifie la source et le but de (1.6). Dans notre cas, $R^i f_*(F)$ ne sera cohérent que pour certaines valeurs de i , pour lesquelles on étudiera (1.7).

Considérons l'anneau gradué :

$$(1.8)\qquad \mathcal{S} = \coprod_{k\in\underline{\underline{N}}} \mathcal{J}'^k ,$$

et le $\mathcal{S}$ -Module gradué :

$$(1.9)\qquad \mathcal{H}^i = \coprod_{k\in\underline{\underline{N}}} R^i f_*(\mathcal{J}^k F),\quad i \in \underline{\underline{Z}} ,$$

dont la structure de $\mathcal{S}$ -Module est définie comme suit .

Le faisceau $R^i f_*(\mathcal{J}^k F)$ est associé au préfaisceau qui, à tout ouvert affine U de X', associe :

(1.10) $$H^i(f^{-1}(U), \mathcal{J}^k F | f^{-1}(U)) .$$

Soit donc U' un ouvert affine de X', posons

$$U = f^{-1}(U') ,$$

et soit $x \in \mathcal{J}^m(U')$. Soit x' l'image de x dans $\mathcal{J}^k(U)$. L'homothétie de rapport x' dans $F|U'$ applique $\mathcal{J}^k F|U'$ dans $\mathcal{J}^{k+m} F|U'$, d'où, par fonctorialité, un morphisme :

(1.11) $$\mu^i_{x,k}(U) : \ H^i(U', \mathcal{J}^k F|U') \longrightarrow H^i(U', \mathcal{J}^{k+m} F|U') ,$$

défini pour tout $i \in \underline{\underline{Z}}$ et tout $k \in \underline{\underline{N}}$, qui donne, par passage au faisceau associé, la structure de $\mathcal{S}$-Module gradué de $\mathcal{H}^i$.

<u>Théorème</u> 1.1. <u>Soit</u> n <u>un entier</u>. <u>Supposons que le</u> $\mathcal{S}$-<u>Module gradué</u> $\mathcal{H}^i$ <u>soit de type fini pour</u> $i = n-1$ <u>et</u> $i = n$, <u>alors</u> :

(0) r_n <u>et</u> r_{n-1} <u>sont des isomorphismes et</u> $R^i\hat{f}_*(\hat{F})$ <u>est cohérent pour</u> $i = n-1$;

(1) <u>pour</u> $i = n-1$, ρ_i, φ_i <u>et</u> ψ_i <u>sont des isomorphismes topologiques (en particulier la filtration définie sur</u> $R^{n-1}f_*(F)$ <u>par les noyaux des homomorphismes</u>

(1.12) $$R^{n-1}f_*(F) \longrightarrow R^{n-1}f_*(F_k)$$

<u>est</u> $\mathcal{J}'$-<u>bonne</u>);

(2) <u>pour</u> $i = n$, ρ_i, φ_i et ψ_i <u>sont des monomorphismes, de plus la filtration de</u> $R^n f_*(F)$ <u>est</u> $\mathcal{J}'$-<u>bonne et</u> ψ_n <u>est un isomorphisme</u>;

(3) Le système projectif des $R^i f_*(F_k)$ vérifie, pour $i = n-2, n-1$, la condition de Mittag-Leffler uniforme, i.e. il existe un entier $k \geqslant 0$ fixe tel que, pour tout $p \geqslant 0$ et tout $p' \geqslant p+k$, on ait :

$$\mathrm{Im}\left[R^i f_*(F_{p'}) \longrightarrow R^i f_*(F_p)\right] = \mathrm{Im}\left[R^i f_*(F_{p+k}) \longrightarrow R^i f_*(F_p)\right] \quad .$$

En procédant comme dans EGA III 4.1.8 , il est facile de se ramener au cas où X' est le spectre d'un anneau noethérien A . Dans ce cas, on sait que

(1.13) $$R^i f_*(F) = \left[H^i(X,F)\right]^{\sim} \quad (\text{cf. } (1.10)) \; .$$

Soit I l'idéal de A tel que $\tilde{I} = \mathcal{J}'$ et soit

(1.14) $$S = \coprod_{k \in \mathbb{N}} I^k \; ,$$

(1.15) $$H^i = \coprod_{k \in \mathbb{N}} H^i(X, \mathcal{J}^k F) \qquad , \quad i \in \mathbb{Z} \; ,$$

où H^i est muni de la structure de S-Module gradué définie par (1.11), où l'on a pris $U = X'$.

La démonstration est calquée sur celle de EGA III 4.1.5 , donnons un résumé.

On travaille sur φ_i et ψ_i, auxquels correspondent des homomorphismes de modules :

(1.16)
$$\begin{array}{ccc} & & H^i(\hat{X},\hat{F}) \\ & & \Big\downarrow \psi_i \\ H^i(X,F)\hat{} & \xrightarrow{\quad \varphi_i \quad} & \varprojlim_k H^i(X,F_k) \end{array} \quad .$$

(a) On suppose seulement que H^i est un S-module gradué de type fini. On en déduit que <u>la filtration définie sur</u> $H^i(X,F)$ <u>par les modules</u> :

(1.17) $$R^i_k = \mathrm{Ker}(\, H^i(X,F) \longrightarrow H^i(X,F_k))$$

<u>est</u> I-<u>bonne</u>. On utilise pour cela la suite exacte de cohomologie :

(1.18) $$H^i(X, \mathcal{J}^{k+1}F) \longrightarrow H^i(X,F) \longrightarrow H^i(X,F_k) \ ,$$

qui prouve que <u>le</u> S-<u>module gradué</u> $\coprod_{k \in \underline{\underline{N}}} R^i_k$ est <u>quotient</u> du sous-S-module gradué

$$\coprod_{k \in \underline{\underline{N}}} H^i(X, \mathcal{J}^{k+1}F)$$

de H^i, donc <u>est de type fini</u>, car S est noethérien. D'où ce premier point.

Posons :

(1.19) $$M^i = H^i(X,F) \quad , \quad H^i_k = H^i(X,F_k) \ .$$

On a un diagramme commutatif :

(1.20) $$\begin{tikzcd} H^i(X,F)^\wedge \arrow[r, "s_i"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & \varprojlim_k (M^i/R^i_k) \arrow[d, "t_i"] \\ & \varprojlim_k H^i_k \end{tikzcd} ,$$

dans lequel s_i est un <u>isomorphisme</u>; en effet la filtration de $H^i(X,F)$ est I-bonne. De plus, t_i est un <u>monomorphisme</u>; en effet, le foncteur $\varprojlim$ est exact à gauche, et, pour tout $k \geqslant 0$, le morphisme naturel $M^i/R^i_k \longrightarrow H^i_k$ est un monomorphisme, par définition de R^i_k .

Pour étudier la surjectivité de t_i on introduit :

(1.21) $$Q^i_k = \mathrm{coker}(H^i(X,F) \longrightarrow H^i(X,F_k)) \ ,$$

d'où un système projectif de suites exactes :

(1.22) $$0 \longrightarrow R_k^i \longrightarrow M^i \longrightarrow H_k^i \longrightarrow Q_k^i \longrightarrow 0 .$$

En utilisant la suite exacte de cohomologie :

(1.23) $$H^i(X,F) \longrightarrow H^i(X,F_k) \longrightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{J}^{k+1}F) ,$$

on voit que le S-module gradué

(1.24) $$Q^i = \coprod_{k \in \underline{N}} Q_k^i$$

est un sous-S-module gradué de H^{i+1}. De plus, pour tout $k \geqslant 0$, on a :

(1.25) $$I^{k+1} Q_k^i = 0 ,$$

car Q_k^i est l'image de H_k^i.

(b) On suppose seulement que H^{i+1} est de type fini et l'on s'intéresse à t_i (en oubliant s_i). Puisque S est noethérien, Q^i est de type fini; en appliquant un lemme classique, on trouve qu'il existe un entier $r \geqslant 0$ et un entier $k_o \geqslant 0$ tels que

(1.26) $$I^r Q_k^i = 0 \qquad \text{pour } k \geqslant k_o .$$

Il en résulte que le système projectif $(Q_k^i)_{k \in \underline{N}}$ est essentiellement nul, donc que le système projectif $(H_k^i)_{k \in \underline{N}}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler uniforme. De la suite exacte (1.22.) on déduit la suite exacte

(1.27) $$0 \longrightarrow M^i/R_k^i \longrightarrow H_k^i \longrightarrow Q_k^i \longrightarrow 0 ,$$

d'où la suite exacte :

(1.28) $$0 \longrightarrow \varprojlim_k M^i/R_k^i \xrightarrow{t_i} \varprojlim_k H_k^i \longrightarrow \varprojlim_k Q_k^i .$$

Or le système projectif $(Q_k^i)_{k \in \underline{\underline{N}}}$ est essentiellement nul, donc t_i est un isomorphisme.

(c) Prouvons que, si H^i est de type fini, ψ_i est un isomorphisme. Il suffit d'appliquer EGA 0_{III} 13.3.1 en prenant pour base d'ouverts de X les ouverts affines. Ceci est licite; en effet, d'après (b), le système projectif $(H_k^{i-1})_{k \in \underline{\underline{N}}}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler.

Le théorème résulte formellement de (a), (b) et (c). On remarquera qu'en fait la démonstration n'utilise, à chaque pas, la finitude de H^i que pour une seule valeur de i.

Donnons quelques exemples où l'hypothèse du théorème 1.1 est vérifiée.

Corollaire 1.2. Supposons que $\mathcal{J}$ soit engendré par une section t' de $\underline{O}_{X'}$ et notons t la section correspondante de $\underline{O}_X$. Soit F un $\underline{O}_X$-Module cohérent et soit n un entier.

Supposons que :

(i) t soit F-régulier (i.e. l'homothétie $x \rightsquigarrow tx$ dans F est un monomorphisme).

(ii) $R^i f_*(F)$ soit cohérent pour $i = n-1$ et $i = n$.
Alors l'hypothèse du théorème 1.1. est vérifiée.

En effet, on remarque que $\mathcal{J}^k F \simeq F$ et on en déduit que

$$\mathcal{H}^i \simeq R^i f_*(F) \otimes_{\underline{O}_{X'}} \underline{O}_{X'}[T], \tag{1.29}$$

où T est une indéterminée. D'où la conclusion.

Corollaire 1.3. Supposons que $X' = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau noethérien séparé et complet pour la topologie I-adique. Supposons que le S-module H^i soit de type fini pour $i = n-1$ et $i = n$. (cf. (1.14.) et (1.15.)). Alors les hypothèses du théorème 1.1. sont vérifiées et on trouve un diagramme commutatif d'isomorphismes :

$$(1.30)\qquad \begin{tikzcd} H^i(X,F) \arrow[rr, "\rho'_i"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & H^i(\hat{X},\hat{F}) \arrow[dl, "\psi_i"] \\ & \varprojlim_k H^i(X,F_k) & \end{tikzcd}$$

pour $i = n-1$.

On note simplement que $H^i(X,F)$ est de type fini donc isomorphe à son complété. On obtient (1.30) en transcrivant dans la catégorie des A-modules le diagramme de Modules (1.7), et en remplaçant la verticale de gauche par $H^i(X,F)$.

Proposition 1.4. Soit A un anneau noethérien. Soit $t \in A$ et supposons que A soit séparé et complet pour la topologie (tA)-adique. Posons :

$$(1.31)\qquad X' = \mathrm{Spec}(A)\,, \qquad Y' = V(t)\,, \qquad I = (tA)\,.$$

Soit T une partie fermée de X', posons

$$(1.32)\qquad X = X'-T\,, \qquad Y = Y'\cap X = Y' -(Y'\cap T)\,.$$

Soit F un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent. Soit enfin

$$(1.33)\qquad T' = \left\{ x \in X' \;\middle|\; \mathrm{codim}(\overline{\{x\}}\cap T, \overline{\{x\}}) = 1 \right\}\,.$$

Supposons que :

a) t soit F-régulier,

b) $\mathrm{prof}_{T'}(F) \geqslant n+1$,

c) A soit quotient d'un anneau noethérien régulier.

Alors, dans le diagramme (1.30), les morphismes ρ'_i, φ'_i et ψ_i sont des isomorphismes pour $i < n$ et des monomorphismes pour $i = n$. De plus ψ_n est un isomorphisme.

En vertu de 1.3 et 1.2, il suffit de prouver que $R^i f_*(F)$ est cohérent pour $i \leqslant n$, ce qui résulte du théorème de finitude VIII 2.1 .

En particulier :

Exemple 1.5. On appliquera 1.4. lorsque A est un anneau local et que t appartient au radical $\underline{r}(A)$ de A. On prendra alors $T = \{\underline{r}(A)\}$. Dans ce cas, pour $n = 1$ on trouve l'énoncé suivant :

Si A est séparé et complet pour la topologie t-adique et quotient d'un anneau régulier (par exemple si A est complet), si de plus t est F-régulier et si $\operatorname{prof} F_x \geqslant 2$ pour tout $x \in \operatorname{Spec}(A)$ tel que $\dim A/x = 1$, alors l'homomorphisme naturel

$$\Gamma(X,F) \longrightarrow \Gamma(X,F)$$

est un isomorphisme.

En effet, conservant les notations de 1.4 , on a $T = \{\underline{r}(A)\}$ et la formule (1.33) dit que

$$T' = \left\{ x \in \operatorname{Spec}(A) \;\middle|\; \dim A/x = 1 \right\} .$$

2. Théorème d'existence.

Enonçons d'abord EGA III 3.4.2 sous une forme un peu plus générale.

Soit $f: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}'$ un morphisme adique (*)de préschémas formels, avec $\mathfrak{Y}'$ noethérien. Soit $\mathcal{J}'$ un idéal de définition de $\mathfrak{X}'$; puisque f est adique, $f^*(\mathcal{J}') = \mathcal{J}$ est un idéal de définition de $\mathfrak{X}$.

Pour tout $n \in \underline{\underline{N}}$, posons

$$(2.1) \qquad \mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \underline{O}_{\mathfrak{X}} / \mathcal{J}^{n+1}) ,$$

c'est un préschéma ordinaire qui a même espace topologique sous-jacent que $\mathfrak{X}$.

(*) Cette hypothèse n'est pas essentielle, cf. (XII, p.14).

Soit $\underline{F}$ un $\underline{O}_{\mathfrak{X}}$-Module cohérent. Pour tout $k \in \underline{\underline{N}}$, les $\underline{O}_{\mathfrak{X}_k}$-Modules

(2.2) $$F_k = \underline{F}/\mathcal{J}^{k+1}\underline{F}$$

sont cohérents. Pour tout i, on a un homomorphisme

(2.3) $$\varphi_i : R^i f_*(\underline{F}) \longrightarrow \varprojlim_k R^i f_*(F_k) ,$$

déduit par fonctorialité de l'homomorphisme naturel :

(2.4) $$\underline{F} \longrightarrow F_k .$$

Posons

(2.5) $$\underline{S} = gr_{\mathcal{J}'} \underline{O}_{\mathfrak{X}'} = \coprod_{k \in \underline{\underline{N}}} \mathcal{J}'^k/\mathcal{J}'^{k+1} ,$$

(2.6) $$gr_{\mathcal{J}'}(\underline{F}) = \coprod_{k \in \underline{\underline{N}}} \mathcal{J}'^k\underline{F}/\mathcal{J}'^{k+1}\underline{F} ,$$

(2.7) $$\underline{K}^i = R^i f_*(gr_{\mathcal{J}}(\underline{F})) = \coprod_{k \in \underline{\underline{N}}} R^i f_*(\mathcal{J}^k\underline{F}/\mathcal{J}^{k+1}\underline{F}) .$$

Il est clair que $\underline{K}^i$ est muni d'une structure de $\underline{S}$-Module gradué.

Théorème 2.1. Supposons que $\underline{K}^i$ soit un $\underline{S}$-Module gradué de type fini pour $i = n-1, i = n, i = n+1$, alors :

(i) $R^n f_*(\underline{F})$ est cohérent.

(ii) L'homomorphisme φ_n (2.3.) est un isomorphisme topologique. La filtration naturelle du deuxième membre de (2.3.) est $\mathcal{J}$-bonne.

(iii) Le système projectif des $R^n f_*(F_k)$ vérifie la condition de Mittag-Leffler uniforme.

La démonstration est très facile à partir de EGA 0_{III} 13.7.7 (cf.

EGA III 3.4.2), à condition de rectifier comme suit le texte page 78 (*) :

Supprimer

ligne 6 " et $(R^{n+1}T(A_k))_{k \in \mathbb{Z}}$ "

ligne 13 " et $p+q = n+1$ "

ligne 23 " et pour $n+1$ " .

Théorème 2.2. Soit A un anneau adique noethérien et soit I un idéal de définition de A . Soit T une partie fermée de $X' = \mathrm{Spec}(A)$. Supposons que I soit engendré par un $t \in A$. Reprenons les notations (1.31), (1.32) et (1.33). Soit $\underline{F}$ un $\underline{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent. Posons

$$(2.8) \qquad F_o = \underline{F}/\mathcal{J}\underline{F} ,$$

où $\mathcal{J} = t\,\underline{O}_{\hat{X}}$ est un idéal de définition de $\hat{X}$. Supposons que A soit quotient d'un anneau noethérien régulier et que :

(1) t soit $\underline{F}$-régulier,

(2) $\mathrm{prof}_{T'} \underline{F}_o \geq 2$.

Alors il existe un $\underline{O}_X$-Module cohérent F tel que $\hat{\underline{F}} \simeq \underline{F}$.

Il suffit de prouver que $\hat{f}_*(\underline{F})$ est un $\underline{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent, où $\hat{f}: \hat{X} \longrightarrow \hat{X}'$ est le morphisme de préschémas formels déduit de l'injection de X dans X' par complétion par rapport à t . En effet, A est séparé et complet pour la topologie t-adique, il existera donc un A-module F' dont le complété sera isomorphe à $\hat{f}_*(\underline{F})$. Puisque X est un ouvert de X', on pourra prendre $F = \widetilde{F'} \mid X$.

Il reste à montrer que 2.1. est applicable au morphisme de préschémas formels $\hat{f}$ et à $\underline{F}$. Or, d'après l'hypothèse (1), pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a un isomorphisme :

$$\mathcal{J}^k\underline{F}/\mathcal{J}^{k+1}\underline{F} \longrightarrow \underline{F}/\mathcal{J}\underline{F} ,$$

(*) Comme indiqué dans (EGA, Err_{III}24).

d'où il résulte que l'hypothèse de 2.1. sera vérifiée si l'on sait que

$$R^i f_*(F_o) \text{ est cohérent pour } i \leqslant 1 .$$

Or ceci résulte de (2) et du théorème de finitude VIII 2.1. D'où la conclusion.

Il reste à spécialiser cet énoncé en supposant que A est un anneau local.

Corollaire 2.3. Soit A un anneau local noethérien et soit $t \in \underline{r}(A)$, un élément du radical de A. Supposons que A soit séparé et complet pour la topologie t-adique, et, de plus, quotient d'un anneau régulier (par exemple, supposons que A soit un anneau local noethérien complet). Posons

(2.9) $X' = \mathrm{Spec}(A)$, $T = \{\underline{r}(A)\}$,

et reprenons les notations (1.31) , (1.32) et (1.33) . Soit F un $\underline{O}_{\hat{X}}$-Module . Supposons que :

(1) t soit F-régulier,

(2) $\mathrm{prof}_{T'} F_o \geqslant 2$, avec $F_o = F/\mathcal{J} F$ et $\mathcal{J} = t\underline{O}_{\hat{X}}$.

Alors il existe un $\underline{O}_X$-Module cohérent F tel que $\hat{F} \simeq F$.

Remarquons qu'ici T' est l'ensemble des idéaux premiers $\underline{p}$ de A tels que $\dim A/\underline{p} = 1$.

Exposé X

APPLICATION AU GROUPE FONDAMENTAL

Dans tout cet exposé, on désignera par X un préschéma localement noethérien, par Y une partie fermée de X, par U un voisinage ouvert variable de Y dans X et par $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y (EGA I 10.8). Pour tout préschéma Z, on désignera par $\underline{\mathrm{Et}}(Z)$ la catégorie des revêtements étales de Z, et par $\underline{\mathrm{LL}}(Z)$ la catégorie des Modules cohérents localement libres sur Z.

1. Comparaison de $\underline{\mathrm{Et}}(\hat{X})$ et de $\underline{\mathrm{Et}}(Y)$.

Soit $\mathcal{J}$ un Idéal de définition de Y dans X. Posons, pour tout $n \in \underline{\underline{N}}$, $Y_n = (Y, (\underline{O}_X/\mathcal{J}^{n+1}) | Y)$. Les Y_n forment un système inductif de préschémas usuels, ou aussi de préschémas formels, en munissant les faisceaux structuraux de la topologie discrète. On sait (EGA I 10.6.2) que $\hat{X}$ est limite inductive, dans la catégorie des préschémas formels, du système inductif des Y_n. On sait aussi (EGA I 10.13) que se donner un $\hat{X}$-préschéma formel de type fini R, c'est se donner un système inductif de Y_n-préschémas usuels R_n de type fini, tels que $R_n \simeq (R_{n+1}) \times_{(Y_{n+1})} (Y_n)$. De plus, pour que R soit un revêtement étale de $\hat{X}$, il est nécessaire et suffisant que pour tout n, R_n soit un revêtement étale de Y_n. Ceci dit, il est facile de voir que les éléments nilpotents ne comptent pas pour les revêtements étales (SGA I 8.3), c'est-à-dire que le foncteur changement de base :

$$\underline{\mathrm{Et}}(Y_{n+1}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Et}}(Y_n)$$

est une équivalence de catégories pour tout $n \in \underline{\underline{N}}$. Donc :

Proposition 1.1. Avec les notations introduites plus haut, le foncteur naturel $\underline{\mathrm{Et}}(\hat{X}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Et}}(Y)$ est une équivalence de catégories (cf. SGA I 8.4).

2 . Comparaison de $\underline{Et}(Y)$ et $\underline{Et}(U)$, pour U variable.

Nous allons introduire deux conditions desquelles le théorème de comparaison annoncé résultera facilement. Soit X un préschéma localement noethérien et soit Y une partie fermée de X . On dit que le couple (X,Y) vérifie la condition de LEFSCHETZ, ce qu'on écrit $\mathrm{Lef}(X,Y)$, si, pour tout ouvert U de X contenant Y et tout faisceau cohérent localement libre $\underline{E}$ sur U, l'homomorphisme naturel

$$\Gamma(U,E) \longrightarrow \Gamma(\hat{X},\hat{E})$$

est un isomorphisme.

On dit que le couple (X,Y) vérifie la condition de LEFSCHETZ effective, ce qu'on écrit $\mathrm{Leff}(X,Y)$, si on a $\mathrm{Lef}(X,Y)$ et si de plus, pour tout faisceau cohérent localement libre $\mathcal{E}$ sur $\hat{X}$, il existe un voisinage ouvert U de Y et un faisceau cohérent localement libre E sur U et un isomorphisme $\hat{E} \simeq \mathcal{E}$.

Ces conditions sont vérifiées dans deux exemples importants:

Exemple 2.1. Soit A un anneau local noethérien et soit $t \in \underline{r}(A)$ un élément A-régulier appartenant au radical $\underline{r}(A)$ de A . Supposons que A soit quotient d'un anneau local régulier et que A soit complet pour la topologie t-adique (par exemple A complet pour la topologie $\underline{r}(A)$-adique). Posons $X' = \mathrm{Spec}(A)$ et $Y' = V(t)$, par ailleurs posons $x = \underline{r}(A)$ et $X = X' - \{x\}$, $Y = Y' - \{x\}$. Donc X est ouvert dans X' et $Y = X \cap Y'$. Alors:

(i) Si, pour tout idéal premier $\underline{p}$ de A tel que $\dim A/\underline{p} = 1$ (i.e. pour tout point fermé de X) on a $\mathrm{prof}\, A_{\underline{p}} \geqslant 2$, alors on a $\mathrm{Lef}(X,Y)$;

(ii) si de plus, pour tout idéal premier $\underline{p}$ de A tel que $t \in \underline{p}$ et $\dim A/\underline{p} = 1$ (i.e. pour tout point fermé de Y), on a $\mathrm{prof}\, A_{\underline{p}} \geqslant 3$, alors on a $\mathrm{Leff}(X,Y)$.

Montrons d'abord que pour tout voisinage ouvert U de Y dans X, le complémentaire de U dans X est réunion d'un nombre fini de points fermés (dans X). Remarquons que U est ouvert dans X, donc dans X', donc $Z' = X' - U$ est fermé.

Soit I un idéal de définition de Z' ; il suffit de prouver que A/I est de dimension 1. Or $Z' \cap Y' = \{x\}$ donc $A/(I+(t))$ est artinien, d'où la conclusion grâce au " Hauptidealsatz " .

La première hypothèse équivaut à : "pour tout idéal premier $\underline{p}$ de A , $\underline{p} \neq \underline{r}(A)$, on a prof $A_{\underline{p}} \geqslant 3 - \dim A/\underline{p}$". En effet A est quotient d'un anneau régulier, on peut donc appliquer VIII 2.2 au préschéma X', à la partie fermée $\{x\}$ et au faisceau cohérent $\underline{O}_{X'}$.

Soit alors U un voisinage ouvert de Y dans X et E un $\underline{O}_U$-Module localement libre. Posons $Z = X - U$ et soit $u: U \longrightarrow X$ l'immersion canonique. On va d'abord prouver que $u_*(E)$ est un $\underline{O}_X$-Module cohérent, ou, ce qui revient au même, que $\underline{H}^i_Z(E')$ est cohérent pour $i = 0,1$, où E' est un prolongement cohérent de E à X . Pour cela on applique le théorème VIII 2.1 au préschéma X , à la partie fermée Z et au faisceau cohérent E'. Il suffit de vérifier que pour tout point $p \in U$ tel que $c(p) = 1$, on a prof $E'_p \geqslant 1$, où l'on a posé

$$c(p) = \operatorname{codim}(\overline{\{p\}} \cap Z, \ \overline{\{p\}}) .$$

Or si $p \in U$ et si $c(p) = 1$, notant $\underline{p}$ l'idéal de A correspondant à p , on voit que $\dim A/\underline{p} = 2$, car le complémentaire de U est réunion d'un nombre fini de points fermés et A est quotient d'un anneau régulier. De plus, E est localement libre, donc, pour tout $p \in \operatorname{Supp} E$, on a prof E_p = prof $\underline{O}_{U,p}$. Enfin, si $p \in U$ et si $c(p) = 1$, on a

$$\text{prof } E'_p = \text{prof } E_p = \text{prof } \underline{O}_{U,p} = \text{prof } A_{\underline{p}} \geqslant 3-2 = 1 .$$

Il nous faut maintenant prouver que l'homomorphisme naturel

$$\Gamma(U,E) \longrightarrow \Gamma(\hat{X},\hat{E}) \tag{1}$$

est un isomorphisme. Posant alors $\overline{E} = u_*(E)$, on note que $\overline{E}$ est cohérent et de profondeur $\geqslant 2$ en tous les points fermés de X . Il en résulte que $R^i f_*(\overline{E})$ est cohérent pour $i = 0,1$, où $f: X \rightarrow X'$ désigne l'immersion canonique de X dans $X' = \operatorname{Spec}(A)$ (Exp.VIII). On applique alors (IX 1.5) , et l'on conclut que

$$\Gamma(X,\bar{E}) \longrightarrow \Gamma(\hat{X},\hat{\bar{E}}) \tag{2}$$

est un isomorphisme, car A est complet pour la topologie t-adique.

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Gamma(X,\bar{E}) \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & \Gamma(U,E) \arrow[dl] \\ & \Gamma(\hat{X},\hat{E}) & \end{tikzcd},$$

d'où la conclusion.

Soit maintenant $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent localement libre sur $\hat{X}$. Si l'on a prouvé que $\mathcal{E}$ est algébrisable, i.e. est isomorphe au complété formel d'un $\underline{O}_X$-Module cohérent E, il est facile de voir que E est localement libre au voisinage de Y, donc de prouver Leff(X,Y). Soit $\hat{X}'$ le spectre formel de A pour la topologie t-adique, qui s'identifie au complété formel de X' le long de Y'. Désignons par f l'immersion canonique de X dans X', par f' l'immersion canonique de Y dans Y', et par $\hat{f}$ le morphisme déduit par passage aux complétés. Pour que $\mathcal{E}$ soit algébrisable il suffit que $\hat{f}_*(\mathcal{E})$ soit un $\underline{O}_{\hat{X}'}$-Module cohérent, car A est complet pour la topologie t-adique. Soit $\mathcal{J} = t\underline{O}_{\hat{X}}$, c'est un idéal de définition de $\hat{X}$.

Pour tout $n \geqslant 0$, posons $E_n = \mathcal{E}/\mathcal{J}^{n+1}$. En tout point fermé $y \in Y$, la profondeur de E_0 est $\geqslant 2$; en effet t est un élément A-régulier donc prof $\underline{O}_{Y_0,y}$ = prof $\underline{O}_{X,y} - 1 \geqslant 2$. On en conclut que $\hat{f}_*(\mathcal{E})$ est cohérent (IX 2.3).

C.Q.F.D.

Exemple 2.2. (Permettra de comparer le groupe fondamental d'une variété projective et d'une section hyperplane). Soit K un corps et soit X un K-préschéma propre. Soit $\underline{L}$ un $\underline{O}_X$-Module inversible ample. Soit $t \in \Gamma(X,\underline{L})$ un élément

$\underline{O}_X$-régulier, ce qui signifie que, pour tout ouvert U et tout isomorphisme $u : L\,U \longrightarrow \underline{O}_U$, $u(t)$ est non diviseur de zéro dans $\underline{O}_U$ (condition qui ne dépend pas de u). Soit $Y = V(t)$ **le sous-schéma** de X d'équation $t = 0$. Alors :

(i) Si, pour tout point x fermé dans X, on a prof $\underline{O}_{X,x} \geqslant 2$, on a $\mathrm{Lef}(X,Y)$;

(ii) si de plus, pour tout point fermé $y \in Y$, on a prof $\underline{O}_{X,x} \geqslant 3$, on a $\mathrm{Leff}(X,Y)$.

Cet exemple sera traité en détail dans Exp.XII.

Soit S un préschéma, on sait (EGA II 6.1.2) que le foncteur qui, à tout revêtement fini et plat $r:R \longrightarrow S$, associe la $\underline{O}_X$-Algèbre $r_*(\underline{O}_R)$, induit une équivalence entre la catégorie des revêtements finis et plats de S et la catégorie des $\underline{O}_X$-Algèbres cohérentes et localement libres. Soit U un voisinage ouvert de Y, et soit $r:R \longrightarrow U$ un revêtement fini et plat de U. Soit $\hat{R}$ le revêtement fini et plat de $\hat{X}$ qui s'en déduit par changement de base. On a $\hat{r}_*(\underline{O}_{\hat{R}}) \simeq \widehat{(r_*(\underline{O}_R))}$.

<u>Supposons alors</u> $\mathrm{Lef}(X,Y)$. Ceci entraîne que, pour tout U, le foncteur image inverse :

$$\underline{LL}(U) \longrightarrow LL(\hat{X})$$

est <u>pleinement fidèle</u>. En effet, soient E et F deux $\underline{O}_U$-Modules cohérents localement libres; $\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)$ est aussi cohérent et localement libre. Par hypothèse l'application naturelle

$$\Gamma_U(\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)) \longrightarrow \Gamma_{\hat{X}}\widehat{(\underline{\mathrm{Hom}}(E,F))}$$

est un isomorphisme, d'où la conclusion, car $\underline{\mathrm{Hom}}$ commute au ^ puisque tout est localement libre. Or le ^ commute au produit tensoriel, on en déduit que le foncteur qui à toute $\underline{O}_U$-Algèbre cohérente et localement libre $\underline{A}$ associe la $\underline{O}_{\hat{X}}$-Algèbre $\hat{\underline{A}}$, est pleinement fidèle. Mieux, si $\underline{E}$ est un $\underline{O}_U$-Module cohérent localement libre, il y a correspondance biunivoque entre les structures de $\underline{O}_U$-Algèbre commutative sur E et les structures de $\underline{O}_{\hat{X}}$-Algèbre commutative sur $\hat{E}$.

Proposition 2.3. *Soit X un préschéma localement noethérien et soit Y une partie fermée de X. Soit $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y. Pour tout ouvert U de $X, U \supset Y$, désignons par L_U (resp. P_U, resp. E_U) le foncteur qui à tout $\underline{O}_U$-Module cohérent localement libre (resp. à tout revêtement fini et plat de U, resp. à tout revêtement étale de U) associe son image inverse par $\hat{X} \longrightarrow X$.*

(i) *Si on a Lef(X,Y), alors pour tout voisinage ouvert U de Y, les fonteurs L_U, P_U et E_U sont pleinement fidèles.*

(ii) *Si on a Leff(X,Y), alors pour tout $\underline{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent localement libre $\mathcal{E}$ (resp.....), il existe un ouvert U et un $\underline{O}_U$-Module cohérent localement libre E (resp....), tel que $L_U(E) \simeq \mathcal{E}$ (resp...).*

(i) A été vu.

(ii) Résulte de (i) et de l'hypothèse, du moins pour L_U et P_U. De plus si R est un revêtement étale de $\hat{X}$, il existe un voisinage ouvert U de Y dans X et un revêtement fini et plat R' de U tel que $\widehat{R'} \simeq R$. On en déduit un revêtement R'' de Y qui est étale d'après 1.1 , donc R' est étale dans un voisinage U' de Y.

C.Q.F.D.

Corollaire 2.4. *Si on a Lef(X,Y), pour qu'un revêtement fini et plat R d'un voisinage ouvert U de Y soit connexe, il faut et il suffit que $R \times_U \hat{X}$ le soit. En particulier, pour que Y soit connexe, il faut et il suffit que le voisinage ouvert U de Y le soit, ou encore que X le soit.*

En effet, pour qu'un espace annelé en anneaux locaux $(X, \underline{O}_X)$ soit connexe, il faut et il suffit que $\Gamma(X, \underline{O}_X)$ ne soit pas composé direct de deux anneaux non nuls. Or on a

$$\Gamma(U, r_*(\underline{O}_R)) \simeq \Gamma(\hat{X}, \hat{r}_*(\underline{O}_{\hat{R}}))$$

par Lef(X,Y) .

Corollaire 2.5. Si on a Lef(X,Y), alors pour tout U, le foncteur

$$\underline{Et}(U) \longrightarrow \underline{Et}(Y)$$

est pleinement fidèle. Si on a Leff(X,Y), alors pour tout revêtement étale R de Y, il existe un voisinage ouvert U de Y et un revêtement R' de U tel que $R' \times_U Y \simeq R$.

Corollaire 2.6. Si on a Lef(X,Y) et si Y est connexe, tout voisinage ouvert U de Y est connexe et l'homomorphisme naturel $\pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(U)$ est surjectif. Si de plus on a Leff(X,Y), l'homomorphisme naturel

$$\pi_1(Y) \longrightarrow \varprojlim_{U} \pi_1(U)$$

est un isomorphisme. (N.B. On suppose choisi un "point-base" dans Y , qu'on prend aussi pour point-base dans X , pour la définition des groupes fondamentaux.)

Tout ceci résulte trivialement de la prop. 1.1. et de la prop. 2.3.

3. Comparaison de $\pi_1(X)$ et de $\pi_1(U)$.

Définition 3.1. Soit X un préschéma et Z une partie fermée de X . Posons U = X-Z . On dit que le couple (X,Z) est pur si, pour tout ouvert V de X , le foncteur

$$\begin{aligned} \underline{Et}(V) &\longrightarrow \underline{Et}(V \cap U) \\ V' &\rightsquigarrow V' \times_V (V \cap U) \end{aligned}$$

est une équivalence de catégories (*).

(*) Pour une notion plus satisfaisante à certains égards, cf. le commentaire XIV 1.6 d).

Définition 3.2. Soit A un anneau local noethérien. Posons $X = \mathrm{Spec}(A)$. Soit $\underline{r}(A)$ le radical de A et soit $x = \underline{r}(A)$ le point fermé de X. On dit que A est pur si le couple $(X,\{x\})$ l'est.

Nous laissons au lecteur le soin de ne pas démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.3. Soit X un préschéma localement noethérien et soit Z une partie fermée de X. Pour que le couple (X,Z) soit pur il est nécessaire et suffisant que, pour tout $z \in Z$, l'anneau $\underline{O}_{X,z}$ soit pur (*).

Ceci dit le théorème suivant est le résultat essentiel de ce numéro :

Théorème 3.4. (Théorème de pureté).

(i) Un anneau local noethérien régulier de dimension $\geqslant 2$ est pur (théorème de pureté de Zariski-Nagata).

(ii) Un anneau local noethérien de dimension $\geqslant 3$ qui est une intersection complète est pur.

Rappelons qu'on dit qu'un anneau local est une intersection complète s'il existe un anneau local noethérien régulier B et une suite $(t_1,\dots,t_k)$ B-régulière d'éléments du radical $\underline{r}(B)$ de B tels que

$$A \simeq B/(t_1,\dots,t_k) .$$

A ce propos remarquons qu'il serait moins ambigu de dire que A est une intersection complète absolue, par opposition à la situation, que nous avons déjà rencontrée, où X est un préschéma localement noethérien (qui n'a pas besoin d'être régulier) et où Y est une partie fermée de X, dont on dit qu'elle est "localement ensemblistement une intersection complète dans X".

Prouvons d'abord quelques lemmes.

(*) Comparer le cas non commutatif de XIV 1.8, dont la démonstration est essentiellement la même que celle de 3.3.

Lemme 3.5. Soit X un préschéma localement noethérien et soit U une partie ouverte de X. Posons $Z = X-U$. Soit $i : U \longrightarrow X$ l'immersion canonique de U dans X. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout ouvert V de X, si on pose $V' = V \cap U$, le foncteur $F \rightsquigarrow F|V'$ de la catégorie des $\underline{O}_V$-Modules cohérents localement libres dans la catégorie des $\underline{O}_{V'}$-Modules cohérents localement libres est pleinement fidèle;

(ii) l'homomorphisme naturel $\underline{O}_X \longrightarrow i_*(\underline{O}_U)$ est un isomorphisme;

(iii) pour tout $z \in Z$, on a $\operatorname{prof} \underline{O}_{X,z} \geqslant 2$.

On a déjà vu (III 3.3) l'équivalence de (ii) et (iii). Montrons que (ii) entraîne (i). Soient F et G deux $\underline{O}_V$-Modules cohérents localement libres, $\underline{Hom}(F,G)$ l'est aussi, donc $\underline{Hom}(F,G) \longrightarrow i_*(\underline{Hom}(F|V',G|V'))$ est un isomorphisme donc $\operatorname{Hom}(F,G) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(F|V',G|V')$. Inversement on prend $F = G = \underline{O}_X$ et on applique (i) à tout ouvert V de X.

Voici un "lemme de descente" utile :

Lemme 3.6. Soit X un préschéma localement noethérien et soit Z une partie fermée de X. Posons $U = X-Z$. Supposons que l'homomorphisme $\underline{O}_X \longrightarrow i_*(\underline{O}_U)$ soit un isomorphisme. Soit $f : X_1 \longrightarrow X$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact. Posons $Z_1 = f^{-1}(Z)$. Si le couple (X_1, Z_1) est pur, il en est de même de (X,Z).

Remarquons que l'hypothèse $\underline{O}_X \xrightarrow{\sim} i_*(\underline{O}_U)$ se conserve par extension plate de la base, car i est un morphisme quasi compact et, dans ce cas, l'image directe commute à l'image inverse. Or cette hypothèse entraîne que le foncteur

$$\underline{Et}(V) \longrightarrow \underline{Et}(U \cap V)$$

défini par

$$V' \rightsquigarrow V' \times_V (V \cap U)$$

est pleinement fidèle, comme le montre l'interprétation d'un revêtement étale en termes d'Algèbre cohérente localement libre. Il reste à prouver l'effectivité. On peut par exemple introduire le carré X_2 et le cube X_3 de X_1 sur X et on remarque qu'un morphisme fidèlement plat et quasi compact est un morphisme de descente effective universelle pour la catégorie fibrée des revêtements étales, au-dessus de la catégorie des préschémas. La conclusion est formelle à partir de là (*).

Remarque 3.7. On a prouvé chemin faisant que si $\underline{O}_X \longrightarrow i_*(\underline{O}_U)$ est un isomorphisme, X est connexe sss U l'est, et alors $\pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(X)$ est surjectif.

Corollaire 3.8. Soit A un anneau local noethérien. Supposons que prof $A \geqslant 2$. Alors si $\hat{A}$ est pur, A est pur.

Résulte du lemme 3.5. et du lemme 3.6.

Le lemme suivant est le point essentiel de la démonstration du théorème de pureté :

Lemme 3.9. Soit A un anneau local noethérien et soit $t \in \underline{r}(A)$ un élément A-régulier. Supposons que A soit complet pour la topologie t-adique et de plus quotient d'un anneau local régulier (par exemple A complet). Posons $B = A/tA$.

(i) Si pour tout idéal premier $\underline{p}$ de A tel que dim $A/\underline{p} = 1$, on a prof $A_{\underline{p}} \geqslant 2$, alors B pur entraîne A pur.

(ii) Si pour tout idéal premier $\underline{p}$ de A tel que dim $A/\underline{p}=1$, on a prof $A_{\underline{p}} \geqslant 2$, si $A_{\underline{p}}$ pur lorsque $t \notin \underline{p}$, et prof $A_{\underline{p}} \geqslant 3$ lorsque $t \in \underline{p}$, alors A pur entraîne B pur.

Soit $X' = \mathrm{Spec}(A)$ et soit $Y' = V(t)$, que l'on identifie au spectre de B. Soit $x = \underline{r}(A)$, et posons $X = X' - \{x\}$ et $Y = Y' - \{x\} = X \cap Y'$. Désignons par $\hat{X}'$ le spectre formel de A pour la topologie t-adique, qui s'identifie au complété formel de X' le long de Y'.

Puisque A est complet pour la topologie t-adique, on remarque que

(*) Cf. J. Giraud, Méthode de la descente, Mémoire n° 2 du Bulletin de la Société Mathématique de France (1964).

$\underline{\mathrm{Et}}(X') \longrightarrow \underline{\mathrm{Et}}(\hat{X}')$ est une équivalence de catégories. De même $\underline{\mathrm{Et}}(\hat{X}') \longrightarrow \underline{\mathrm{Et}}(Y')$ par la prop. 1.1, donc $\underline{\mathrm{Et}}(X') \longrightarrow \underline{\mathrm{Et}}(Y')$ est une équivalence de catégories.

Montrons (i). Considérons les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} X' & \longleftarrow & X \\ \uparrow & & \uparrow \\ Y' & \longleftarrow & Y \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Et}}(X') & \xrightarrow{a} & \underline{\mathrm{Et}}(X) \\ c\downarrow & & \downarrow b \\ \underline{\mathrm{Et}}(Y') & \xrightarrow{d} & \underline{\mathrm{Et}}(Y) \end{array}$$

On vient de voir que c est une équivalence, d l'est aussi d'après l'hypothèse que B est pur et enfin b est pleinement fidèle comme on l'a vu dans l'exemple 2.1., cf. 2.3. (i) .

Montrons (ii). Cette fois on suppose que A est pur donc a est une équivalence; de même c . Voyons que b est une équivalence. D'après l'exemple 2.1, on sait que l'on a $\mathrm{Leff}(X,Y)$, donc b est déjà pleinement fidèle, prouvons qu'il est essentiellement surjectif. On utilise 2.3. (ii) en notant que, si U est un voisinage ouvert de Y dans X , le complémentaire de U dans X est réunion d'un nombre fini de points fermés; le couple $(X, X-U)$ est donc pur d'après la prop.3.3 , car en un tel point $\underline{p}$, $\underline{O}_{X,\underline{p}} = A_{\underline{p}}$ est pur par hypothèse. D'où la conclusion.

<u>Démonstration du théorème de pureté</u>.

<u>Montrons d'abord</u> (i) <u>par récurrence sur la dimension</u>.

Soit A un anneau local noethérien régulier <u>de dimension 2</u>. Posons $X' = \mathrm{Spec}(A)$, $x = \underline{r}(A)$, $X = X' - \{x\}$. On a prof $A = 2$. On peut donc appliquer le lemme 3.5. au couple $(X', \{x\})$ et donc $\underline{\mathrm{Et}}(X') \longrightarrow \underline{\mathrm{Et}}(X)$ est pleinement fidèle. Soit maintenant $r : R \longrightarrow X$ un revêtement étale défini par une $\underline{O}_X$-Algèbre cohérente localement libre et étale $\underline{A} = r_*(\underline{O}_R)$. Désignons par $i : X \longrightarrow X'$ l'immersion canonique de X dans X'. Je dis que $i_*(\underline{A}) = \underline{B}$ est une $\underline{O}_{X'}$-Algèbre <u>cohérente.</u> En effet, il suffit d'appliquer le "théorème de finitude" VIII 2.3. Je dis que cette algèbre est de profondeur $\geqslant 2$ en x. En effet, c'est l'image directe d'un $\underline{O}_X$-Module, avec $X = X' - \{x\}$. Puisque A est un anneau <u>régulier</u> de dimension 2 on a : $\text{dp}\ \underline{B} + \text{prof}\ \underline{B} = \dim A = 2$, où $\text{dp}\ \underline{B}$ désigne la dimension projective de $\underline{B}$. Donc $\text{dp}\ B = 0$, donc $\underline{B}$ est projectif, donc libre. Il en résulte que $\underline{B}$ définit un revêtement fini et plat de $X' = \text{Spec}(A)$. L'ensemble des points de X' où ce revêtement n'est pas étale est une partie fermée de X' dont l'équation est un idéal principal : l'idéal discriminant de $\underline{B}/A$. Or, par construction, ce fermé est contenu dans $x = \underline{r}(A)$ donc est vide car $\dim A = 2$.

Soit A un anneau local noethérien régulier, $\dim A = n \geqslant 3$. Supposons (i) démontré pour les anneaux de dimension $< n$. Pour prouver que A est pur, on peut supposer A complet par 3.8. Soit $t \in \underline{r}(A)$ dont l'image dans $\underline{r}(A)/(\underline{r}(A))^2$ soit non nulle. Alors $B = A/tA$ est un anneau local noethérien <u>régulier</u> de dimension $n-1$ donc est pur, car $n-1 \geqslant 2$. On conclut par le lemme 3.9.(i), qui est applicable car A est complet.

<u>Montrons</u> (ii). Soit A un anneau local noethérien de dimension $\geqslant 3$. Supposons qu'il existe un anneau local noethérien <u>régulier</u> B et une B-suite $(t_1,\dots,t_k)$ tels que $A \simeq B/(t_1,\dots,t_k)$. Prouvons que A est pur, par récurrence sur k . Si $k = 0$, on le sait par (i). <u>Supposons</u> $k \geqslant 1$ <u>et le résultat acquis pour</u> $k' < k$. D'après le corollaire 3.9. on peut supposer que A (donc aussi B) est complet. Posons $C = B/(t_1,\dots,t_{k-1})$, donc $A \simeq C/t_k C$ et t_k est C-régulier. Par l'hypothèse de récurrence on sait que C est pur, il suffit de prouver que le lemme 3.9. (ii) est applicable. Notation: A et B du lemme deviennent C et A . On a $\dim C \geqslant 4$, donc pour tout idéal premier $\underline{p}$ de C tel que $\dim C/\underline{p} = 1$, on a $\text{prof}\ C_{\underline{p}} \geqslant 3$. De plus, $C_{\underline{p}}$ est une intersection complète avec $k' \leqslant k-1$, donc est pur par l'hypothèse de récurrence.

C.Q.F.D.

Théorème 3.10. Soit X un préschéma localement noethérien et soit Y une partie fermée de X. Supposons que l'on ait $\mathrm{Leff}(X,Y)$ (cf. Exemples 2.1. et 2.2). Supposons de plus que, pour tout voisinage ouvert U de Y et tout $x \in X-U$, l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ soit régulier de dimension $\geqslant 2$ ou bien une intersection complète de dimension $\geqslant 3$. Alors

$$\pi_0(Y) \longrightarrow \pi_0(X)$$

est une bijection, et si X est connexe

$$\pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(X)$$

est un isomorphisme.

Il n'y a plus rien à démontrer. On remarquera que, dans les deux exemples cités 2.1. et 2.2 , le complémentaire de U est réunion d'un nombre fini de points fermés, d'où il résulte que l'hypothèse sur la dimension de $\underline{O}_{X,x}$ n'est pas canularesque.

Exposé XI

APPLICATION AU GROUPE DE PICARD

Cet exposé est calqué sur le précédent, mais cette fois le résultat du n° 1 est moins fort.

Dans tout cet exposé, X désignera un préschéma localement noethérien, $\mathfrak{J}$ un idéal quasi-cohérent de $\underline{O}_X$, ($Y=V(\mathfrak{J})$ est donc une partie fermée de X), U un voisinage ouvert variable de Y dans X et $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y. Pour tout espace annelé $(Z,\underline{O}_Z)$ on désigne par $\underline{P}(Z)$ la catégorie des $\underline{O}_Z$-Modules inversibles, autrement dit localement libres de rang 1, et par $\mathrm{Pic}(Z)$ le groupe des classes à isomorphisme près de Modules inversibles sur Z.

1. Comparaison de $\mathrm{Pic}(\hat{X})$ et de $\mathrm{Pic}(Y)$.

Pour tout $n \in \underline{\underline{N}}$, posons $X_n = (Y, \underline{O}_X/\mathfrak{J}^{n+1})$ et $P_n = \mathfrak{J}^{n+1}/\mathfrak{J}^{n+2}$. La suite de faisceaux de groupes abéliens sur Y

$$(1.1) \qquad 0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{u} \underline{O}^*_{X_{n+1}} \xrightarrow{v} \underline{O}^*_{X_n} \longrightarrow 1$$

est exacte. Précisons que la structure de groupe de P_n est la structure additive, que $u(x) = 1+x$ pour tout $x \in P_n$, et que v est l'homomorphisme déduit de l'injection $\mathfrak{J}^{n+2} \longrightarrow \mathfrak{J}^{n+1}$. On voit que v est surjectif en remarquant que, pour tout $y \in Y, \underline{O}_{X_n,y}$ est un anneau local, quotient de $\underline{O}_{X_{n+1},y}$ par un idéal nilpotent; le reste est tout aussi trivial. On déduit de (1.1) une suite exacte de cohomologie :

$$(*) \quad H^1(Y,P_n) \xrightarrow{u^1} H^1(Y,\underline{O}^*_{X_{n+1}}) \xrightarrow{v^1} H^1(Y,\underline{O}^*_{X_n}) \xrightarrow{d} H^2(Y,P_n) .$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \underline{\underline{N}}$, on sait identifier $\mathrm{Pic}(X_n)$ et $H^1(Y,\underline{O}^*_{X_n})$; de plus, si E est un $\underline{O}_{X_{n+1}}$-Module inversible, correspondant à une classe de cohomologie $c(E)$, la classe de cohomologie correspondant à l'image inverse de E sur X_n est égale à $v^1(c(E))$. D'où la proposition suivante :

Proposition 1.1. Conservons les notations introduites ci-dessus. Soit $p \in \underline{\underline{N}}$. L'application $\mathrm{Pic}(\hat{X}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y_n)$:

(i) est injective pour $n \geqslant p$, si $H^1(Y,P_n) = 0$ pour $n \geqslant p$;

(ii) est un isomorphisme pour $n \geqslant p$, si $H^i(Y,P_n) = 0$ pour $n \geqslant p$ et $i = 1,2$.

Bien entendu, la suite exacte (*) contient plus d'information que la proposition ci-dessus. Le lecteur aura remarqué que l'on n'a rien dit du foncteur $\underline{P}(\hat{X}) \longrightarrow \underline{P}(Y)$. Etant donnés deux $\underline{O}_{\hat{X}}$-Modules inversibles, $H = \underline{\mathrm{Hom}}(E,F)$ est aussi inversible. Si l'on indique par un indice n la réduction modulo $\mathfrak{J}^{n+1}$, on trouve une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H_o \otimes P_n \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(E_{n+1},F_{n+1}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(E_n,F_n) \longrightarrow 0 .$$

D'où une suite exacte de cohomologie que nous n'écrirons pas et dont l'interprétation est évidente; on peut utiliser cette remarque pour étudier le foncteur $\underline{P}$.

2 . Comparaison de $\mathrm{Pic}(X)$ et $\mathrm{Pic}(\hat{X})$.

Le lecteur trouvera dans l'exposé X , n° 2, la démonstration de ce qui suit :

Proposition 2.1. Supposons que l'on ait $\mathrm{Lef}(X,Y)$; alors pour tout voisinage ouvert U de Y dans X, le foncteur

$$(2.1) \qquad \underline{P}(U) \longrightarrow P(\hat{X})$$

est pleinement fidèle, l'application

$$(2.2) \qquad \mathrm{Pic}(U) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\hat{X})$$

est donc injective. Si l'on a Leff(X,Y) l'application (2.3.) est un isomorphisme :

$$(2.3) \qquad \varinjlim_{U} \mathrm{Pic}(U) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\hat{X}) .$$

Corollaire 2.2. Supposons que l'on ait Lef(X,Y) et que pour tout entier $n \gg p$, on ait $H^1(Y,P_n) = 0$; alors pour tout ouvert $U \supset Y$, les applications

$$\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(U) \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y_n)$$

sont injectives si $n \gg p$. Si l'on a Leff(X,Y) et si de plus, pour tout entier $n \gg p$, on a $H^i(Y,P_n) = 0$ pour $i = 1$ et $i = 2$, alors l'application

$$\varinjlim_{U} \mathrm{Pic}(U) \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y_n)$$

est un isomorphisme pour $n \gg p$.

3. Comparaison de $\underline{P}(X)$ et de $\underline{P}(U)$.

Une définition :

Définition 3.1. (*) Soit X un préschéma et soit Z une partie fermée de X. Posons $U = X-Z$. On dit que X est parafactoriel aux points de Z si, pour tout ouvert V de X, le foncteur $\underline{P}(V) \longrightarrow \underline{P}(V \cap U)$ est une équivalence de catégories. On dit aussi que le couple (X,Z) est parafactoriel.

Rappelons que $\underline{P}(Z)$ désigne la catégorie des Modules localement libres de rang 1 sur Z.

Définition 3.2. Un anneau local noethérien est dit parafactoriel si le couple $(\mathrm{Spec}(A), \{\underline{r}(A)\})$ est parafactoriel.

On démontre la proposition suivante qui prouve que la notion est "ponctuelle" :

(*) Pour une étude plus détaillée de la notion de parafactorialité, et la démonstration de 3.3, cf. EGA IV 21.13, 21.14.

Proposition 3.3. Supposons X localement noethérien. Pour que le couple (X,Z) soit parafactoriel, il faut et il suffit que pour tout $z \in Z$, l'anneau local $\underline{O}_{X,z}$ le soit.

Remarquons que dans parafactoriel il y a "pleinement fidèle". On démontre comme le lemme 3.5. de l'exposé X le :

Lemme 3.4. Si X est un préschéma localement noethérien et si $Z = X - U$ est une partie fermée de X, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout ouvert V de X, le foncteur $P(V) \longrightarrow P(V \cap U)$ est pleinement fidèle;

(ii) l'homomorphisme $\underline{O}_X \longrightarrow i_*(\underline{O}_U)$ est un isomorphisme;

(iii) pour tout $z \in Z$, on a prof $\underline{O}_{X,z} \geqslant 2$.

Donc "parafactoriel" signifie que les conditions de 3.4. sont vérifiées et que, pour tout ouvert V de X, l'homomorphisme $\mathrm{Pic}(V) \longrightarrow \mathrm{Pic}(V \cap U)$, est surjectif. En particulier, si X est le spectre d'un anneau local noethérien, on trouve :

Proposition 3.5. Soit A un anneau local noethérien; pour qu'il soit parafactoriel il est nécessaire et suffisant que prof $A \geqslant 2$ et $\mathrm{Pic}(X' - \{x\}) = 0$, où l'on a posé $X' = \mathrm{Spec}(A)$ et où x est l'unique point fermé de X'.

On notera qu'un anneau local de dimension $\leqslant 1$ n'est jamais parafactoriel car sa profondeur est $\leqslant 1$. Donc factoriel n'entraîne pas parafactoriel; c'est cependant vrai pour les anneaux locaux noethériens de dimension $\geqslant 2$, comme nous le verrons plus bas.

Lemme 3.6. Soit X un préschéma localement noethérien et soit Z une partie fermée de X. Soit $f: X_1 \longrightarrow X$ un morphisme fidèlement plat et quasi compact. Posons $Z_1 = f^{-1}(Z)$. Si (X_1, Z_1) est parafactoriel, alors (X,Z) l'est.

On remarque d'abord que, si $i:(X-Z) \longrightarrow X$ désigne l'immersion canonique de $U = X-Z$ dans X, la formation de l'image directe par i d'un $\underline{O}_U$-Module quasi-cohérent commute au changement de base f, car celui-ci est plat. Il est donc équivalent de supposer les conditions équivalentes du lemme 3.5. pour (X,Z) ou pour (X_1,Z_1), car f est un morphisme de descente pour la catégorie des faisceaux quasi-cohérents. Il reste à prouver que, pour tout ouvert V de X, $\mathrm{Pic}(V) \longrightarrow \mathrm{Pic}(V \cap U)$ est surjectif. On fait le changement de base $V \longrightarrow X$, qui ne change rien (sic), et on est ramené à $V = X$. On remarque alors que, si $\underline{L}$ est un $\underline{O}_U$-Module inversible et si $\underline{L}$ admet un prolongement localement libre, ce prolongement est isomorphe à $i_*(\underline{L})$, à cause de ce qui vient d'être vu. Reste à prouver que $i_*(\underline{L})$ est inversible. Utilisant à nouveau le fait que l'image directe par i commute au changement de base plat, et que "localement libre de rang 1" est une propriété qui se descend par morphisme fidèlement plat et quasi-compact, on a gagné.

<u>Corollaire</u> 3.7. <u>Soit</u> A <u>un anneau local noethérien; si</u> $\hat{A}$ <u>est parafactoriel</u> A <u>l'est</u>.

Z Ne pas croire que, si A est parafactoriel, $\hat{A}$ l'est.

Avant d'aborder l'énoncé du théorème principal de ce n°, faisons le lien avec la théorie des diviseurs et la notion d'anneau factoriel (*).

Soit X un préschéma <u>noethérien</u> et <u>normal</u>. Soit $Z^1(X)$ le groupe abélien libre engendré par les $x \in X$ tels que $\dim \underline{O}_{X,x} = 1$. L'anneau local d'un tel point est un anneau de valuation discrète. On notera v_x la valuation normée correspondante. Soit $K(X)$ l'anneau des fractions rationnelles de X et soit

$$p : K(X)^* \longrightarrow Z^1(X)$$

l'application qui à tout $f \in K(X)^*$ associe le cycle 1-codimensionnel :

$$(f) = \sum_{x \in X, \dim \underline{O}_{X,x} = 1} v_x(f).x \ .$$

(*) Pour les généralités qui suivent, cf. aussi EGA IV 21.

L'image de p est notée $P(X)$ et on appelle ses éléments *diviseurs principaux* (*). On pose :

$$Cl(X) = Z^1(X)/P(X) \quad .$$

Soit $Z^1(X)$ le sous-groupe de $Z^1(X)$ dont les éléments sont les *diviseurs localement principaux*. On sait que

$$Pic(X) \simeq Z'^1(X)/P(X) \quad ,$$

et par suite $Pic(X)$ s'identifie à un sous-groupe de $Cl(X)$.

Remarquons que si U est un ouvert dense de X, $K(X) \longrightarrow K(U)$ est un isomorphisme, et que si $codim(X-U,X) \geqslant 2$, i.e. si tout $x \in X$ tel que $\dim \underline{O}_{X,x} \leqslant 1$ appartient à U , l'homomorphisme $Z^1(X) \longrightarrow Z^1(U)$ et par suite $Cl(X) \longrightarrow Cl(U)$ est aussi un isomorphisme. Enfin, si tout $x \in U$ est factoriel, i.e. $\underline{O}_{X,x}$ l'est, alors $Z^1(U) = Z'^1(U)$ donc $Pic(U) \simeq Cl(U)$.

Proposition 3.7.1. *Soit* X *un préschéma noethérien et normal. Soit* $(U_i)_{i \in I}$ *une famille d'ouverts de* X *telle que* :

a) *les* U_i *forment une base de filtre;*

b) *si on pose* $Y_i = X-U_i$, *on a* $codim(Y_i,X) \geqslant 2$ *pour tout* i ,

c) *si* $x \in U_i$ *pour tout* $i \in I$, *alors* $\underline{O}_{X,x}$ *est factoriel.*

Alors on a un isomorphisme :

$$\varinjlim_{i \in I} Pic(U_i) \xrightarrow{\approx} Cl(X) \quad .$$

Remarquons que b) entraîne que tout $x \in X$ tel que $\dim \underline{O}_{X,x} \leqslant 1$ appartient à U_i pour tout i . Donc les U_i sont denses et de plus l'homomorphisme $Z^1(U_i) \longrightarrow Z^1(X)$ est un isomorphisme, de même que $K(U_i) \longrightarrow K(X)$, donc $Pic(U) \subset Cl(U_i) \simeq Cl(X)$. Pour prouver ce que l'on désire, il suffit donc de montrer que tout $D \in Z^1(X)$ appartient à $Z'^1(U_i)$ pour un i convenable. Il suffit de le faire pour les "diviseurs" irréductibles et positifs. Soit donc

(*) Conformément à la terminologie de EGA IV 21, nous préferons maintenant réserver le nom de "diviseur" aux "diviseurs localement principaux" ou "diviseurs de Cartier".

$x \in X$ tel que $\dim \underline{O}_{X,x} = 1$. Il suffit de prouver qu'il existe un $i \in I$ tel que $\overline{\{x\}}$ soit localement principal en les points de U_i . Soit $\mathfrak{J}$ le plus grand idéal de définition du fermé $\overline{\{x\}}$. L'ensemble des points au voisinage desquels $\mathfrak{J}$ est libre est un ouvert U . Or $U \supset \bigcap_{i \in I} U_i$ d'après c) . Si on pose $Y = X - U$, on a $Y \subset \bigcup_{i \in I} Y_i$, or Y est fermé, donc admet un nombre fini de points génériques, donc est contenu dans la réunion d'un nombre fini de Y_i , donc dans Y_j pour un $j \in I$, car les U_i forment une base de filtre. Donc $U \supset U_j$.

C.Q.F.D.

Corollaire 3.8. Soit X un préschéma noethérien et normal et soit Y une partie fermée de codimension $\geqslant 2$. Supposons que, pour tout $p \in X-Y$, $\underline{O}_{X,p}$ soit factoriel, alors

$$\mathrm{Pic}(X-Y) \longrightarrow \mathrm{Cl}(X-Y) \longrightarrow \mathrm{Cl}(X)$$

sont des isomorphismes.

Corollaire 3.9. Soit A un anneau local noethérien et normal. Posons $X' = \mathrm{Spec}(A)$ et $x = \underline{r}(A)$. Pour que A soit factoriel il faut et il suffit que $\mathrm{Pic}(X' - \{x\}) = 0$ et que $p \in X' - \{x\}$ implique que A_p est factoriel.

En effet, pour que A soit factoriel il est nécessaire et suffisant que $\mathrm{Cl}(X') = 0$.

Corollaire 3.10. Soit A un anneau local noethérien de dimension $\geqslant 2$. Posons $X' = \mathrm{Spec}(A)$ et soit $x = \underline{r}(A)$. Posons $X = X' - \{x\}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A est factoriel;

(ii) a) pour tout $y \in X$, $\underline{O}_{X,p}$ est factoriel , et

b) A est parafactoriel, i.e. prof $A \geqslant 2$ et $\mathrm{Pic}(X) = 0$.

Avant de démontrer ce corollaire, énonçons le

Critère de normalité de SERRE 3.11. (*) Soit A un anneau local noethérien. Pour que A soit normal il est nécessaire et suffisant que

(i) pour tout idéal premier $\underline{p}$ de A tel que $\dim A_{\underline{p}} \leqslant 1$, $A_{\underline{p}}$ soit normal,

(ii) pour tout idéal premier $\underline{p}$ de A tel que $\dim A_{\underline{p}} \geqslant 2$, on ait $\operatorname{prof} A_{\underline{p}} \geqslant 2$.

Prouvons 3.10.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Sachant qu'un localisé de factoriel l'est aussi, on a (ii) a). De plus A est normal donc $\operatorname{prof} A \geqslant 2$ car $\dim A \geqslant 2$ (3.11 (ii)). Enfin A est parafactoriel; en effet $\operatorname{Pic}(X) \simeq \operatorname{Cl}(X') = 0$ (cf. 3.9).

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Prouvons d'abord que A est normal en appliquant le critère de SERRE. Puisque $\dim A \geqslant 2$, la condition (i) du critère est dans les hypothèses. De plus, pour tout $\underline{p} \in X$, $A_{\underline{p}}$ est factoriel, donc normal, donc de profondeur $\geqslant 2$, du moins si $\dim A_{\underline{p}} \geqslant 2$. Enfin $\operatorname{prof} A \geqslant 2$ d'après (ii) b). Il reste à appliquer 3.9.

Résumons ce qui précède :

Proposition 3.12. Soit X un préschéma localement noethérien et soit $\mathfrak{J}$ un idéal quasi-cohérent de X. Soit $Y = V(\mathfrak{J})$. Soit $p \in \underline{N}$. Supposons que :

1) On a $\operatorname{Leff}(X,Y)$ (Exp. X) ;

2) $H^i(X, \mathfrak{J}^{n+1}/\mathfrak{J}^{n+2}) = 0$ si $i = 1$ ou 2 et si $n \geqslant p$;

3) pour tout voisinage ouvert U de Y dans X et tout $x \in X-U$, l'anneau $\underline{O}_{X,x}$ soit parafactoriel.

Alors, pour tout $n \geqslant p$, et tout voisinage ouvert U de Y, les homomorphismes

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Pic}(X) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \operatorname{Pic}(X_n) \\ & \operatorname{Pic}(U) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(*) Cf. EGA IV 5.8.6 .

sont des isomorphismes.

On connaît des anneaux parafactoriels :

Théorème 3.13.

(i) (Auslander-Buchsbaum). Un anneau local noethérien régulier est factoriel (donc parafactoriel si sa dimension est $\geqslant 2$).

(ii) Un anneau local noethérien de dimension $\geqslant 4$ et qui est une intersection complète est parafactoriel.

Corollaire 3.14. (Conjecture de SAMUEL). Un anneau local noethérien A qui est une intersection complète et qui est factoriel en codimension $\leqslant 3$ (i.e. $\dim A_{\underline{p}} \leqslant 3$ entraîne que $A_{\underline{p}}$ est factoriel) est factoriel.

Prouvons le corollaire

On raisonne par récurrence sur la dimension de A.

Si $\dim A \leqslant 3$, A est factoriel par hypothèse.

Si $\dim A > 3$, par l'hypothèse de récurrence, en remarquant qu'un localisé d'une intersection complète l'est aussi, tous les localisés de A autres que A sont factoriels. Par le théorème 3.13 (ii) A est parafactoriel, donc factoriel par 3.10.

Démontrons 3.13.(i) (suivant KAPLANSKY) (*).

Soit A un anneau local noethérien régulier, posons $\dim A = n$. Si $n = 0$ ou 1, le résultat est connu. Supposons $n \geqslant 2$, raisonnons par récurrence sur n et supposons $n \geqslant 2$ et le théorème démontré pour les anneaux de dimension $< n$. Posons $X' = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = X' - \{x\}$, où $x = \underline{r}(A)$. Les localisés de A autres que A sont réguliers et de dimension $< n$, donc factoriels. De plus $\mathrm{prof}\, A = \dim A \geqslant 2$. Il suffit donc de prouver que $\mathrm{Pic}(X) = 0$ (cor. 3.10). Soit donc $\underline{L}$ un $\underline{O}_X$-Module inversible, on sait qu'on peut le prolonger en un $\underline{O}_{X'}$-Module cohérent $\underline{L}'$. Il existe une résolution de $\underline{L}'$ par des $\underline{O}_{X'}$-Modules libres :

(*) C'est la démonstration reproduite dans EGA IV 21.11.1.

$$0 \longleftarrow \underline{L}' \longleftarrow \underline{L}'_1 \longleftarrow \dots \longleftarrow \underline{L}'_n \longleftarrow 0 \ ,$$

car la dimension cohomologique de A est finie. Par restriction à X' on obtient une résolution libre finie. Il suffit de prouver le lemme suivant :

Lemme 3.15. *Soit* $(X,\underline{O}_X)$ *un espace annelé et soit* $\underline{L}$ *un* $\underline{O}_X$*-Module localement libre qui admet une résolution finie par des modules* libres de type fini. *Alors* $\text{dét}(\underline{L}) \simeq \underline{O}_X$.

Rappelons que l'on définit $\text{dét}(\underline{L})$ comme la puissance extérieure maximum de $\underline{L}$. Dans le cas envisagé, $\text{dét}(\underline{L}) \simeq \underline{L}$ car $\underline{L}$ est inversible, donc le lemme permet de conclure. Démontrons ce lemme. Soit

$$0 \longleftarrow \underline{L}_0 \longleftarrow \underline{L}_1 \longleftarrow \underline{L}_2 \longleftarrow \dots \longleftarrow \underline{L}_n \longleftarrow 0 \ ,$$

la suite exacte annoncée, où $\underline{L}_0 = \underline{L}$. Puisque tout est localement libre, on a :

$$\bigotimes_{0 \leqslant i \leqslant n} (\text{dét}(\underline{L}_i))^{(-1)^i} \simeq \underline{O}_X \ ,$$

or tous les $\underline{L}_i, i > 0$, sont libres, donc aussi leurs déterminants, donc aussi celui de $\underline{L}_0 = \underline{L}$.

C.Q.F.D.

Il nous faut encore démontrer le (ii) du théorème. Auparavant, prouvons un lemme qui permettra de procéder par récurrence:

Lemme 3.16. *Soit* A *un anneau local noethérien quotient d'un régulier. Soit* $t \in \underline{r}(A)$ *un élément* A*-régulier. Supposons que* A *soit complet pour la topologie* t*-adique. Posons* $X' = \text{Spec}(A)$, $Y' = V(t) \simeq \text{Spec}(B)$, $B = A/tA$, $X = X' - \{x\}$, $Y = Y' - \{x\}$, $x = \underline{r}(A)$. *Supposons que* :

a) *pour tout* $y \in X$ *fermé dans* X *on ait* $\text{prof}\ \underline{O}_{X,y} \geqslant 2$,

b) $\operatorname{prof} A/tA \geqslant 3$,

alors l'application $\operatorname{Pic}(X) \longrightarrow \operatorname{Pic}(Y)$ est injective. En particulier, si B est parafactoriel, A l'est aussi.

On sait que a) entraîne $\operatorname{Lef}(X,Y)$ grâce à X 2.1. Si on prouve que $H^1(Y,P_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$, on saura (2.2) que $\operatorname{Pic}(X) \longrightarrow \operatorname{Pic}(Y)$ est injectif. Si, de plus, B est parafactoriel, on saura que $\operatorname{Pic}(Y) = 0$ (3.5.) donc $\operatorname{Pic}(X) = 0$, or $\operatorname{prof}(A) = 3+1 \geqslant 2$ car t est A-régulier, donc A sera parafactoriel par 3.5.

Soit $\mathfrak{J} = (\widetilde{tA})$ le $\underline{O}_{X'}$-Module associé à l'idéal tA . Au n° 1, on a posé $P_n = (\mathfrak{J}^{n+1}/\mathfrak{J}^{n+2})|Y$, pour tout $n \geqslant 0$. Or t est A-régulier donc $P_n \simeq \underline{O}_Y$. Il nous reste donc à prouver que $H^1(Y,\underline{O}_Y) = 0$. Or $Y = Y' - \{x\}$ est un ouvert de Y', on a donc une suite exacte (I (27)) :

$$H^1(Y',\underline{O}_{Y'}) \longrightarrow H^1(Y,\underline{O}_Y) \longrightarrow H^2_x(Y',\underline{O}_{Y'}) ,$$

dont le terme de droite est nul en vertu de l'hypothèse b), et celui de gauche parce que Y' est affine.

C.Q.F.D.

Lemme 3.17. Conservant les hypothèses de 3.16 , supposons de plus que :

c) pour tout y fermé dans Y, on $\operatorname{prof} \underline{O}_{X,y} \geqslant 3$,

d) $\operatorname{prof} A/tA \geqslant 4$, (plus fort que b),

e) pour tout y fermé de $X, y \in Y$, l'anneau $\underline{O}_{X,y}$ est parafactoriel.

Alors l'application $\operatorname{Pic}(X) \longrightarrow \operatorname{Pic}(Y)$ est un isomorphisme, en particulier pour que A soit parafactoriel, il faut et il suffit que B le soit .

On sait (X 2.1) que a) et c) entraînent $\operatorname{Leff}(X,Y)$. De plus, par le raisonnement qui vient d'être fait, d) entraîne que $H^i(Y,P_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$ et $i = 1$ ou $i = 2$. De plus, pour tout voisinage ouvert U de Y dans X, le complémentaire de U dans X est formé d'un nombre fini de points fermés. Grâce à e) et au théorème 3.12 , on en déduit que $\operatorname{Pic}(X) \longrightarrow \operatorname{Pic}(Y)$ est un isomorphisme. D'autre part $\operatorname{prof} A \geqslant \operatorname{prof} B \geqslant 2$; par le critère 3.5 on en déduit que A est parafactoriel si et seulement si B l'est.

Démontrons maintenant 3.13. (ii). Soit R un anneau local noethérien régulier. Soit $(t_1,\dots,t_k)$ une R-suite. Posons $B = R/(t_1,\dots,t_k)$ et supposons que $\dim B \geqslant 4$. Il faut prouver que B est parafactoriel. Raisonnons par récurrence sur k, Si $k = 0$, B est régulier, donc factoriel par 3.13.(i), donc parafactoriel par 3.10. Supposons $k \geqslant 1$ et le théorème démontré pour $k' < k$. Posons $A = R/(t_1,\dots,t_{k-1})$ donc $B \simeq A/t_k A$. On peut supposer B complet d'après 3.7. Par l'hypothèse de récurrence, A est parafactoriel. Prouvons que l'on peut appliquer le lemme 3.17. On a supposé B complet donc aussi A, et donc A est complet pour la topologie t-adique. Si $x \in X$, et si x est fermé dans X, A_x est une intersection complète de dimension $\geqslant 4$, avec $k' < k$. D'après l'hypothèse de récurrence A_x est parafactoriel, et par ailleurs de profondeur $\geqslant 4$. Ce qui donne a), c) et e). De plus $\dim A \geqslant 5$, d'où d).

C.Q.F.D.

Théorème 3.18. *Soit X un préschéma localement noethérien et soit $\mathcal{J}$ un faisceau cohérent d'idéaux de X. Posons $Y = V(\mathcal{J})$. Soit n un entier. Supposons que :*

(i) *on ait* leff(X,Y) (cf. exemples X 2.1 et X 2.2),

(ii) *pour tout $p \geqslant n$, on ait $H^i(Y, \mathcal{J}^{p+1}/\mathcal{J}^{p+2}) = 0$ pour $i = 1$ et $i = 2$,*

(iii) *pour tout ouvert $U \supset Y$ et tout $x \in X-U$, l'anneau $\underline{O}_{X,x}$ soit régulier de dimension $\geqslant 2$ ou une intersection complète de dimension $\geqslant 4$.*

Alors, pour tout ouvert $U \supset Y$ et tout entier $p \geqslant n$, les homomorphismes

$$\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(U) \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y_p)$$

sont des isomorphismes, où Y_p désigne le préschéma $(Y, \underline{O}_X/\mathcal{J}^{p+1})$.

Il suffit de conjuguer 3.12 et 3.13 .

Exposé XII

APPLICATION AUX SCHEMAS ALGEBRIQUES PROJECTIFS ([*])

1. Théorème de dualité projective et théorème de finitude

Le théorème suivant, essentiellement contenu dans FAC ([**]) (à cela près dans le temps, Serre ne disposait pas du langage des Ext de faisceaux de Modules), est l'analogue global du théorème de dualité locale (Exposé IV), qui a été calqué sur lui.

Théorème 1.1. Soient k un corps, $X=P^r_k$ le schéma projectif type de dimension r sur k, F un Module cohérent variable sur X ; alors on a un isomorphisme de ∂-foncteurs en F :

$$H^i(X,F)' \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ext}^{r-i}(X,F,\underline{\Omega}^r_{X/k}) \quad , \tag{1}$$

où on pose

$$\underline{\Omega}^r_{X/k} = \underline{O}_{P^r_k}(-r-1) \quad . \tag{2}$$

Remarque . Bien entendu, ce Module est aussi le Module des différentielles relatives de degré r de X sur k . Sous cette forme, le théorème reste vrai si X est un schéma propre et lisse sur k , (pour le cas projectif, voir A. Grothendieck, "Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents", Séminaire Bourbaki Mai 1957) ([***]). Lorsque F est localement libre, on retrouve le théorème de dualité de Serre $H^i(X,F)' \simeq H^{r-i}(X,\underline{Hom}_{\underline{O}_X}(F,\underline{\Omega}^r_{X/k}))$. Le théorème 1.1 (qui redonne d'ailleurs le cas d'un X projectif sur k , comme on montre dans loc.cit.) suffira pour notre propos.

([*]) Le présent exposé, rédigé en Janvier 1963, est nettement plus détaillé que n'était l'exposé oral, en Juin 1962.

([**]) J.P. Serre, Faisceaux Algébriques Cohérents, Ann. of Math. t.61 (1955) 197-278.

([***]) Pour un théorème de dualité plus général, cf. le Séminaire Hartshorne cité à la fin de Exp. IV.

L'homomorphisme (1) se déduit de l'accouplement de Yoneda

$$(3) \qquad H^i(X,F) \times \mathrm{Ext}^{r-i}(X;F,\underline{\Omega}^r_X) \longrightarrow H^r(X,\underline{\Omega}^r_{X/k}) ,$$

et d'un isomorphisme bien connu (cf FAC, ou EGA III 2.1.12.) :

$$(4) \qquad H^r(X,\underline{\Omega}^r_{X/k}) = H^r(P^r_k,\underline{O}_{P^r_k}(-r-1)) \xrightarrow{\sim} k .$$

Pour montrer que (1) est un isomorphisme, on procède comme dans le cas du théorème de dualité locale, en notant que $H^r(X,F)$ comme foncteur en F est exact à droite (puisque $H^n(X,F)=0$ pour $n > r$), et que tout Module cohérent est isomorphe à un quotient d'une somme directe de Modules de la forme $\underline{O}(-m)$, avec m grand . Cela nous ramène par récurrence descendante sur i à faire la vérification pour un faisceau de la forme $\underline{O}(-m)$, où cela est contenu dans les calculs explicites bien connus (FAC ou EGA III 2.1.12). On peut d'ailleurs supposer $-m \leqslant -r-1$, auquel cas $H^i(X,\underline{O}(-m)) = 0$ pour $i \neq r$.

Corollaire 1.2. Pour F cohérent donné, et m grand, on a un isomorphisme canonique

$$(5) \qquad H^i(X,F(-m))' \xrightarrow{\sim} H^o(X,\underline{\mathrm{Ext}}^{r-i}_{\underline{O}_X}(F,\underline{\Omega}^r_X)(m)) ,$$

(où le ' désigne le vectoriel dual).

En effet, sur un schéma projectif X , on a pour tout couple de faisceaux cohérents F,G et pour m grand un isomorphisme canonique :

$$(6) \qquad \mathrm{Ext}^n(X;F(-m),G) \simeq \mathrm{Ext}^n(X;F,G(m)) \xrightarrow{\sim} H^o(X, \underline{\mathrm{Ext}}^n_{\underline{O}_X}(F,G)(m))$$

(l'isomorphisme des deux premiers membres étant trivialement vrai pour tout m) , comme il résulte de la suite spectrale des Ext globaux

$$H^p(X, \underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{O}_X}(F,G(m)) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^{\cdot}(X;F,G(m)) ,$$

qui dégénère pour m grand grâce au fait que

$$\underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{O}_X}(F,G(m)) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{O}_X}(F,G)(m) ,$$

et que les $\underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{O}_X}(F,G)$ sont des Modules cohérents. Donc (5) résulte de (6) et (1) .

<u>Corollaire</u> 1.3. <u>Conditions équivalentes, pour</u> i,F <u>donnés</u> :

(i) $H^i(X,F(-m))=0$ <u>pour</u> m <u>grand</u> .

(i bis) $H^i(X,F(.)) = \coprod_{m \in \mathbb{Z}} H^i(X,F(-m))$ <u>est un</u> S-module <u>de type fini</u>, <u>où</u> $S= k[t_o,\ldots,t_r]$.

(ii) $\underline{\mathrm{Ext}}^{r-i}_{\underline{O}_X}(F,\underline{\Omega}^r_{X/k}) = 0$.

(ii bis) $\underline{\mathrm{Ext}}^{r-i}_{\underline{O}_X}(F,\underline{O}_X) = 0$.

(iii) $H^i_x(F_x) = 0$ <u>pour tout point fermé</u> x <u>de</u> X .

(iv) $H^{i+1}_x(\widetilde{F}_x) = 0$ <u>pour tout point fermé</u> x <u>du cône projetant épointé</u> $\widetilde{X} = \mathrm{Spec}(S) - \mathrm{Spec}(k)$ <u>de</u> X , <u>où</u> $\widetilde{F}$ <u>désigne l'image inverse de</u> F <u>par le morphisme canonique</u> $\widetilde{X} \to X$.

<u>Démonstration</u>.

(i)$\Longleftrightarrow$(ibis) puisque le sous-module de $H^i(X,F(.))$ somme des composantes homogènes de degré $\geqslant \nu$ est de type fini sur S (en fait, pour $i \neq 0$, il est même de type fini sur k) , (cf FAC, ou EGA III 2.2.1 et 2.3.2).

(i)$\Longleftrightarrow$(ii) en vertu de corollaire 1.2.

(ii)$\Longleftrightarrow$(ii bis) car $\underline{\Omega}^r_{X/k}$ est localement isomorphe à $\underline{O}_X$.

(ii bis)$\Longleftrightarrow$(iii) en vertu du théorème de dualité locale pour $\underline{O}_{X,x}$ (qui est un anneau local régulier de dimension r) , d'après lequel le "dual" de $\underline{\mathrm{Ext}}^{r-i}_{\underline{O}_X}(F,\underline{O}_X)_x$ s'identifie à $H^i_x(F_x)$ (V 2.1).

(ii bis) équivaut à la relation analogue

$$\underline{\mathrm{Ext}}^{r-i}_{\underline{O}_{\widetilde{X}}}(\widetilde{F},\underline{O}_{\widetilde{X}}) = 0$$

(grâce au fait que $\widetilde{X} \to X$ est fidèlement plat, par suite l'image inverse de $\underline{\mathrm{Ext}}^{r-i}_{\underline{O}_X}(F,\underline{O}_X)$ est isomorphe à $\underline{\mathrm{Ext}}^{r-i}_{\underline{O}_{\widetilde{X}}}(\widetilde{F},\underline{O}_{\widetilde{X}})$) , et cette dernière relation équivaut à (iv) par le théorème de dualité locale pour l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$, qui est régulier de dimension $r+1$.

En particulier, appliquant ceci à tous les $i \leqslant n$, on trouve :

<u>Corollaire</u> 1.4. <u>Conditions équivalentes pour</u> n,F <u>donnés</u> :

(i) $H^i(X,F(-m)) = 0$ <u>pour</u> $i \leqslant n$ <u>et</u> m <u>grand</u> .

(i bis) $H^i(X,F(.))$ <u>est un</u> S-module <u>de type fini pour</u> $i \leqslant n$.

(ii) $\mathrm{prof}(F_x) > n$ <u>pour tout point fermé</u> x <u>de</u> X .

(iii) $\mathrm{prof}(\widetilde{F}_x) > n+1$ <u>pour tout point fermé</u> x <u>de</u> $\widetilde{X}$.

L'intérêt des corollaires 1.3. et 1.4. est d'exprimer une condition globale (i) ou (i bis) en termes de conditions locales, savoir l'annulation d'invariants locaux comme $H^i_x(F_x)$ ou $H^i_x(\widetilde{F}_x)$, ou une inégalité sur la profondeur . Sous cette forme, ces résultats restent trivialement valables pour un schéma projectif quelconque X , et un faisceau inversible très ample $\underline{O}_X(1)$ sur X , comme on voit en induisant ce dernier à l'aide d'une immersion projective $X \to \underline{P}^r_k$ convenable . (Bien entendu, les conditions 1.3. (ii) et 1.3. (ii bis) ne sont plus équivalentes aux autres dans ce cas général, sauf si on suppose que X est régulier par exemple). On peut d'ailleurs généraliser au cas d'un morphisme projectif $X \to S$ de la façon suivante :

Proposition 1.5. Soient $f: X \to S$ un morphisme projectif, avec S noethérien, $\underline{O}_X(1)$ un Module inversible sur X très ample relativement à S, F un Module cohérent sur X, plat par rapport à S, s un élément de S, X_s la fibre de X en s (considéré comme schéma projectif sur $k(s)$) F_s le faisceau induit sur X_s par F, enfin i un entier. Supposons que pour tout point fermé x de X_s, on ait $H^i_x(F_{s,x})=0$ (par exemple prof $(F_{s,x}) > i$). Alors il existe un voisinage ouvert U de s, tel que la même condition soit vérifiée pour les $s' \in U$. De plus, pour un tel U, on a

$$R^i f_*(F(-m)) = 0 \qquad \text{pour } m \text{ grand},$$

et si $\underline{S}$ est une Algèbre graduée quasi-cohérente sur S, engendrée par $\underline{S}^1$, et qui définit X avec $\underline{O}_X(1)$ comme $X=\mathrm{Proj}(\underline{S})$, $\underline{O}_X(1) = \mathrm{Proj}(\underline{S}(1))$, alors le $\underline{S}$-Module

$$R^i f_*(F(.)) = \coprod_{m \in \mathbb{Z}} R^i f_* F(m)$$

est de type fini sur U.

Plongeons X dans un $X'=P^r_S$ de façon que $\underline{O}_X(1)$ soit induit par $\underline{O}_P(1)$ (c'est possible à condition de remplacer S par un voisinage ouvert affine de s). Posons pour tout entier j, et tout $t \in S$:

$$\underline{E}^j(t) = \underline{\mathrm{Ext}}^j_{\underline{O}_{X'_t}}(F_t, \underline{O}_{X'_t}(-r-1)) \qquad (*) . \tag{7}$$

Donc $\underline{E}^j(t)$ est un Module cohérent sur X_t, je dis que pour t variable, la famille de ces Modules est "constructible" au sens suivant : il existe pour tout $t \in S$ un ouvert non vide V de l'adhérence $\overline{t}$, qu'on munit de la structure réduite induite, et un Module cohérent $\underline{E}^j(V)$ sur $X_V = X \times_S V$, plat relativement à V, tel que pour tout $t' \in V$, $\underline{E}^j(t)$ soit isomorphe au Module induit par $\underline{E}^j(V)$ sur X_t. Pour vérifier cette assertion, posant $Z = \overline{t}$ muni de la structure réduite induite, on considère les Modules cohérents

(*) La première assertion de 1.5. peut s'obtenir aussitôt en appliquant l'énoncé purement local EGA IV 12.3.4 aux $\underline{E}^j$ précédents, ce qui court-circuite la plus grande partie de la démonstration qui suit.

$\underline{E}^j(Z) = \underline{\mathrm{Ext}}^j_{\underline{O}_{X'_Z}}(F_Z, \underline{O}_{X'_Z}(-r-1))$ (où l'indice Z signifie encore qu'on s'induit au-dessus de Z), et on prend pour V un ouvert non vide de Z tel que les Modules $\underline{E}^j(Z)$ soient plats au-dessus de V : c'est possible, car on vérifie tout de suite que $\underline{E}^j(Z)=0$ pour j non compris dans l'intervalle $[0,r]$, et on peut appliquer SGA 1 IV 6.11. On prend alors $\underline{E}^j(V) = \underline{E}^j(Z) \mid X_V$, et on vérifie facilement qu'il répond à la question.

De la remarque précédente résulte qu'il existe une partition finie de S formée par des ensembles V_α de la forme $V=V(t)$ comme dessus, (récurrence noethérienne), et appliquant le théorème de Serre EGA III 2.2.1. aux $\underline{E}^j(V_i)$, on voit qu'il existe un entier m_o tel que

$$R^i f_{V_\alpha *}(\underline{E}^j(V_\alpha)) = 0 \quad \text{pour } i\neq 0,\ m \geqslant m_o,\ \text{tout } j,$$

d'où il résulte, utilisant la platitude de $\underline{E}^j(V_\alpha)$ par rapport à V_α et des relations à la Künneth faciles (cf. EGA III par.7), que

$$H^i(X_t, \underline{E}^j(t)(m)) = 0 \quad \text{pour } i\neq 0,\ m \geqslant m_o,\ \text{tout } j,$$

pour tout $t \in V_\alpha$, donc pour tout t puisque les V_α recouvrent S. De ceci et de la suite spectrale des Ext globaux résulte, grâce à 1.1, comme dans la démonstration de 1.2, un isomorphisme

(8) $$H^i(X_t, F_t(-m))' \xleftarrow{\sim} H^o(X_t, \underline{E}^{r-i}(t)(m)) \quad \text{pour } m \geqslant m_o,$$

tout entier i, et tout $t \in S$.

Utilisons maintenant l'hypothèse faite sur F_s, qui s'écrit

(9) $$\underline{E}^{r-i}(s)=0,$$

et grâce à (8) équivaut à

(10) $$H^i(X_s, F_s(-m)) = 0 \quad \text{pour } m \geqslant m_o.$$

Comme F donc $F(-m)$ est plat par rapport à S, il s'ensuit par les relations à la Künneth déjà invoquées, que (pour m donné) la même relation (10) vaut en remplaçant s par un t voisin de s, en particulier pour toute générisation t de s. En vertu de (8), on aura donc, pour une telle générisation

(11) $$\underline{E}^{r-i}(t) = 0 \quad ,$$

or l'ensemble des $t \in S$ pour lesquels cette relation est vraie est évidemment un ensemble constructible (car il induit sur chaque V_α un ouvert) ; comme il contient les générisations de s, il contient un voisinage ouvert U de s. Cela prouve la première assertion de 1.5. De plus, pour $t \in U$, on conclut de (11) et (8) que

(12) $$H^i(X_t, F_t(-m)) = 0 \quad \text{pour} \quad m \geqslant m_o \ , \ t \in U \quad ,$$

ce qui en vertu des relations à la Künneth, implique (en fait, est bien plus fort que)

(13) $$R^i f_*(F(-m)) = 0 \quad \text{sur } U \ , \quad \text{pour} \quad m \geqslant m_o \ .$$

Cela prouve la deuxième assertion de 1.5. Enfin la dernière en résulte aussitôt, en procédant comme au début de la démonstration de 1.3.

Remarque 1.6. (*). La démonstration se simplifie notablement (en éliminant toute considération de constructibilité) lorsqu'on suppose déjà que l'hypothèse faite pour $s \in S$ est vérifiée en tous les $s' \in S$. En fait, lorsqu'on fait l'hypothèse que F_s est de profondeur $> i$ aux points fermés de x, on dispose d'un énoncé général, de nature locale sur X, qui dit que la même condition est vérifiée pour les X_t, à condition de remplacer X par un voisinage ouvert convenable de la fibre X_s (en d'autres termes, une certaine partie de X, définie par des conditions sur les Modules induits par F sur les fibres, est ouverte, cf. EGA IV). Comme f est ici propre, on pourra donc prendre ce voisinage de la forme $f^{-1}(U)$, ce qui redonne la première assertion de 1.5 sans pénible dévissage. Dans le cas général, on peut encore prouver par la méthode de loc. cit. que la première assertion de 1.5. (démontrée ici par voie globale, en utilisant que X est projectif sur S) résulte encore d'un énoncé purement local sur X (que le lecteur explicitera s'il le juge utile).

(*) Cette remarque se précise par la note du bas de la page 5.

2. Théorie de Lefschetz pour un morphisme projectif : théorème de comparaison de Grauert.

C'est le théorème suivant :

Théorème 2.1. Soient $f:X \to S$ un morphisme projectif, avec S noethérien, $\underline{O}_X(1)$ un Module inversible sur X, ample relativement à S, Y le pré-schéma des zéros d'une section t de $\underline{O}_X(1)$, $\underline{J}$ l'Idéal définissant Y, X_n le sous-préschéma de X défini par $\underline{J}^{n+1}$, $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y, $\hat{f} : \hat{X} \to S$ le morphisme composé $\hat{X} \to X \to S$, F un Module cohérent sur X, plat relativement à S. On suppose de plus que pour tout $s \in S$, le Module F_s induit sur la fibre X_s est de profondeur $> n$ en les points fermés de ladite fibre, et que t est F-régulier. Sous ces conditions :

(i) L'homomorphisme canonique

$$R^i f_*(F) \longrightarrow R^i \hat{f}_*(\hat{F})$$

est un isomorphisme pour $i < n$, un monomorphisme pour $i=n$.

(ii) L'homomorphisme canonique

$$R^i \hat{f}_*(\hat{F}) \longrightarrow \varprojlim_m R^i f_*(F_m)$$

est un isomorphisme pour $i \leqslant n$.

Démonstration. On se ramène aussitôt au cas où S est affine, et à prouver alors le

Corollaire 2.2. Sous les conditions de 2.1. supposons de plus S affine. Alors :

(i) L'homomorphisme canonique

$$H^i(X,F) \to H^i(\hat{X},\hat{F})$$

est un isomorphisme pour $i < n$, un monomorphisme pour $i=n$.

(ii) L'homomorphisme canonique

$$H^i(\hat{X},\hat{F}) \longrightarrow \varprojlim_m H^i(X_m,F_m)$$

est un isomorphisme pour $i \leqslant n$.

Quitte à remplacer $\underline{O}_X(1)$ par une puissance tensorielle, et t par une puissance de t , on peut supposer $\underline{O}_X(1)$ très ample relativement à S . D'autre part, t donc t^n étant F-régulier, la multiplication par t^n , considérée comme homomorphisme de $F(-m)$ dans F , est injectif, donc on a pour tout $m \gg 0$ une suite exacte :

$$0 \longrightarrow F(-m) \xrightarrow{t^m} F \longrightarrow F_m \longrightarrow 0 , \tag{14}$$

d'où une suite exacte de cohomologie

$$H^i(X,F(-m)) \longrightarrow H^i(X,F) \longrightarrow H^i(X,F_m) \longrightarrow H^{i+1}(X,F(-m)) \quad .$$

Or en vertu de 1.5. on a $H^i(X,F(-m)) = 0$ pour $i \leqslant n$, et m grand, ce qui prouve le

Lemme 2.3. Pour m grand, l'homomorphisme canonique

$$H^i(X,F) \longrightarrow H^i(X_m, F_m)$$

est bijectif si $i < n$, injectif si $i=n$.

Cela montre que pour $i < n$, le système projectif $(H^i(X_m,F_m))_{m \gg 0}$ est essentiellement constant, a fortiori satisfait la condition de Mittag-Meffler, donc (compte tenu que $\hat{F} = \varprojlim_m F_m$) on conclut (ii) par EGA 0_{III} 13.3. D'autre part (i) en résulte trivialement, compte tenu de 2.3.

Corollaire 2.4. Soient $f:X \to S$ un morphisme projectif et plat, avec S localement noethérien, $\underline{O}_X(1)$ un Module inversible sur X, ample relativement à S, t une section de ce module, qui soit $\underline{O}_X$-régulière, Y le sous-préschéma des zéros de t, $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y. On suppose que pour tout $s \in S$, X_s est de profondeur $\geqslant 1$ (resp. de profondeur $\geqslant 2$) en ses points fermés. Alors pour tout voisinage ouvert U de Y, le foncteur

$$F \rightsquigarrow \hat{F}$$

de la catégorie des Modules cohérents localement libres sur U, dans la catégorie des Modules cohérents localement libres sur $\hat{X}$, est fidèle (resp. pleinement fidèle, i.e. la condition de Lefschetz (Lef) de X 2 est vérifiée).

Introduisons pour deux Modules localement libres F et G sur U le Module

$$H = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_U}(F,G) ,$$

on est ramené à prouver que l'homomorphisme canonique

$$H^0(U,H) \longrightarrow H^0(\hat{X},\hat{H}) \tag{15}$$

est injectif (resp. bijectif). Or les Modules H_t sont de profondeur $\geqslant 1$ (resp. $\geqslant 2$) aux points fermés de X_t, on peut donc appliquer 2.1., qui implique la conclusion 2.4. dans le cas où $U=X$. Dans le cas d'un U quelconque, on note que la question est locale sur S, donc on peut supposer S affine. Alors tout Module cohérent sur X est quotient d'un Module cohérent localement libre, (puisque $\underline{O}_X(1)$ est un Module inversible absolument ample sur X). Comme le Module dual $H'=\underline{\mathrm{Hom}}(H,\underline{O}_U)$ se prolonge en un Module cohérent sur X, qui est donc isomorphe à un conoyau d'un homomorphisme de Modules localement libres sur X, il s'ensuit par transposition qu'on peut trouver un homomorphisme

$$u' : L'^0 \to L'^1$$

de Modules localement libres sur X , induisant un homomorphisme

$$u: L^{\circ} \to L^{1},$$

de Modules localement libres sur U , tel qu'on ait une suite exacte

$$0 \to H \to L^{\circ} \xrightarrow{u} L^{1} .$$

Utilisant le lemme des cinq (qui devient le lemme des trois), et l'exactitude à gauche du foncteur H° , on est ramené à prouver que (15) est injectif (resp. bijectif) lorsqu'on y remplace H par L°,L^{1}, ce qui nous ramène au cas où H est induit par un Module localement libre H' sur X . D'ailleurs, dans le cas non respé cette réduction est même inutile, car le noyau de (15) est en tous cas formé des sections de H sur U qui s'annulent dans un voisinage ouvert convenable V de Y , or l'homomorphisme de restriction $H^{\circ}(U,H) \to H^{\circ}(V,H)$ est injectif, car H est de profondeur $\geqslant 1$ en les points de toute partie fermée Z de X ne rencontrant pas Y (cf lemme plus bas). Dans le cas respé, on est ramené à prouver que

$$H^{\circ}(X,H') \to H^{\circ}(U,H')$$

est bijectif, ce qui résulte du fait que H' est de profondeur $\geqslant 2$ en tous les points d'un fermé $Z=X-U$ de X ne rencontrant pas Y . Il faut donc simplement prouver le

Lemme 2.5. Soit F un Module cohérent sur X , plat par rapport à S , tel que pour tout $s \in S$, F_s soit de profondeur $\geqslant n$ en tout point fermé de X_s . Alors pour toute partie fermée Z de X ne rencontrant pas Y , F est de profondeur $\geqslant n$ en tous les points de Z .

En effet, pour tout $x \in X$, posant $s=f(x)$, on a

$$\mathrm{prof}(F_x) \geqslant \mathrm{prof}(F_{s,x}) , \tag{16}$$

comme on voit en relevant n'importe comment une suite $F_{s,x}$ régulière d'éléments de $\underline{r}(\underline{O}_{X_s,x})$ maximale, ce qui donne une suite F_x-régulière en vertu de SGA 1 IV 5.7. Or si x appartient à un Z comme dans le lemme 2.5., alors x est nécessairement fermé dans X_s , en d'autres termes , Z est <u>fini</u> sur S . En effet, Z (muni d'une structure induite par X) est projectif sur S comme sous-préschéma fermé de X qui l'est, et Z est affine sur S comme sous-préschéma fermé de X-Y , qui l'est .

<u>Remarque</u> 2.6. Supposons que pour tout $s \in S$, la section t_s de $\underline{O}_{X_s}(1)$ induite par t soit $\underline{O}_{X_s}$-régulière (ce qui implique par SGA 1 IV 5.7 que t est $\underline{O}_X$-régulière). Alors les hypothèses faites sont stables par extension de la base $S' \to S$ (S' localement noethérien). Donc la conclusion reste valable après tout changement de base .

3. <u>Théorie de Lefschetz pour un morphisme projectif : théorème d'existence</u> .

<u>Théorème</u> 3.1. <u>Soient</u> $f: X \to S$ <u>un morphisme projectif</u>, <u>avec</u> S <u>noethérien</u>, <u>$\underline{O}_X(1)$ un Module inversible sur</u> X <u>ample relativement à</u> S , X_o <u>le sous-préschéma des zéros d'une section</u> t <u>de</u> $\underline{O}_X(1)$, $\hat{X}$ <u>le complété formel de</u> X <u>le long de</u> X_o, $\underline{F}$ <u>un Module cohérent sur</u> $\hat{X}$, F_o <u>le Module qu'il induit sur</u> X_o . <u>On suppose de plus :</u> a) $\underline{F}$ <u>est plat par rapport à</u> S , b) <u>Pour tout</u> $s \in S$, <u>la section</u> t_s <u>induite par</u> t <u>sur la fibre</u> X_s <u>est</u> $\underline{F}_s$<u>-régulière</u> <u>(ce qui implique que</u> F_o <u>est également plat par rapport à</u> S , cf. SGA 1 IV 5.7). c) <u>Pour tout</u> $s \in S$, $F_{o\,s}$ <u>est de profondeur</u> $\geqslant 2$ <u>en les points fermés de</u> $X_{o\,s}$. <u>On suppose de plus que</u> S <u>admet un faisceau inversible ample</u> . <u>Sous ces conditions, il existe un Module cohérent</u> F <u>sur</u> X , <u>et un isomorphisme de son complété formel</u> $\hat{F}$ <u>avec</u> $\underline{F}$.

Cet énoncé va résulter du suivant :

<u>Corollaire</u> 3.2. <u>Sous les conditions</u> a, b), c) <u>ci-dessus</u>, <u>on a ce qui suit</u> :

(i) Le Module $\hat{f}_*(\underline{F})$ sur S est cohérent, donc pour tout n, le Module $\hat{f}_*(\underline{F}(n))$ sur S est cohérent.

(ii) Pour n grand, l'homomorphisme canonique $\hat{f}^*\hat{f}_*(\underline{F}(n)) \to \underline{F}(n)$ est surjectif.

Admettons le corollaire pour l'instant, et prouvons 3.1. Grâce à la dernière hypothèse faite dans 3.1., on peut se ramener au cas où $X = P^r_S$, quitte à remplacer $\underline{O}_X(1)$, t par une puissance convenable. Je dis qu'on peut supposer de plus que pour tout s, on a $t_s \neq 0$. Sinon, on a en effet $F_s = 0$ par b), ou ce qui revient au même par Nakayama, $F_{o\,s} = 0$ i.e. s n'appartient pas à l'image de supp F_o par le morphisme $f_o : X_o \to S$ induit par f. Or cette image S' est ouverte en vertu de a), b) puisque F_o est plat par rapport à S, or il est évident qu'il suffit de prouver la conclusion de 3.1. dans la situation obtenue en se restreignant au-dessus de S', car le Module cohérent F' sur $X|S'$ obtenu sera restriction d'un Module cohérent F sur X, qui répondra à la question. On peut donc supposer qu'en plus des hypothèses a), b), c), les hypothèses suivantes sont également vérifiées :

a') $\underline{O}_X$ est plat par rapport à S.

b') Pour tout $s \in S$, la section t_s est $\underline{O}_{X_s}$-régulière.

c') Pour tout $s \in S$, $\underline{O}_{X_{o\,s}}$ est de profondeur $\geqslant 2$ en les points fermés de $X_{o\,s}$, et $\underline{O}_{X_s}$ est de profondeur $\geqslant 2$ en les points fermés de X_s. (Il suffit de choisir $X = P^r_S$ avec $r \geqslant 3$, ce qui est loisible).

Or 3.2 implique que l'on peut trouver un épimorphisme

$$\hat{\underline{L}} \longrightarrow \underline{F} \longrightarrow 0 \,, \tag{17}$$

où $\underline{L}$ est un Module sur X de la forme $f^*(G)(-n)$, G étant un module cohérent localement libre sur S : il suffit en effet, pour n grand, de représenter le Module cohérent $\hat{f}_*(\underline{F})$ sur S comme quotient d'un tel G. D'autre part, les hypothèses a), b), c) sur f, t impliquent que $\hat{\underline{L}}$ satisfait aux mêmes conditions a), b), c) que $\underline{F}$. On en conclut facilement qu'il en est de même du noyau de (17), auquel on peut donc appliquer le même argument, de sorte que $\underline{F}$ est représenté comme conoyau d'un homomorphisme

$$(18) \qquad \hat{\underline{L}}' \longrightarrow \hat{\underline{L}} \quad ,$$

où L,L' sont des Modules localement libres sur X . Or en vertu de a') et la deuxième partie de c'), et de 2.1. ou 2.4. au choix, l'homomorphisme (18) provient d'un homomorphisme $L' \to L$ de Modules sur X . Il suffit maintenant de prendre pour F le conoyau de $L' \to L$, et on gagne .

Reste à prouver 3.2. Cela avait été fait dans le Séminaire par un expédient un peu pénible, consistant à tout interpréter en termes de cohomologie sur le cône projetant épointé de X relativement à S , pour pouvoir se ramener au théorème IX 2.1. Une façon plus directe et plus satisfaisante (bien que substantiellement identique), me semble maintenant la suivante. Elle consiste à noter que dans IX, n° 2, (et avec les notations de cet exposé) l'hypothèse que le morphisme f: $\underline{X} \to \underline{X}'$ soit adique n'intervient nulle part dans la démonstration de IX 2.1 , via EGA 0_{III} 13.7.7 ; il suffit de supposer à la place que $\underline{X}$ est également adique, et de choisir deux Idéaux de définition $\underline{J}$ pour X', $\underline{I}$ pour $\underline{X}$, tels que $\underline{J}\,\underline{O}_{\underline{X}} \subset \underline{I}$, et de définir $\underline{S} = gr_{\underline{J}}(\underline{O}_{\underline{X}'})$, et considérer $gr_{\underline{I}}(\underline{F})$. De cette façon, IX 2.1. peut s'appliquer directement au morphisme $\hat{f} : \hat{\underline{X}} \to S$ considéré dans le présent numéro, où on prend simplement $\underline{J}=0$. Ainsi, pour vérifier que $\hat{f}_*(\underline{F})$ est cohérent, il suffit en vertu de loc.cit. de vérifier que $R^i f_{o*}(gr_{\underline{I}}(\underline{F}))$ est cohérent sur S pour i=0,1 ; pour ceci on note qu'en vertu de a) et b), le module envisagé n'est autre que $\coprod_{m \gg 0} R^i f_{o*}(F_o(-m))$, qui est bien cohérent en vertu de l'hypothèse c) et de 1.5.

Cela prouve 3.2. (i) . Pour 3.2. (ii), nous aurons besoin du

Lemme 3.3. Sous les conditions a), b), c) de 3.1., posons

$$G_m = \hat{f}_*(\underline{F}(.)_m) = \coprod_n \hat{f}_*(\underline{F}_m(n))$$

Alors le système projectif (G_m) satisfait la condition de Mittag-Leffler.

On peut supposer S affine, d'anneau A. Soit alors $\underline{S}$ une A-algèbre graduée de type fini à degrés positifs, et $t' \in \underline{S}_1$, tels que X s'immerge dans $\mathrm{Proj}(\underline{S})$, $\underline{O}_X(1)$ étant induit par $\underline{\mathrm{Proj}}\ \underline{S}(1)$ et la section t étant l'image de t'. Munissons $\underline{S}$ de la filtration $\underline{J}$-adique, où $\underline{J} = t'\underline{S}$, et considérons le système projectif des $\underline{F}(.)_m$ dans la catégorie des faisceaux abéliens sur X_o. On est encore sous les conditions préliminaires de 0_{III} 13.7.7 (*) et de plus $H^i(X_o, gr(\underline{F}(.))$ est un module de type fini sur $gr_{\underline{J}}(\underline{S})$ pour $i=0,1$. En effet, comme t' est $\underline{F}$-régulier, on constate aussitôt qu' en tant que Module sur $(\underline{S}/t'\underline{S})[T]$ (dont $gr_{\underline{J}}(\underline{S})$ est un quotient), le module envisagé s'identifie à $H^i(X_o,F_o(.))\otimes_{\underline{S}/t'\underline{S}} (\underline{S}/t'\underline{S})[T]$, or en vertu de 1.5. $H^i(X_o,F_o(.))$ est de type fini sur $\underline{S}$, donc sur $\underline{S}/t'\underline{S}$, pour $i=0,1$, ce qui prouve notre assertion. Par suite on est sous les conditions d'application de 0_{III} 13.7.7. avec $n=1$, ce qui prouve 3.3.

Ce point acquis (et supposant toujours S affine, ce qui est loisible pour prouver 3.2. (ii)) soit m_o tel que $m \geq m_o$ implique $\mathrm{Im}\,(G_m \to G_o) = \mathrm{Im}(G_{m_o} \to G_o)$, de sorte que les deux membres sont aussi égaux à $\mathrm{Im}\,(\varprojlim G_m \to G_o) = \mathrm{Im}\,(\hat{f}_*(\underline{F}(.)) \to f_*\underline{F}_o(.))$. Remarquons maintenant que pour n grand, $\underline{F}_{m_o}(n)$ est engendré par ses sections, donc $\underline{F}_o(n)$ est engendré par des sections qui se remontent à $\underline{F}_{m_o}$, donc (grâce au choix de m_o) qui se remontent à $\underline{F}$. Donc les sections de $\underline{F}$ engendrent $\underline{F}_o$, donc aussi $\underline{F}$ grâce à Nakayama. Cela prouve 3.2. (ii), donc 3.1.

Corollaire 3.4. Soient $f: X \to S$ un morphisme projectif et plat, avec S localement noethérien, $\underline{O}_X(1)$ un Module inversible sur X, ample relativement à S, t une section de ce Module telle que pour tout $s \in S$, la section t_s induite

(*) Rectifié comme indiqué dans IX p. 11.

sur la fibre X_s soit $\underline{O}_{X_s}$-régulière, X_o le sous-préschéma des zéros de t, $\hat{X}$ le complété formel de X le long de X_o. On suppose que pour tout $s \in S$, $X_{o\,s}$ est de profondeur ≥ 2 en ses points fermés, (i.e. X_s est de profondeur ≥ 3 aux points fermés de $X_{o\,s}$) et X_s est de profondeur ≥ 2 en ses points fermés. Sous ces conditions, le couple (X, X_o) satisfait la condition de Lefschetz effective (Leff) de X 2, i.e. :

a) Pour tout voisinage ouvert U de X_o dans X, le foncteur

$$F \rightsquigarrow \hat{F}$$

de la catégorie des Modules cohérents localement libres sur U dans la catégorie des Modules cohérents localement libres sur $\hat{X}$ est pleinement fidèle.

b) Pour tout Module cohérent localement libre $\underline{F}$ sur $\hat{X}$, il existe un voisinage ouvert U de X_o, et un Module cohérent localement libre F sur U, tel que $\underline{F}$ soit isomorphe à $\hat{F}$.

En effet, a) a déjà été noté dans 2.4. sous des conditions plus faibles. Pour b), on applique 3.1. qui donne la conclusion, du moins si S est noethérien et admet un Module inversible absolument ample, en particulier si S est affine. En effet, si F est un Module cohérent sur X tel que $\hat{F}$ soit isomorphe à $\underline{F}$ donc localement libre, il s'ensuit que F est localement libre sur un voisinage ouvert U de X_o, et $F \mid U$ satisfera la condition voulue. Mais notons maintenant qu'en vertu de 2.5., pour un tel F, son image par l'immersion $U \to X$ est cohérente, et d'ailleurs indépendante de la solution (U,F) choisie (compte tenu que deux solutions coïncident au voisinage de X_o, en vertu de a)). De façon précise, on peut trouver un Module cohérent F sur X et un isomorphisme $\hat{F} \xrightarrow{\sim} \underline{F}$, tels que F soit de profondeur ≥ 2 en tous les points de X qui soient fermés dans leur fibre, et ceci détermine F à un isomorphisme unique près. Grâce à cette propriété d'unicité, les solutions du problème qu'on trouve en s'induisant au-dessus des ouverts affines de S se recollent, d'où un F cohérent sur X tout entier et un isomorphisme $\hat{F} \simeq \underline{F}$. Restreignant F à l'ouvert U des points en lesquels il est libre, on trouve ce qu'on a cherché.

Grâce à 2.4. et 3.4., on peut exploiter, dans la situation d'un schéma algébrique projectif et d'une "section hyperplane" dudit, les faits généraux établis dans les exposés X et XI concernant les conditions (Lef) et (Leff). Ainsi :

Corollaire 3.5. Soient X un schéma algébrique projectif muni d'un Module inversible ample $\underline{O}_X(1)$, soit t une section de ce Module qui soit $\underline{O}_X$-régulière, et soit X_o le sous-schéma des zéros de t. Supposons que X soit de profondeur $\geqslant 2$ en ses points fermés (resp. et de profondeur $\geqslant 3$ en les points fermés de X_o). Alors $\pi_o(X_o) \rightarrow \pi_o(X)$ est bijectif, en particulier X est connexe si et seulement si X_o l'est, et choisissant un point-base géométrique dans X_o, $\pi_1(X_o) \rightarrow \pi_1(X)$ est surjectif, et plus généralement pour tout ouvert $U \supset X_o$, l'homomorphisme $\pi_1(X_o) \rightarrow \pi_1(U)$ est surjectif (resp. l'homomorphisme $\pi_1(X_o) \rightarrow \varprojlim_U \pi_1(U)$ est bijectif). Dans le cas respé, si on suppose de plus que l'anneau local de tout point fermé de X non dans X_o est pur (X 3.2) - par exemple est régulier, ou seulement une intersection complète) alors $\pi_1(X_o) \rightarrow \pi_1(X)$ est un isomorphisme.

On applique X 2.6. et 3.4. On notera que dans le cas respé, l'hypothèse que X soit de profondeur $\geqslant 3$ en les points fermés de X_o, implique que toutes les composantes irréductibles de dimension $\neq 0$ de X sont de dimension $\geqslant 3$ (comme on voit en notant qu'une telle composante rencontre nécessairement X_o, et en regardant en un point fermé de l'intersection).

Remarque. Lorsque X est normal, de dimension $\geqslant 2$ en tous ses points, il est de profondeur $\geqslant 2$ en ses points fermés et on est sous les conditions non respées de 3.5. Dans ce cas, on a une démonstration plus élémentaire de la surjectivité de $\pi_1(X_o) \rightarrow \pi_1(X)$ à l'aide du théorème de BERTINI (cf. SGA 1 X 2.10.). Lorsqu'on suppose de plus X_o normal, et X de dimension $\geqslant 3$ en tous ses points, alors on est sous les conditions respées de 3.5. Dans ce cas, 3.5 a été établi par GRAUERT (il se trouve en effet que grâce à l'hypothèse de normalité, on arrive alors à se passer du théorème d'existence 3.1 par des expédients). C'est cette démonstration de Grauert qui a été le point de départ de la "théorie de Lefschetz" qui fait l'objet du présent séminaire.

Corollaire 3.6. *Soient* X, $\underline{O}_X(1)$, t, X_o *comme dans* 3.5. *Supposons que* X *soit de profondeur* $\geqslant 2$ *en ses points fermés, et que*

$$H^i(X_o, \underline{O}_{X_o}(-n)) = 0 \qquad \text{pour} \qquad n > 0$$

et pour $i=1$ (*resp. pour* $i=1$ *et pour* $i=2$) *- ce qui implique en vertu de* 1.4. *que* X_o *est de profondeur* $\geqslant 2$ (*resp.* $\geqslant 3$) *en ses points fermés, i.e. que* X *est de profondeur* $\geqslant 3$ (*resp.* $\geqslant 4$) *en les points fermés de* X_o. *Sous ces conditions, pour tout voisinage ouvert* U *de* X_o, $\mathrm{Pic}(U) \to \mathrm{Pic}(X_o)$ *est injectif, en particulier* $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_o)$ *est injectif,* (*resp.* $\varinjlim_U \mathrm{Pic}(U) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_o)$ *est bijectif*). *Dans le cas respé, si on suppose de plus que l'anneau local de* X *en tout point fermé non dans* X_o *est parafactoriel* (XI 3.1) (*par exemple est régulier, ou plus généralement une intersection complète*), *alors* $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_o)$ *est bijectif*.

On applique XI 3.12 et 3.13, en notant que l'hypothèse respée implique que les composantes irréductibles de dimension $\neq 0$ de X sont de dimension $\geqslant 4$. On trouve en particulier, en appliquant ceci au cas où X est une intersection complète globale de dimension $\geqslant 4$ dans l'espace projectif :

Corollaire 3.7. *Soit* X *un schéma algébrique de dimension* $\geqslant 3$, *qui soit une intersection complète dans un schéma* P^r_k. *Alors* $\mathrm{Pic}(X)$ *est le groupe libre engendré par la classe du faisceau* $\underline{O}_X(1)$.

On raisonne par récurrence sur le nombre d'hypersurfaces dont X est l'intersection, en appliquant 3.6. et notant que pour une intersection complète X de dimension $\geqslant 3$, on a $H^i(X, \underline{O}_X(n)) = 0$ pour $i=1,2$, et tout n.

Remarque 3.8. Dans le cas où X est une hypersurface non singulière, 3.7. est dû à Andreotti. Le résultat 3.7. s'exprime aussi (lorsque X est non singulière) en disant que l'anneau de coordonnées homogènes de X est factoriel, et sous cette forme est contenu dans XI 3,13 (ii). Signalons aussi que Serre avait donné une démonstration de 3.7 dans le cas non singulier, par voie transcendante, en utilisant un argument de spécialisation pour se ramener au cas de la caractéristique 0, où on dispose du théorème de Lefschetz sous sa forme classique. Bien entendu, le fait que la démonstration purement algébrique donnée ici, permette de se débarrasser d'hypothèses de non singularité dans l'énoncé du théorème de Lefschetz, invite à reconsidérer celui-ci également dans le cas classique. Cf. l'exposé suivant qui propose des conjectures dans ce sens.

Dans les corollaires 3.5 à 3.7 nous nous sommes placés sur un corps de base, alors que les théorèmes-clefs 2.4 et 3.4 sont valables sur une base quelconque. Pour généraliser à un S général ces corollaires 3.5 et 3.6, nous devons donner des critères serviables pour qu'un point de X (plat sur S) ait un anneau local "pur" resp. parafactoriel. Ce sera l'objet du n° suivant.

4. Complétion formelle et platitude normale.

Théorème 4.1. *Soient X un préschéma localement noethérien, localement immergeable dans un schéma régulier, Y une partie fermée de X, U=X-Y, X_o un sous-préschéma fermé de X défini par un Idéal* $\underline{J}$, $\hat{X}$ *le complété formel de X le long de* X_o, U_o *la trace de* X_o *sur U,* $\hat{U}$ *le complété formel de U le long de* U_o, $i: U \to X$ *et* $\hat{i}: \hat{U} \to \hat{X}$ *les immersions canoniques, n un entier. On suppose :*

a) *X est normalement plat le long de* X_o *aux points de* $Y \cap X_o$, *i.e. en ces points les modules* $\underline{J}^n/\underline{J}^{n+1}$ *sur* X_o *sont plats i.e. libres.*

b) *Pour tout* $x \in Y \cap X_o$, *on a* prof $\underline{O}_{X_o,x} \geq n+2$.

Sous ces conditions, on a ce qui suit :

1°) *Soit* F *un Module cohérent sur* U , *supposons que l'on ait* :

c) *Pour tout* $x \in Y - Y \cap X_0$, *on a* prof $\underline{O}_{X,\,x} \geqslant n+2$.

d) F *est libre en les points de* U_0 , *et de profondeur* $\geqslant n+1$ *en tous les points de* U *où il n'est pas libre* .

Alors le Module gradué

$$\coprod_{m \geqslant 0} R^p i_* (\underline{J}^m F)$$

sur $\coprod_{m \geqslant 0} \underline{J}^m$ *est de type fini pour* $p \leqslant n$.

2°) *Soit* $\underline{F}$ *un Module cohérent localement libre sur* $\hat{U}$, *alors le Module gradué*

$$\coprod_{m \geqslant 0} R^p i_* (\underline{J}^m \underline{F}/\underline{J}^{m+1}\underline{F})$$

sur $\coprod_{m \geqslant 0} \underline{J}^m/\underline{J}^{m+1} = gr_{\underline{J}}(\underline{O}_X)$ *est de type fini pour* $p \leqslant n$.

Démonstration

1°) Soit $X' = \mathrm{Spec}(\coprod_{m \geqslant 0} \underline{J}^m)$; le changement de base $f : X' \to X$ définit alors $U' = X' - Y'$, X'_0 , $U'_0 = X'_0 \; U'$, et des immersions $i' : U' \to X'$, $i'_0 : U'_0 \to X'_0$
On a donc un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "f"'] & U' \arrow[l, "i'"'] \arrow[d, "g"] \\ X & U \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd}$$

et on a

$$(19) \qquad \coprod_{m \geqslant 0} R^p i_* (\underline{J}^m F) = R^p i_* (\coprod_{m \geqslant 0} \underline{J}^m F) = R^p i_* (g_*(F')) \quad .$$

où $F' = g^*(F)$, de sorte que l'on a bien un isomorphisme canonique

$$g_*(F') \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{m \geqslant 0} \underline{J}^m F \quad ,$$

car c'est vrai en les points de U_o , du fait que F y est libre en vertu de d), et également en les points de $U-U_o$, du fait qu'on y a $\underline{J}^m = \underline{O}_U$, (de sorte que dans les deux cas, $\underline{J}^m \otimes_{\underline{O}_U} F \longrightarrow \underline{J}^m F$ est un isomorphisme) .

D'autre part, comme f et par suite g sont affines, on a

$$(20) \qquad R^p i_*(g_*(F')) = R^p(ig)_*(F') = R^p(fi')_*(F') = f_*(R^p i'_*(F'))$$

donc comparant (19) et (20), on voit que l'assertion 1°) est équivalente à la suivante : $R^p i'_*(F')$ est un Module de type fini i.e. cohérent sur X' , pour tout $p \leqslant n$. Or comme X est localement immergeable dans un schéma régulier, il en est de même de X' qui est de type fini sur X , et on peut appliquer le critère de cohérence (VIII 2.3) à un prolongement cohérent F'' de F' : on veut exprimer que $\underline{H}^p_{Y'}(F'')$ est cohérent pour $p \leqslant n+1$, et cela équivaut aussi à dire que pour tout $x' \in U'$ tel que

$$(20 \text{ bis}) \qquad \operatorname{codim}(\overline{x'} \cap Y', \overline{x'}) = 1 \ ,$$

on ait

$$(21) \qquad \operatorname{prof} F'_{x'} \geqslant n+1$$

Or cette condition est vérifiée en les points x' où F' n'est pas libre, car pour un tel x' on a $x' \notin U'_o$ en vertu de d), donc g y est un isomorphisme, et en vertu de d) encore F est de profondeur $\geqslant n+1$ en $g(x')$, donc F' est de profondeur $\geqslant n+1$ en x' . Il suffit donc de vérifier la condition (21) en les $x' \in U'$ satisfaisant (21), et en lesquels F' est libre. Or il suffit pour cela de prouver que l'on a

(21 bis) $$\operatorname{prof} \underline{O}_{X',x'} \geqslant n+1$$

en ces points, à fortiori il suffit d'établir que l'on a cette relation en tous les points x de U' satisfaisant (20) . Or en vertu du critère cité de l'exposé VIII, ceci équivaut à l'assertion que les Modules

$$\underline{H}^p_{Y'}(\underline{O}_{X'}) \qquad \text{pour} \quad p \leqslant n+1$$

sont cohérents. En fait, nous allons prouver qu'ils sont même nuls, ou ce qui revient au même en vertu de l'exposé III, que l'on a

(22) $$\operatorname{prof} \underline{O}_{X',x'} \geqslant n+2 \qquad \text{pour tout} \quad x' \in Y' .$$

Pour ceci, nous distinguons deux cas. Si $x' \notin X'_o$, alors f est un isomorphisme en x', et il faut vérifier que F est de profondeur dans l'image $x=f(x')$, ce qui n'est autre que la condition c). Si par contre $x' \in X'_o$, i.e. $x=f(x') \in X_o$ donc $x \in Y \cap X_o$, on applique les conditions a) et b), grâce au

Lemme 4.2. Soient X un préschéma localement noethérien, X_o un sous-préschéma fermé de X défini par un Idéal $\underline{J}$, $X' = \operatorname{Spec}(\coprod_{m \geqslant 0} \underline{J}^m)$, $X'_o = \operatorname{Spec}(\coprod_{m \geqslant 0} \underline{J}^m/\underline{J}^{m+1}) = X' \times_X X_o$, x un point de X_o en lequel X est normalement plat le long de X_o i.e. tel que $\operatorname{gr}_{\underline{J}}(\underline{O}_X) = \coprod_{m \geqslant 0} \underline{J}^m/\underline{J}^{m+1}$ y soit plat comme Module sur X_o . Alors pour toute suite d'éléments f_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ de $\underline{O}_{X,x}$ dont les images dans $\underline{O}_{X_o,x}$ forment une suite $\underline{O}_{X_o,x}$-régulière, et tout $x' \in X'$ au-dessus de x , les images des f_i dans $\underline{O}_{X',x'}$ (resp. dans $\underline{O}_{X'_o,x'}$) forment également une suite $\underline{O}_{X',x'}$-régulière (resp. $\underline{O}_{X'_o,x'}$-régulière), en particulier on a

(23) $$\operatorname{prof} \underline{O}_{X',x'} \geqslant \operatorname{prof} \underline{O}_{X_o,x} \quad , \quad \operatorname{prof} \underline{O}_{X'_o,x'} \geqslant \operatorname{prof} \underline{O}_{X_o,x} \quad .$$

Pour le démontrer, on peut supposer que X est local de point fermé x, donc affine d'anneau $A=\underline{O}_{X,x}$, $\underline{J}$ étant défini par un Idéal J, et il suffit de prouver que pour toute suite f_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ d'éléments de A dont les images dans A/J forment une suite A/J-régulière, les f_i forment également une suite $(\coprod_{m \geqslant 0} J^m)$-régulière et une suite $(\coprod_{m \geqslant 0} J^m/J^{m+1})$-régulière, i.e. pour tout m, elle forme une suite J^m-régulière et J^m/J^{m+1} régulière. La deuxième assertion est triviale, puisque $\underline{J}^m/\underline{J}^{m+1}$ est un module libre sur A/J. La première s'ensuit, en regardant la filtration J-adique de J^m, et notant que pour le module gradué associé à J^m pour ladite filtration, la suite des f_i est régulière.

Cela prouve 4.2 et par suite 4.1 1°)

Prouvons 4.1. 2°). Pour ceci, nous utilisons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X'_o \arrow[d, "f_o"'] & U'_o \arrow[l, "i'_o"'] \arrow[d, "g_o"] \\ X_o & U_o \arrow[l, "i_o"] \end{tikzcd} ,$$

et procédant comme dans le début de la démonstration de 1°), on trouve que l'on a

$$(24) \qquad \coprod_{m \geqslant 0} R^p i_*(\underline{J}^m\underline{F}/\underline{J}^{m+1}\underline{F}) \simeq f_{o*}(R^p i_{o*}(\underline{F}'_o)) ,$$

où $\underline{F}_o = \underline{F}/\underline{JF}$ et où $\underline{F}'_o = g_o^*(\underline{F}_o)$, (en utilisant le fait que $\underline{F}$ est localement libre). Donc la conclusion de 2°) équivaut à dire que pour $p \leqslant n$, $R^p i'_{o*}(\underline{F}'_o)$ est un Module cohérent.

Ici encore, compte tenu que $\underline{F}'_o$ est localement libre, le critère (VIII 2.3) nous permet de nous ramener à prouver qu'il en est ainsi si on remplace $\underline{F}'_o$ par $\underline{O}_{U'_o}$, i.e. à prouver que les Modules

$$\underline{H}^p_{Y'_o}(\underline{O}_{X'_o}) \qquad \text{pour} \quad p \leqslant n+1 \qquad (\text{où } Y'_o = Y' \cap X'_o = X'_o - U'_o)$$

sont cohérents. On prouve encore qu'ils sont en fait nuls, i.e. que l'on a

$$\text{prof } \underline{O}_{X'_o,x'} \geqslant n+2 \qquad \text{pour tout } x' \in Y'_o \tag{25}$$

Or ceci résulte en effet des conditions a) et b), compte tenu de 4.2. Cela achève la démonstration de 4.1.

Remarque 4.3. On voit tout de suite, par descente, que l'hypothèse : X localement immergeable dans un schéma régulier, peut être remplacée par la suivante plus faible : il existe un morphisme $\overline{X} \longrightarrow X$, fidèlement plat et quasi-compact, tel que $\overline{X}$ soit localement immergeable dans un schéma régulier.

Le théorème 4.1. nous met en mesure d'appliquer les résultats de l'exposé IX (théorèmes de comparaison et d'existence). Nous nous intéressons notamment au

Corollaire 4.4. Supposons les conditions a), b), c) du théorème 4.1. vérifiées, avec $n=1$, et $X=\mathrm{Spec}(A)$, A étant séparé complet pour la topologie J-adique. Alors :

1°) Le foncteur $F \rightsquigarrow \hat{F}$ de la catégorie des Modules cohérents localement libres sur U, dans la catégorie des Modules cohérents localement libres sur $\hat{U}$, est pleinement fidèle.

2°) Pour tout Module cohérent localement libre $\underline{F}$ sur $\hat{U}$, il existe un Module cohérent F sur U et un isomorphisme $\hat{F} \xrightarrow{\sim} \underline{F}$.

En particulier, si pour tout $x \in U$ dont l'adhérence dans U ne rencontre pas U_o i.e. tel que $\overline{x} \cap X_o \subset Y$, on a $\text{prof } \underline{O}_{U,x} \geqslant 2$, alors le couple (U,U_o) satisfait la condition de Lefschetz effective (Leff) de l'exposé X.

(Pour la dernière assertion, on procède comme dans X 2.1)

Cas particulier de 4.4 :

Corollaire 4.5. Soient A un anneau local noethérien, J un idéal de A contenu dans le radical, $A_c = A/J$. On suppose

(i) prof $A_o \geqslant 3$.

(ii) $gr_J(A)$ est un A_o-module libre .

(iii) A est complet pour la topologie J-adique .

Soient $X = \mathrm{Spec}(A), X_o = \mathrm{Spec}(A_o) = V(J)$, a le point fermé de X, $U = X - \{a\}$, $U_o = U - \{a\}$, $\hat{U}$ le complété formel de U le long de U_o . Alors le foncteur $F \rightsquigarrow \hat{F}$ de la catégorie des Modules cohérents localement libres sur U dans la catégorie des Modules cohérents localement libres sur $\hat{U}$, est pleinement fidèle . De plus, pour tout Module cohérent localement libre $\underline{F}$ sur $\hat{U}$, il existe un Module cohérent (pas nécessairement localement libre !) F sur U , et un isomorphisme $\hat{F} \simeq \underline{F}$.

On notera que grâce à 4.3 , nous n'avons pas eu à supposer que A est quotient d'un anneau régulier, car le complété de A pour la topologie $\underline{r}(A)$-adique satisfait en tous cas à cette condition.

Procédant comme dans les exposés X et XI, on conclut de 4.5. :

Corollaire 4.6. Sous les conditions de 4.5. on a ceci :

a) U et U_o sont connexes (III 3.1) .

Choisissant un point-base géométrique dans U_o , l'homomorphisme

$$\pi_1(U_o) \to \pi_1(U)$$

est surjectif .

b) L'homomorphisme

$$\mathrm{Pic}(U) \to \mathrm{Pic}(U_o)$$

est injectif .

Pour prouver b), compte tenu de 4.5. cela revient à vérifier que tout isomorphisme $\underline{L}'_o \xrightarrow{\sim} \underline{L}_o$ se remonte en un isomorphisme $\hat{\underline{L}}' \xrightarrow{\sim} \hat{\underline{L}}$. Or pour ceci on remonte de proche en proche en des isomorphismes $\underline{L}'_n \xrightarrow{\sim} \underline{L}_n$, les obstructions se trouvent dans $H^1(U_o, \underline{J}^n/\underline{J}^{n+1})$, or ces modules sont nuls du fait que J^n/J^{n+1} est libre et prof $A_o \geqslant 3$.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le

Théorème 4.7. Soient A un anneau local noethérien, J un idéal de A contenu dans son radical, $A_o = A/J$. On suppose

(i) prof $A_o \geqslant 3$.

(ii) $gr_J(A)$ est un module libre sur A_o.

Alors, si A_o est "pur" (X 3.1) (resp. parafactoriel, (XI 3.1)), il en est de même de A.

Démonstration. Par descente, on peut supposer qu'on a aussi

(iii) A est complet pour la topologie J-adique .

En effet, en vertu de (i) et (ii), on a prof$(A) \geqslant 3$ donc prof $\hat{A} \geqslant 3$, où $\hat{A}$ est le complété de A pour la topologie J-adique, et on applique (X 3.6) et (XI 3.6). On est donc sous les conditions de 4.5. Comme prof $A \geqslant 3 \geqslant 2$, dire que A est parafactoriel signifie simplement que $\mathrm{Pic}(U)=0$, et en vertu de 4.6. b) il suffit pour ceci que $\mathrm{Pic}(U_o)=0$ i.e. que A_o soit parafactoriel . Pour prouver que A est "pur" si A_o l'est, il faut prouver que si V est un revêtement étale de U, défini par une Algèbre $\underline{B}$ sur U, alors $H^o(U,\underline{B})$ est une algèbre finie étale sur A. Or A_o étant pur, il en est de même des A_n (qui n'en diffèrent que par des éléments nilpotents), donc pour tout n, $H^o(U,\underline{B}_n)$ est une algèbre étale sur A/J^{n+1}, et bien entendu ces algèbres se recollent, de sorte que $\varprojlim B_n$ est une algèbre étale sur A. Or en vertu de 4.5. cette algèbre n'est autre que $H^o(U,\underline{B})$, ce qui établit notre assertion .

Corollaire 4.8. Soient $f : X \to Y$ un morphisme plat de préschémas localement noethériens, $x \in X$, $y = f(x)$, on suppose que $\underline{O}_{X_y,x}$ est un anneau local "pur" (resp. parafactoriel) de profondeur $\geqslant 3$, alors il en est de même de $\underline{O}_{X,x}$.

C'est le résultat du type promis à la fin du N° précédent, pour généraliser les corollaires 3.5 et suivants. On trouve donc, utilisant 3.4., le

Corollaire 4.9. Soient $f : X \to S$ un morphisme projectif et plat, avec S localement noethérien, $\underline{O}_X(1)$ un Module inversible sur X ample par rapport à S, t une section de $\underline{O}_X(1)$ telle que pour tout $s \in S$, la section t_s induite sur X_s soit $\underline{O}_{X_s}$-régulière, X_o le sous-schéma des zéros de t, X_m le sous-préschéma des zéros de t^m. On suppose que pour tout $s \in S$, X_s est de profondeur $\geqslant 3$ en tous ses points fermés. Alors :

a) Si les anneaux locaux des points fermés des $X_s - X_{o,s}$ $(s \in S)$ sont "purs", par exemple sont des intersections complètes, alors le foncteur $X' \rightsquigarrow X'_o = X' \times_X X_o$ de la catégorie des revêtements étales de X dans la catégorie des revêtements étales de X_o est une équivalence de catégories; en particulier, choisissant un point base géométrique dans X_o, l'homomorphisme

$$\pi_1(X_o) \to \pi_1(X)$$

est un isomorphisme.

b) Si les anneaux locaux des points fermés des $X_s - X_{o,s}$ $(s \in S)$ sont "parafactoriels", par exemple réguliers, ou des intersections complètes de dimension $\geqslant 4$, alors pour tout entier m tel que $R^i f_{o*}(\underline{O}_{X_o}(-n)) = 0$ pour $n > m$ et $i = 1,2$, l'application $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X_m)$ est bijective. D'ailleurs si S est noethérien, et les $X_{o,s}$ sont de profondeur $\geqslant 3$ en leurs points fermés, il existe de tels m (cf 1.5.).

<u>Remarque</u> 4.10. Sous les conditions de la dernière assertion de 4.9. b), on a vu dans 1.5. qu'il existe un m tel que $n > m$ implique même $H^i(X_s, \underline{O}_{X_s}(-n)) = 0$ pour $i = 1,2$, (et même pour $i \leqslant 2$). Cette condition est plus forte que $R^i f_*(X_s, \underline{O}_{X_s}(-n)) = 0$ pour $i=1,2$, et elle a de plus l'avantage d'être stable par changement de base. Il en est de même des hypothèses de profondeur qu'on a faites dans 4.9, et également d'une hypothèse du type "les X_s sont localement des intersections complètes". Il s'ensuit alors, sous ces conditions, que 4.9. b) implique également que le morphisme de foncteurs

$$\underline{\underline{\mathrm{Pic}}}_{X/S} \longrightarrow \underline{\underline{\mathrm{Pic}}}_{X_n/S}$$

dans $(\mathrm{Sch})_{/S}$ est un isomorphisme, donc aussi le morphisme pour les schémas de Picard relatifs, lorsque ceux-ci existent :

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Pic}}_{X_n/S} \quad .$$

Même dans le cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos, cet énoncé est nettement plus précis que l'énoncé consistant à dire seulement que $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_n)$ est bijectif.

On peut se demander si on peut toujours prendre $n=0$ dans les conclusions précédentes (supposant donc les $X_{o,s}$ de profondeur $\geqslant 3$ en leurs points fermés). Lorsque X_o est lisse sur S et les caractéristiques résiduelles de S sont nulles, il en est bien ainsi, en vertu du "vanishing theorem" de Kodaira, (démontré par voie transcendante, utilisant une métrique kählérienne) qui implique que pour tout schéma projectif lisse connexe de dimension n sur un corps k de car nulle, et tout Module inversible ample $\underline{L}$ sur X, on a $H^i(X, \underline{L}^{-1}) = 0$ pour $i \neq n$. Il n'est pas connu à l'heure actuelle si ce théorème admet une généralisation en caractéristique $p > 0$, et si l'hypothèse de lissité peut être remplacée par une hypothèse de nature plus générale (portant sur la profondeur, ou du type "intersection complète"...).

5. Conditions de finitude universelles pour un morphisme non propre.

Rappelons pour mémoire la

Proposition 5.1. Soient $f: X \to S$ un morphisme propre de préschémas, avec S localement noethérien, U une partie ouverte de X, $g: U \to X$ l'immersion canonique, $h=fg: U \to S$, F un Module sur U. Supposons que les Modules $R^i g_*(F)$ soient cohérents pour $i \leqslant n$ (hypothèse de nature locale sur X, qui se vérifie pratiquement à l'aide du critère VIII 2.3). Alors $R^i h_*(F)$ est cohérent pour $i \leqslant n$.

Cela résulte aussitôt de la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = R^p f_*(R^q g_*(F)) \Longrightarrow R^* h_*(F) , \tag{26}$$

et du fait que les images directes supérieures par f d'un Module cohérent sur X est cohérent (EGA III 3.2.1).

Proposition 5.2. Soient S un préschéma localement noethérien, $\underline{S}$ une Algèbre graduée quasi-cohérente, de type fini sur S, engendrée par $\underline{S}_1$, X un sous-préschéma de $\mathrm{Proj}(\underline{S})$, $\underline{O}_X(1)$ le Module inversible sur X très ample relativement à S induit par $\mathrm{Proj}(\underline{S}(1))$, U une partie ouverte de X, $g: U \to X$ l'immersion canonique, $h=fg: U \to S$, F un Module quasi-cohérent sur U, d'où des Modules tordus $F(m)=F\otimes \underline{O}_X(m)$ $(m \in \underline{Z})$, n un entier, m_0 un entier. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $R^i g_*(F)$ est cohérent pour $i \leqslant n$.

(ii) $\bigoplus_{m \geqslant m_0} R^i h_*(F(m))$ est un $\underline{S}$-Module de type fini pour $i \leqslant n$.

Démonstration. Remplaçant dans la suite spectrale ci-dessus F par $F(m)$ on trouve une suite spectrale de $\underline{S}$-Modules gradués

$$E_2^{p,q} = \coprod_{m \geqslant m_0} R^p f_*(R^q g_*(F(m))) \Longrightarrow \coprod_{m \geqslant m_0} R^* h_*(F(m)) \quad .$$

Comme on a

$$R^q g_*(F(m)) \simeq R^q g_*(F)(m) \quad ,$$

on voit que si les $R^i g_*(F)$ sont cohérents, $E_2^{p,q}$ est de type fini sur $\underline{S}$ pour $q \leqslant n$, grâce à la partie a) du lemme 5.3. ci-dessous, ce qui implique que l'aboutissement est de type fini sur $\underline{S}$ en degré $i \leqslant n$. Cela prouve (i) $\Rightarrow$ (ii). De plus, raisonnant dans la catégorie abélienne des $\underline{S}$-Modules gradués mod. la sous-catégorie épaisse $\underline{C}$ de ceux qui sont quasi-cohérents de type fini, on trouve par la suite spectrale précédente

$$\coprod_{m \geqslant m_0} R^{n+1} h_*(F(m)) \cong \coprod_{m \geqslant m_0} f_*(R^{n+1} g_*(F)(m)) \qquad \mathrm{mod}\ \underline{C} \quad ,$$

ce qui prouve que si le membre de gauche est un $\underline{S}$-Module de type fini, alors $R^{n+1} g_*(F)$ est cohérent, en vertu de la partie b) du lemme 5.3. Ceci prouve l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) par récurrence sur n. Reste à prouver :

Lemme 5.3. *Soient* $S, \underline{S}, X, f$ *comme dans* 5.2., *et* G *un Module quasi-cohérent sur* X, m_0 *un entier. Alors*

a) *Si* G *est cohérent, alors pour tout entier* i, *le Module gradué*

$$\coprod_{m \geqslant m_0} R^i f_*(G(m))$$

sur $\underline{S}$ *est de type fini*.

b) *Inversement, supposons que le Module* $\coprod_{m \geqslant m_0} f_*(G(m))$ *sur* $\underline{S}$ *soit de type fini, alors* G *est cohérent*.

Démonstration de 5.3. Pour a), le cas $i=0$ est donné dans EGA III 2.3.2, le cas $i > 0$ dans EGA III 2.2.1 (i)(ii) qui dit que les $R^i f_* G(m)$ sont cohérents, et nuls pour m grand (si on suppose S noethérien, ce qui est loisible). Pour b), on note que G est isomorphe à Proj$(\coprod_{m \geq m_0} f_*(G(m))$ (EGA II 3.4.4 et 3.4.2), ce qui prouve que G est cohérent si $\coprod_{m \geq m_0} f_*(G(m))$ est de type fini sur S, en vertu de loc. cit. 3.4.4.

Corollaire 5.4. (S noethérien). *Supposons que* $R^i g_*(F)$ *soit cohérent pour* $i \leq n$, *alors pour* $i \leq n+1$, *et* m *grand, on a un isomorphisme canonique* :

$$R^i h_*(F(m)) \simeq f_*(R^i g_*(G)(m)) \quad .$$

En effet, la suite spectrale (26) pour $F(m)$ dégénère alors en degré $\leq n$, par EGA III 2.2.1 (ii), d'où aussitôt le résultat (qui redonne d'ailleurs l'implication (ii) $\Rightarrow$(i) de 5.2).

Corollaire 5.5. *Sous les conditions préliminaires de* 5.2., S *noethérien*, *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) $\coprod_{m \geq m_0} h_*(F(m))$ *est de type fini sur* S, *et* $R^i h_*(F(m))=0$ *pour* $0 < i \leq n$ *et* m *grand*.

(ii) $g_*(F)$ *est cohérent, et* $R^i g_*(F) = 0$ *pour* $0 < i \leq n$.

(ii bis) $g_*(F)$ *est cohérent, et* $\mathrm{prof}_Y\, g_*(F) > n+1$.

L'équivalence de (ii) et (ii bis) est contenue dans III 3.3. D'ailleurs, en vertu de 5.2 les conditions (i) et (ii) impliquent toutes deux que les $R^i g_*(F)$ $(i \leq n)$ sont cohérents. L'équivalence de (i) et (ii) résulte alors de 5.4., compte tenu du fait que pour un Module cohérent G sur X, on a $G=0$ si et seulement si $f_*(G(m))=0$ pour m grand, par exemple en vertu de EGA III 2.2.1 (iii).

Remarque 5.6. On peut interpréter les critères 5.2 et 5.5 en disant que la "condition de finitude simultanée" 5.2. (ii) s'exprime par des propriétés de régularité locale (en termes de profondeur, grâce à VIII 2.1) de F en les points de U voisins de $Y=X-U$, alors que la "condition de nullité assymptotique" 5.5 (i) est de nature nettement plus forte, et s'exprime par des conditions de régularité locale de $g_*(F)$ en les points de Y lui-même. Il serait intéressant, pour généraliser les théorèmes à la Lefschetz pour les morphismes projectifs aux morphismes quasi-projectifs, de trouver des critères locaux sur X nécessaires et suffisants pour que les $\underline{S}$-Modules $\coprod_{m \geqslant 0} R^i h_*(F(-m))$ pour $i \leqslant n$ soient de type fini. Lorsque S est le spectre d'un corps (et sans doute plus généralement, si c'est le spectre d'un anneau artinien) et $Y=X-U$ est fini, on peut montrer qu'il est nécessaire et suffisant que les conditions suivantes soient vérifiées :

1°) $\operatorname{prof} F_x > n$ pour tout point fermé x de U (comparer 1.4)

2°) $R^i g_*(F)$ est cohérent pour $i \leqslant n$, ou ce qui revient au même, il existe un voisinage ouvert V de Y tel que pour tout point fermé x de $U \cap V$, on ait $\operatorname{prof} F_x > n+1$.

Proposition 5.7. *Soient S un préschéma localement noethérien, $g\colon U \to X$ un morphisme de préschémas de type fini sur S (*), de morphismes structuraux h et f, F un Module quasi-cohérent sur U, n un entier. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout changement de base $S' \to S$, avec S' noethérien, le Module $R^n g'_*(F')$ sur X' est cohérent.*

(ii) *Pour tout changement de base comme ci-dessus, et tout Idéal cohérent $\underline{J}$ sur S', désignant par $\underline{I}$ l'Idéal $\underline{J}\underline{O}_{X'}$ sur X', le Module gradué*

$$\coprod_{m \geqslant 0} R^n g'_*(\underline{I}^m F')$$

sur $\coprod_{m \geqslant 0} \underline{I}^m$ est de type fini.

(*) Il suffit en fait que g soit quasi-compact et quasi-séparé (EGA IV 1.2.1), sans condition sur U, X.

(iii) Pour tout changement de base $S' \to S$, et J comme ci-dessus, le Module gradué

$$\coprod_{m \geqslant 0} R^n g'_*(\underline{I}^m F'/\underline{I}^{m+1} F')$$

sur $gr_I(\underline{O}_{X'}) = \coprod_{m \geqslant 0} \underline{I}^m/\underline{I}^{m+1}$ est de type fini .

Evidemment (ii) $\Rightarrow$ (i) et (iii) $\Rightarrow$ (i) , comme on voit en faisant $\underline{I}=0$ dans les conditions (ii) et (iii) . Les implications inverses s'obtiennent en appliquant (i) au changement de base composé $S'' \to S' \to S$, où S'' est égal à Spec $\coprod_{m \geqslant 0} \underline{J}^m$ resp. Spec $\coprod_{m \geqslant 0} \underline{J}^m/\underline{J}^{m+1}$.

L'intérêt de cette proposition est que les conditions de la forme (ii) sont celles qui interviennent dans les "théorèmes de comparaison algébrico-formels", alors que les conditions de la forme (iii) interviennent dans les "théorèmes d'existence" qui les complètent, cf. exposé IX. Un premier cas intéressant est celui où $f: X \to S$ est l'identité, et où il s'agit donc de conditions sur un morphisme $h: U \to S$ localement de type fini et un Module F quasi-cohérent sur U plat par rapport à S . Pour obtenir des conditions suffisantes, nous allons supposer que U se plonge par $g: U \to X$ comme sous-préschéma ouvert d'un X propre sur S . Appliquant prop. 5.1 , on voit donc :

Corollaire 5.8. Soient $f: X \to S$ un morphisme propre, avec S localement noethérien, U un ouvert de X , $g: U \to X$ l'immersion canonique, $h=fg: U \to S$, F un Module quasi-cohérent sur X , plat par rapport à S . Supposons que pour tout changement de base $S' \to S$, avec S' localement noethérien, on ait $R^i g'_*(F')$ cohérent sur X' pour $i \leqslant n$. Alors on a ce qui suit :

(i) Pour tout changement de base $S' \to S$, avec S' localement noethérien, $R^i h'_*(F')$ est cohérent sur S' pour tout $i \leqslant n$.

(ii) Pour tout $S' \to S$ comme ci-dessus, et tout Idéal cohérent J sur S', les Modules gradués

$$\coprod_{m \geqslant 0} R^i h'_*(\underline{J}^n F')$$

sur $\coprod_{m \geqslant 0} \underline{J}^m$ sont de type fini pour $i \leqslant n$.

(iii) Pour tout $S' \to S$ et $\underline{J}$ comme ci-dessus, les Modules gradués

$$\coprod_{m \geqslant 0} R^i h'_* \, (\underline{J}^m F'/\underline{J}^{m+1} F')$$

sur $gr_{\underline{J}}(\underline{O}_{S'}) = \coprod_{m \geqslant 0} \underline{J}^m/\underline{J}^{m+1}$ sont de type fini pour $i \leqslant n$.

De plus, sous les conditions de (ii), et en vertu du théorème de comparaison IX 1.1 , désignant par $\hat{S}'$ le complété formel de S' par rapport à $\underline{J}$, et par U' celui de U' par rapport à $\underline{J}\underline{O}_{U'}$, les homomorphismes canoniques

$$R^i h'_*(F')^\wedge \longrightarrow R^i \hat{h}'_*(\hat{F}') \longrightarrow \varprojlim_k R^i h'_*(F'_k)$$

sont des isomorphismes pour $i \leqslant n-1$.

Remarque 5.9. Supposons qu'on soit sous les conditions de 5.8. avec F cohérent , et considérons un changement de base $S' \to S$ comme dans 5.9. (i) . Supposons de plus que S' soit localement immergeable dans un schéma régulier, ou plus généralement, qu'il existe un morphisme $S'' \to S'$ fidèlement plat et quasi-compact, tel que S'' soit localement immergeable dans un schéma régulier; cette condition est vérifiée en particulier si S' est local. Alors la conclusion de 5.8. (i) et (ii) reste valable lorsqu'on y remplace F' par un Module G' sur U' , tel que tout point de U' ait un voisinage ouvert sur lequel G' soit isomorphe à un Module de la forme F'^m . En effet, on est ramené au cas où S' lui-même est localement immergeable dans un schéma régulier, de sorte qu'il en est de même de $S'' = \mathrm{Spec}(\coprod_{m \geqslant 0} \underline{J}^m)$ et de $X'' = X' x_{S'} S'' = X x_S S''$, qui sont de type fini dessus. On applique alors le critère de finitude VIII 2.3 pour les images directes pour $i \leqslant n$ de G'' sous l'immersion $U'' \to X''$, en notant qu'elles sont satisfaites par hypothèses pour

F'' , donc aussi pour G'' puisqu'elles s'expriment en termes de profondeur et que G'' est localement isomorphe à un F''^n . Le même argument montre que si $\hat{\underline{G}}'$ est un Module cohérent sur $\hat{U}'$ (complété de U' par rapport à l'Idéal $\underline{J}\,\underline{O}_{U'}$), tel que $\underline{G}'_o = \underline{G}'/\underline{J}\,\underline{G}'$ soit localement de la forme F'^m_o , alors la conclusion de (iii) reste valable en y remplaçant F' par $\underline{G}'$. On obtient ainsi le résultat suivant, en utilisant les résultats de l'exposé IX :

Corollaire 5.10. Soient $f:X \to S$ un morphisme propre, avec S localement noethérien, U une partie ouverte de X ; on suppose U plat par rapport à S , et que pour tout changement de base $S' \to S$, avec S' localement noethérien, on ait $R^i g'_*(\underline{O}_{U'})$ cohérent sur X' pour $i=0,1$. Supposons alors que S' soit de la forme Spec(A), où A est un anneau noethérien muni d'un idéal J tel que A soit séparé et complet pour la topologie J-adique . Sous ces conditions :

(i) Le foncteur $F \rightsquigarrow \hat{F}$ de la catégorie des Modules localement libres sur U' dans la catégorie des Modules localement libres sur $\hat{U}'$ est pleinement fidèle .

(ii) Pour tout Module localement libre $\underline{F}$ sur $\hat{U}'$, il existe un Module cohérent F sur U' (pas nécessairement localement libre, hélas), et un isomorphisme $\hat{F} \simeq \underline{F}$.

Il reste seulement à prouver (ii), grâce à 5.9. Or d'après cette remarque et IX 2.1 il s'ensuit que $\underline{F}$ est induit par un Module cohérent $\underline{G}$ sur $\hat{X}'$. D'après le théorème d'existence EGA III 5.1.4 , $\underline{G}$ est de la forme $\hat{F}$, où F est cohérent sur X , d'où la conclusion .

Remarques 5.11.

1°) Utilisant 5.10, 4.7 et une hypothèse convenable, disant que certains anneaux locaux des fibres géométriques de $X' \to S'$ sont "purs" resp. parafactoriels, on doit pouvoir obtenir des énoncés disant que le foncteur $Z' \rightsquigarrow \hat{Z}'$ de la catégorie des revêtements étales de X' dans la catégorie des revêtements étales de $\hat{X}'$ (ou ce qui revient au même, de X'_o) est une équivalence de catégories, resp. que le foncteur $\underline{L} \rightsquigarrow \hat{\underline{L}}$ de la catégorie des Modules inversibles sur X' dans la catégorie des Modules inversibles sur $\hat{X}'$ est une équivalence. Utilisant des résultats récents de MURRE, il est probable que l'on doit pouvoir en déduire des théorèmes d'existence des schémas de Picard pour certains schémas algébriques <u>non propres</u>. De façon générale, l'élimination d'hypothèses de propreté dans divers théorèmes d'existence, notamment de représentabilité de foncteurs comme les foncteurs de Hilbert, ou de Picard etc..., à l'aide des techniques développées dans ce séminaire, mérite une étude systématique.

2°) On peut se proposer de donner des conditions nécessaires et suffisantes maniables, en termes de profondeur, pour que la condition de finitude universelle envisagée dans 5.10. soit vérifiée. Lorsque S est le spectre d'un corps, il résulte facilement de EGA III 1.4.15 qu'il faut et il suffit que les $R^i g_*(F)$ $(i \leqslant n)$ soient cohérents, ce qui s'exprime bien en termes de profondeur grâce à VIII 2.3. Dans le cas général, on notera cependant qu'il ne suffit pas d'exiger que la condition précédente soit vérifiée pour toutes les fibres $U_s \subset X_s$ $(s \in S)$, même dans le cas où $n=0$. Prendre par exemple $X=S$, S le spectre d'un anneau de valuation discrète, U l'ouvert réduit au point générique, $F = \underline{O}_U$.

3°) Voici cependant une condition <u>suffisante</u> assurant qu'on est sous les conditions de l'hypothèse de 5.10 : Il suffit que f soit plat, et que pour tout $s \in S$ et tout $x \in Y_s = X_s - U_s$, on ait

$$\operatorname{prof} \underline{O}_{X_S,x} \geqslant n+2 \quad .$$

En effet, compte tenu de lemme 2.5 (cf relation (16) après 2.5), il s'ensuit que l'on a alors $g_*(\underline{O}_U) \simeq \underline{O}_X$ et $R^i g_*(\underline{O}_U) = 0$ pour $0 < i \leqslant n$, et les mêmes relations seront évidemment vérifiées après tout changement de base $S' \to S$.

Exposé XIII

PROBLEMES ET CONJECTURES

1. Relations entre résultats globaux et locaux. Problèmes affines liés à la dualité.

Il est bien connu que beaucoup d'énoncés concernant un schéma projectif X peuvent se formuler en termes d'énoncés concernant un certain anneau gradué, ou mieux un anneau local complet, savoir l'anneau de coordonnées homogènes de X (i.e. l'anneau affine du cône projetant $\widetilde{X}$ de X), ou son complété (i.e. le complété de l'anneau local du sommet de $\widetilde{X}$) . L'intérêt de cette reformulation est qu'elle permet souvent à partir de résultats globaux connus, de conjecturer, voire de démontrer, des résultats analogues pour des anneaux locaux noethériens complets plus généraux que ceux qui interviennent réellement dans l'énoncé global, par exemple pour des anneaux locaux qui ne sont pas nécessairement d'égale caractéristique. Ainsi, le théorème de dualité de Serre pour l'espace projectif XII 1.1 a suggéré l'utile théorème de dualité locale V 5.6.
Le théorème fondamental de Serre sur la cohomologie des Modules cohérents sur l'espace projectif (finitude, comportement assymptotique pour n grand de $H^i(X,F(n))$, cf EGA III 2.2.1) se généralise en un théorème de structure pour les invariants locaux $H^i_{\underline{m}}(M)$, voir V 5.7 De même, les théorèmes de Lefschetz pour le groupe fondamental, et le groupe de Picard ("critères d'équivalence"), bien familiers dans le cas classique et étendus par la suite à un corps de base quelconque, ont suggéré les théorèmes de Lefschetz "locaux" des exposés X et XI. Bien entendu, les théorèmes locaux à leur tour sont des outils précieux pour obtenir des énoncés globaux. Par exemple la dualité locale permet de formuler une propriété asymptotique globale XII 1.3 (i) par l'annulation de certains invariants locaux $H^i(F_x)$. De façon plus substantielle, les théorèmes de Lefschetz locaux, impliquant par exemple la "pureté" ou la parafactorialité de certains anneaux locaux intersections complètes (X 3.4. et XI 3.13) permettent dans les théorèmes de Lefschetz globaux de se débarrasser de certaines hypothèses de non singularité, comme dans X 3.5 , 3.6 , 3.7.

Une autre généralisation utile des théorèmes concernant les schémas projectifs sur un corps k consiste à remplacer k par un schéma de base général. Ainsi, la suite de EGA III donnera une généralisation dans ce sens de la dualité de Serre (*) ; les théorèmes de finitude et de comportement asymptotique des $H^i(X,F(n))$ ont été énoncés dans EGA III 2.2.1 sur un schéma de base général, enfin les théorèmes de Lefschetz peuvent également se développer pour un morphisme projectif, comme on a vu dans XII 4.9 , grâce au théorème local XII 4.7. Bien entendu, le fait de travailler sur un schéma de base général conduit aussi à des énoncés essentiellement nouveaux, tels le "théorème de comparaison" EGA III 4.1.5 et le théorème d'existence de faisceaux EGA III 5.1.4 (qui, on l'a vu par ailleurs dans IX, relèvent des mêmes théorèmes-clefs de nature cohomologique que les théorèmes de Lefschetz pour π_1 et Pic) .

Il s'impose alors de dégager des théorèmes qui englobent simultanément les deux généralisations que nous venons de signaler des énoncés concernant les schémas projectifs sur un corps. Les objets naturels pour une telle généralisation commune sont les <u>anneaux noethériens séparés et complets pour une topologie I-adique</u>. Leur étude, à ce point de vue, n'a pas encore été abordée sérieusement, et me semble à l'heure actuelle le sujet le plus intéressant dans la théorie locale des faisceaux cohérents. Voici un problème typique dans cette direction :

<u>Conjecture</u> 1.1. (**) ("<u>Deuxième</u> théorème de finitude affine"). <u>Soient</u> M <u>un module de type fini sur un anneau noethérien</u> A (<u>qu'on supposera au besoin quotient d'un régulier</u>), J <u>un idéal de</u> A , <u>prouver que les modules</u> $H^i_J(M)$ <u>sont</u> "J-cofinis", <u>i.e. que les modules</u>

$$\mathrm{Hom}_A(A/J,\ H^i_J(M)\ )$$

<u>sont de type fini</u> .

(Rappelons qu'on désigne par $H^i_J(M)$ le module $H^i_Y(X,\widetilde{M})$ (où $X=\mathrm{Spec}(A)$, $Y=V(J)$) de Exp. I , interprété dans II en termes de limite inductive de

(*) Cf. Séminaire Hartshorne, cité à la fin de Exp. IV.

(**) Cette conjecture, et la conjecture 1.2. ci-dessous, sont fausses, comme l'a montré R. HARTSHORNE (non publié).

cohomologies de complexes de Koszul, ou encore pour $i \geqslant 2$ le Module $H^{i-1}(X-Y, \widetilde{M})$. A vrai dire, 1.1. devrait être conséquence d'un énoncé plus précis, impliquant que les $H_J^i(M)$ sont dans une sous-catégorie abélienne convenable $\underline{D}_J$ de la catégorie abélienne C_J des A-Modules de support $\subset Y=V(J)$, telle que $H \in \mathrm{Ob}\, \underline{D}_J$ implique que H est J-cofini. (NB La catégorie des Modules H de support contenu dans V(J) et qui sont J-cofinis n'est malheureusement pas stable par passage au quotient !). Le problème essentiel consisterait alors à définir $\underline{D}_J$. De façon plus précise, la solution du problème 1.1. devrait sortir (du moins si A est quotient d'un régulier) d'une théorie de la dualité, généralisant à la fois la dualité locale, et la théorie de dualité des morphismes projectifs à laquelle il a été fait allusion plus haut, et qui serait du genre suivant :

<u>Conjecture</u> 1.2. ("<u>Dualité affine</u>") (*). <u>Supposons</u> A <u>régulier</u>, <u>séparé et complet pour la topologie</u> J-adique . <u>Soit</u> $C^{\bullet}(A)$ <u>une résolution injective de</u> A .

(i) <u>Prouver que le foncteur</u>

$$D_J : L. \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_J(L. , C^{\bullet}(A))$$

<u>de la catégorie des complexes de</u> A-modules, <u>libres de type fini en toute dimension et à degrés limités supérieurement</u>, (<u>ou les morphismes sont les homomorphismes de complexes à homotopie près</u>) <u>dans la catégorie des complexes de</u> A-modules $K^{\bullet}$, <u>injectifs en toute dimension et à degrés limités supérieurement</u> (<u>ou les homomorphismes sont définis de la même façon</u>), <u>est pleinement fidèle</u> .

(ii) <u>Prouver que pour tout</u> $K^{\bullet}$ <u>de la forme</u> $D_J(L.)$, <u>les</u> $H^i(K^{\bullet})$ $(= \underline{\underline{\mathrm{Ext}}}_Y^i(X; L. , \underline{O}_X))$ <u>sont</u> J-cofinis .

(iii) <u>De façon plus précise, prouver que les</u> $K^{\bullet}$ <u>qui sont homotopes à un complexe de la forme</u> $D_J(L.)$ <u>peuvent se caractériser par des propriétés de finitude des</u> $H^i(K^{\bullet})$, <u>plus fortes que celle envisagée dans</u> (ii), <u>par exemple</u>

(*) Cette conjecture, fausse telle quelle, a cependant été établie sous une forme assez voisine par R. HARTSHORNE, <u>Affine duality and cofinite modules</u> (à paraitre).

<u>par la propriété $H^i(K^\cdot) \in \mathrm{Ob}\, \underline{D}_J$, où $\underline{D}_J$ est une catégorie abélienne convenable, comme envisagée plus haut.</u>

Notons que le problème est résolu par l'affirmative lorsque A est local et que J en est un idéal de définition (cf exposé IV), et aussi lorsque J est l'idéal nul. Dans ces deux cas, exceptionnellement, on peut se borner à prendre pour $\underline{D}_J$ la catégorie des Modules à support $V(J)$ qui sont J-cofinis, (ce qui dans le deuxième cas signifie simplement, qu'on prend la catégorie des Modules de type fini sur A) . Une solution affirmative de la conjecture 1.2. en général en donnerait une pour 1.1 , en prenant pour $L.$ le dual d'une résolution libre de type fini de M . D'autre part, une solution affirmative de 1.1 donnerait une réponse affirmative à la première partie de la conjecture suivante, que nous formulons sous forme "globale" :

<u>Conjecture</u> 1.3. <u>Soit</u> $X \subset P^r_k$ <u>un sous-schéma fermé du schéma projectif type, qui soit localement une intersection complète et dont toute composante irréductible soit de codimension</u> $\geqslant s$. <u>Soit</u> $U = P^r_k - X$.

(i) <u>Prouver que pour tout Module cohérent</u> F <u>sur</u> U , <u>on a</u>

$$\dim H^i(U,F) < +\infty \qquad \text{pour} \quad i \geqslant s \quad (*) .$$

(ii) <u>Donner un exemple, avec</u> X <u>connexe et régulier, où on a</u>

$$H^s(U,F) \neq 0 \quad .$$

Pour voir que (i) est un cas particulier de 1.1., on considère

$$H^i(U,F(.)) = \coprod_n H^i(U,F(n)) = H^i(E^{r+1} - X, \tilde{F})$$

comme un module sur l'anneau affine $k[t_o,\dots,t_r]$ du cône projetant E^{r+1} de P^r . Ce module n'est autre que $H^{i+1}_J(M)$, où J est l'idéal du cône projetant X de X dans E^{r+1} . D'autre part de l'hypothèse faite sur X , qui implique que X est aussi une intersection complète relative de co-dimension $\geqslant s$ en

(*) La part (i) de cette conjecture est prouvée par R. HARTSHORNE lorsque Y est lisse, dans Ample Vector Bundles, Pub. Math. n° 29, (1966). Cet auteur a également trouvé un exemple pour (ii), cf. R. Hartshorne, Cohomological dimension of algebraic varieties, à paraître aux Ann. of Math.

tout point de E^{r+1} distinct de l'origine, résulte que $H_J^{i+1}(M)$ est nul en dehors de l'origine pour $i \geqslant s$. S'il est donc J-cofini comme le veut 1.1., il est a fortiori $\underline{m}$-cofini, ce qui implique facilement qu'il est de dimension finie en tout degré . Noter d'ailleurs que la conjecture 1.3 (i) est équivalente au cas particulier où on suppose que F est de la forme $\underline{O}_{P^r}(n)$, et que la réponse n'est pas connue même pour $F=\underline{O}_{P^r}$. La question 1.3. se pose déjà pour une courbe irréductible non singulière X dans P^3 , on ignore si dans ce cas les $H^2(P^3-X, \underline{O}_X(n))$ sont de dimension finie, ou s'ils sont nécessairement nuls(*) . On ignore même s'il existe une courbe irréductible de P^3 qui ne soit ensemblistement l'intersection de deux hypersurfaces, cf. 3.5.

Problème 1.4. Donner une variante affine du "théorème de comparaison" EGA III 4.1.5 comme un théorème de commutation des foncteurs H_J^i avec certaines limites projectives .

Enfin, dans le présent ordre d'idées, j'avais posé le problème suivant : Soit A un anneau local noethérien régulier complet , K son corps des fractions, prouver que $\mathrm{Ext}_A^i(K,A)=0$ pour tout i . Une réponse affirmative a été donnée sur le champ par Mr AUSLANDER, l'hypothèse de régularité peut être remplacée par celle que A est intègre, et il est vrai en fait que $\mathrm{Ext}_A^i(K,M)=0$ pour tout i, dès que M est de type fini sur A . Cela résulte aussitôt de l'énoncé suivant, dû à AUSLANDER : si A est un anneau local noethérien complet, alors pour tout module de type fini M sur A , les foncteurs $\mathrm{Ext}_A^i(.,M)$ transforment limites inductives en limites projectives .

2. Problèmes liés au π_0 : théorèmes de Bertini locaux.

Soient A un anneau local noethérien complet, f un élément de son idéal maximal, X=Spec(A), Y=Spec(A/fA) . L'utilisation de la technique "Lefschetz" locale permet de donner des critères pour que $Y'=X'\cap Y$ (où $X'= X - \{\underline{m}\}$) soit connexe, en termes d'hypothèses sur X' . Ainsi, il suffit que l'on ait :

(*) La question vient d'être résolue affirmativement par R. HARTSHORNE et H. HIRONAKA .

a) X' est connexe b) prof $\underline{O}_{X',x} \geqslant 2$ pour tout point fermé x de X' c) f est A-régulier. On notera cependant que les hypothèses b) et c) ne sont pas de nature purement topologiques, par exemple ne sont pas invariants en remplaçant X par $X_{réd}$. Dans la situation analogue pour un schéma projectif X' sur un corps et une section hyperplane Y' de X', l'utilisation du "théorème de Bertini" et du "théorème de connexion" de Zariski permet d'obtenir en fait des résultats d'allure nettement plus satisfaisants, qui m'avaient amené dans le séminaire oral à énoncer une conjecture, que j'ai résolue depuis par l'affirmative. Enonçons donc ici :

Théorème 2.1. *Soient A un anneau local noethérien complet, X son spectre, a le point fermé de X, $X'=X-(a)$. Supposons que X satisfasse les conditions suivantes (où k désigne un entier $\geqslant 1$) :*

a_k) Les composantes irréductibles de X' sont de dimension $\geqslant k+1$.

b_k) X' est connexe en dimension $\geqslant k$, i.e. on ne peut disconnecter X' par une partie fermée de dimension $< k$ (cf. III 3.8).

Soit m un entier, $0 \leqslant m \leqslant k$, et soient $f_1,..,f_m \in \underline{r}(A)$, posons $B=A/\sum_i f_iA$, $Y=\mathrm{Spec}(B)=V(f_1) \cap .. \cap V(f_m)$, $Y' = X' \cap Y = Y-\{a\}$. Alors Y satisfait les conditions a_{k-m}), b_{k-m}). En particulier, pour toute suite de $m \leqslant k$ éléments $f_1,..,f_m$ de $\underline{r}(A)$, $Y'=X' \cap V(f_1) \cap \dots \cap V(f_m)$ est connexe.

Il est d'ailleurs facile de voir que si la dernière conclusion est valable (il suffit évidemment d'y faire $m=k$), et en excluant le cas où X serait irréductible de dimension 0 ou 1, il s'ensuit que les composantes irréductibles de X' sont de dimension $\geqslant k+1$, et X' est connexe en dimension $\geqslant k$, de sorte qu'en un sens, 2.1 est un résultat "le meilleur possible".

Donnons le principe de la démonstration de 2.1. Seule la condition b_{k-m}) pour Y offre un problème. On est ramené facilement pour k donné au cas où X est intègre, et même (en passant au normalisé, qui est fini sur X)

au cas où X est <u>normal</u>. Si $k=1$, donc $\dim X' \geqslant 2$, alors X' est de profondeur $\geqslant 2$ en ses points fermés et on peut appliquer le résultat rappelé au début du N°, qui montre que $Y' = X' \cap V(f)$ est connexe. Dans le cas $k > 1$, on suppose le théorème démontré pour les $k' < k$. Par récurrence sur m, on est ramené au cas où $m=1$, i.e. à vérifier que pour $f_1 \in \underline{r}(A)$, $X' \cap V(f_1)$ est connexe en dimension $\geqslant k-1$. S'il ne l'était pas, i.e. s'il était disconnecté par un Z' de dimension $< k-1$, il existerait une suite $f_2, \ldots, f_k$ telle que $X' \cap V(f_1) \cap \ldots \cap V(f_k)$ soit disconnexe, et dans cette suite on peut choisir arbitrairement $f_2 \in \underline{r}(A)$ soumis à la seule condition de ne s'annuler sur aucun point d'une certaine partie finie F de X' (savoir l'ensemble des points maximaux de Z'). D'ailleurs, on vérifie facilement, utilisant le fait que X' est normal, donc satisfait la condition (S_2) de Serre (*), qu'il existe une partie finie F' de X' telle que $f \in \underline{r}(A)$, $V(f) \cap F' = \emptyset$ implique que $V(f) \cap X'$ satisfait également la condition (S_2). On peut alors choisir f_2 de telle façon que f_2 ne s'annule ni sur F ni sur F', donc que $X' \cap V(f_2)$ satisfasse (S_2). Mais alors en vertu du théorème de HARTSHORNE III 3.6 $X' \cap V(f_2)$ est connexe en codimension 1, donc (comme toute composante de $X' \cap V(f_2)$ est de dimension $\geqslant k$) il est connexe en dimension $\geqslant k-1$. Appliquant l'hypothèse de récurrence à $V(f_2) = \operatorname{Spec}(A/f_2A)$, il s'ensuit que $X' \cap V(f_2) \cap V(f_1) \cap V(f_3) \cap \ldots \cap V(f_k)$ est connexe, alors qu'on l'avait construit disconnexe, absurde.

Signalons quelques corollaires intéressants :

<u>Corollaire</u> 2.2. <u>Soit</u> $f : X \to Y$ <u>un morphisme propre de préschémas localement noethériens, avec</u> Y <u>intègre</u>, $y_0 \in Y$, y_1 <u>le point générique de</u> Y. <u>On suppose</u>

a) Y <u>est unibranche en</u> y_0, <u>toute composante irréductible de</u> X <u>domine</u> Y.

b) <u>Les composantes irréductibles de</u> X_1 <u>sont de dimension</u> $\geqslant k+1$, <u>et</u> X_1 <u>est connexe en dimension</u> $\geqslant k$.

(*) Cf. EGA IV 5.7.2.

Alors les composantes irréductibles de X_o *sont de dimension* $\geqslant k+1$, *et* X_o *est connexe en dimension* $\geqslant k$.

En effet, le théorème de connexion de Zariski (cf. EGA III 4.3.1) implique que X_o est connexe; pour montrer qu'il n'est pas disconnecté par une partie fermée de dimension $< k$, on est ramené à montrer que ces anneaux locaux en des points $x \in X_o$ tels que $\dim \overline{x} < k$ ont un spectre non disconnecté par x . Or ceci est vrai sans supposer ni f propre, ni Y unibranche en y_o . On est ramené pour le voir au cas où X est intègre dominant Y , et si on veut, Y affine de type fini sur $\underline{Z}$, de sorte que l'on est sous les conditions de la formule des dimensions pour $\underline{O}_{X,x}$ sur $\underline{O}_{Y,y_o}$. Utilisant dans ce cas la finitude de la clôture normale, on peut même supposer X *normal* , donc en vertu d'un résultat de NAGATA (*) , le complété d'un anneau local $\underline{O}_{X,x}$ de X' est encore normal, donc (si $\underline{O}_{X,x}$ est de dimension N) $\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X,x})$ est connexe en dimension $\geqslant N-1$. Soit $n = \dim \underline{O}_{X,y_o}$, alors $\deg \mathrm{tr}\, k(x)/k(y) < k$ implique $\dim \underline{O}_{X,x} > n+(k+1)-k = n+1$, compte tenu que $\dim X_1 \geqslant k+1$, et prenant un système $f_1,\ldots,f_n$ de paramètres de $\underline{O}_{Y,y_o}$ qu'on relève en des éléments de $\underline{O}_{X,x}$, on voit par 2.1. que $\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X,x}/\sum f_i \hat{\underline{O}}_{X,x})$ est connexe en dimension $\geqslant 1$, i.e. n'est pas disconnecté par son point fermé, ou ce qui revient au même, $\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X_o,x})$ n'est pas disconnecté par son point fermé; a fortiori il en est ainsi de $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X_o,x})$.

Comme dans le cas du théorème de connexion ordinaire, on peut varier 2.2. en prenant les fibres géométriques (sur les clôtures algébriques des corps résiduels), à condition de supposer Y *géométriquement* unibranche en y_o , ou (sans autre hypothèse que Y noethérien) que f est universellement ouvert . Appliquant ceci au cas où Y est le schéma dual d'un schéma projectif P^r_k sur un corps, on retrouve une forme renforcée du résultat global qui avait inspiré 2.1 , savoir :

Corollaire 2.3. Soient X *un sous-schéma fermé de* P^r_k *(k un corps), on suppose les composantes irréductibles de* X *de dimension* $\geqslant k+1$, *et* X

(*) Cf. EGA IV 7.8.3 (i) (ii) (v).

géométriquement connexe en dimension $\geqslant k$. Alors pour toute suite $H_1,\ldots,H_m$ de m hyperplans de P_k^r $(0 \leqslant m \leqslant k-1)$, $X \cap H_1 \cap \ldots \cap H_m$ satisfait la même condition avec $k-m$, en particulier est géométriquement connexe en dimension $\geqslant k-1$.

On peut d'ailleurs modifier de façon évidente cet énoncé, pour le cas où on s'est donné un morphisme propre $X \to P_k^r$, qui n'est pas nécessairement une immersion, et une extension analogue est possible pour 2.1. (en considérant un schéma propre sur X'). Ces énoncés se déduisent d'ailleurs formellement des énoncés donnés ici, compte tenu du théorème de connexion ordinaire qui nous ramène au cas d'un morphisme fini.

Corollaire 2.4. Soit A un anneau local noethérien normal complet de dimension $\geqslant k+2$. Soient $X = \mathrm{Spec}(A)$, $X' = X - \{a\}$, $f_1,\ldots,f_k$ des éléments de $\underline{r}(A)$, alors $Y' = X' \cap V(f_1) \ldots \cap V(f_k)$ est connexe, et $\pi_1(Y') \to \pi_1(X')$ est surjectif.

On procède comme dans SGA 1 X 2.11.

Dans tout ceci, il n'était question que de questions de connexité. Or dans le cas global, des théorèmes bien connus affirment que pour une variété projective irréductible $X \subset P_k^r$, k algébriquement clos, son intersection avec un hyperplan H "assez général" est irréductible, (et non seulement connexe) : c'est le théorème de BERTINI, prouvé par ZARISKI, qui implique à son tour par le théorème de connexion de Zariski, que pour tout H, $H \cap X$ est connexe (bien que non nécessairement irréductible). On peut d'ailleurs procéder en sens inverse, en prouvant ce dernier résultat par une technique à la Lefschetz, et en déduisant le théorème de Bertini, en se ramenant au cas où X est normale, et utilisant le résultat suivant : pour H "assez général", $X \cap H$ est également normal. Cela suggère la

Conjecture 2.5. Soit A un anneau local noethérien complet normal. Montrer qu'il existe $f \in \underline{r}(A)$ non nul tel que $Y' = X' \cap V(f) = Y - \{a\}$

(où $Y=\operatorname{Spec}(A/fA)$) soit normal (donc irréductible par 2.1 si $\dim A \geqslant 3$) .

Pour bien faire, il faudrait montrer que dans un sens convenable, il existe même "beaucoup" d'éléments f ayant la propriété en question, par exemple qu'on peut choisir f dans une puissance arbitraire de l'idéal maximal. Utilisant le critère de normalité de Serre, et la remarque faite plus haut pour la propriété (S_2) de Serre, on voit qu'on aurait une réponse affirmative à 2.5. si on en avait une à la

Conjecture 2.6. Soient A un anneau local noethérien complet, U une partie ouverte de son spectre X , F une partie finie de $X'=X-\{a\}$. On suppose que U est régulier. Prouver qu'il existe un $f \in \underline{r}(A)$ tel que $V(f) \cap U$ soit régulier, et $V(f) \cap F = \emptyset$.

Voir, pour un résultat du type "Bertini local", CHOW [2] .

3. Problèmes liés au π_1 .

Ici encore, on a de nombreuses questions, suggérées par les résultats globaux ou les résultats transcendants.

Conjecture 3.1. Soient A un anneau local noethérien complet à corps résiduel algébriquement clos, $X=\operatorname{Spec}(A)$, $X'=X-(a)$, a le point fermé . Supposons les composantes irréductibles de X de dimension $\geqslant 2$, X' connexe .

(i) Prouver que $\pi_1(X')$ est topologiquement à engendrement fini .

(ii) Si p est l'exposant caractéristique du corps résiduel k de A , prouver que le plus grand groupe topologique quotient de $\pi_1(X')$ qui est "d'ordre premier à p" est de présentation finie .

Pour la partie (i), utilisant la théorie de descente SGA 1 IX 5.2 et le théorème 2.4 , on est ramené au cas où A est normal de dimension 2 . Dans ce cas, une méthode systématique pour étudier le groupe fondamental de X' , inaugurée par MUMFORD [5] dans le cadre transcendant, consiste à désingulariser X i.e. à considérer un morphisme projectif birationnel $Z \to X$, avec Z intègre régulier, induisant un isomorphisme $Z'=Z \mid X' \to X'$; il est plausible qu'un tel Z existe toujours, c'est en tous cas ce que démontre la méthode d'ABHYANKAR [1] dans le cas d'"égales caractéristiques" (*). Soit C la fibre du point fermé de X par $Z \to X$, c'est une courbe algébrique sur le corps résiduel k , connexe en vertu du théorème de connexion . La solution de 3.1 semble alors liée au

Problème 3.2. Avec les notations précédentes, mettre en relations $\pi_1(X')$ avec les invariants topologiques de C , en particulier son groupe fondamental, (pour faire apparaître la génération topologique finie de $\pi_1(X')$, en utilisant par exemple SGA X 2.6) .

Une autre méthode serait de considérer A comme une algèbre finie sur un anneau local régulier complet B de dimension 2, ramifié suivant une courbe C contenue dans $\mathrm{Spec}(B)=Y$. On est conduit ainsi au

Problème 3.3. Soient A un anneau local régulier complet de dimension 2, à corps résiduel alg. clos k , X son spectre, C une partie fermée de X de dimension 1 . Définir des invariants locaux de la courbe immergée C , ayant un sens indépendant de la caractéristique résiduelle, et dont la connaissance permette de calculer le groupe fondamental de $X-C$ par générateurs et relations lorsque k est de caractéristique nulle . Prouver que lorsque k est de caractéristique $p > 0$, le groupe fondamental «tame» de $X-C$ est quotient du précédent, et les deux groupes fondamentaux (en car 0 , et en car $p > 0$) ont même quotient maximal d'ordre premier à p .

Bien entendu, 3.3 nous montre que dans 3.1 , il y a lieu également de remplacer X' par un schéma de la forme $X-Y$, où Y est une partie fermée

(*) La possibilité de "résoudre" A est prouvé maintenant en toute généralité par Abhyankar [8].

de X qui est de codimension $\geqslant 2$ dans toute composante de X la contenant. Lorsqu'on abandonne cette restriction sur Y, il doit exister encore un résultat de finitude analogue, à condition de mettre des restrictions genre "tame" sur la ramification en les points maximaux des composantes irréductibles de Y qui sont de codimension 1.

Problème 3.4. Soit A un anneau local noethérien complet de dimension 2, à corps résiduel algébriquement clos. Soit encore $X=\mathrm{Spec}(A)$, $X'=X-\{a\}$. Trouver des propriétés de structure particulières de $\pi_1(X')$ pour le cas où A est une intersection complète.

Une solution satisfaisante de ce problème permettrait peut-être de résoudre le vieux problème suivant :

Conjecture 3.5. Trouver une courbe irréductible dans P^3_k (k corps algébriquement clos), de préférence non singulière, qui ne soit pas ensemblistement l'intersection de deux hypersurfaces. (KNESER [4] montre qu'on peut l'obtenir toujours comme intersection de trois hypersurfaces).

4. Problèmes liés aux π_i supérieurs : théorèmes de Lefschetz locaux et globaux pour les espaces analytiques complexes.

Soit X un préschéma loc. de type fini sur le corps des complexes $\underline{C}$, on sait lui associer un espace analytique X^h sur $\underline{C}$, d'où des invariants d'homotopie et d'homologie $\pi_i(X^h)$, $H_i(X^h)$, $H^i(X^h)$ etc... On sait d'ailleurs que X est connexe si et seulement si X^h l'est, donc que l'on a une bijection

$$\pi_o(X^h) \rightarrow \pi_o(X) .$$

De même, comme tout revêtement étale X' de X définit un revêtement étale

X'^h de X^h , on a un homomorphisme canonique

$$\pi_1(X^h) \longrightarrow \pi_1(X) \ ,$$

dont on sait, utilisant un théorème de Grauert-Remmert, qu'il identifie le deuxième groupe au compactifié du premier pour la topologie des sous-groupes d'indice fini (ce qui exprime simplement le fait que $X' \rightsquigarrow X'^h$ est une équivalence de la catégorie des revêtements étales de X avec la catégorie des revêtement étales <u>finis</u> de X^h). Il s'ensuit que les résultats démontrés dans ce séminaire (par voie purement algébrique) sur $\pi_0(X)$ et $\pi_1(X)$, impliquent des résultats pour $\pi_0(X^h)$ et $\pi_1(X^h)$ (qui sont de nature transcendante) . Si d'ailleurs X est propre , la suite exacte bien connue $0 \rightarrow \underline{Z} \rightarrow \underline{C} \rightarrow \underline{C}^* \rightarrow 0$ permet de montrer que le groupe de Néron-Sévéri de X (quotient de son groupe de Picard par la composante connexe de l'élément neutre) est isomorphe à un sous-groupe de $H^2(X^h,\underline{Z})$; dans le cas non singulier kählérien, c'est le sous-groupe noté $H^{1,1}(X^h,\underline{Z})$ (classes de type $(1,1)$) :

$$\mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}^o(X) \subset H^2(X,\underline{Z}) \qquad .$$

Par suite, les renseignements que nous avons obtenus sur les groupes de Picard impliquent des renseignements, très partiels il est vrai, sur les groupes $H^2(X^h,\underline{Z})$. Il est tentant de compléter tous ces résultats fragmentaires par des conjectures .

Des indications très précises, allant dans le même sens que ceux qu'on vient de signaler, sont fournies par un classique théorème de LEFSCHETZ [7] . Il affirme que si X est un espace analytique projectif non singulier irréductible de dimension n , et si Y est une section hyperplane non singulière, alors l'injection

$$Y^{n-1} \longrightarrow X^n$$

induit un homomorphisme

$$\pi_i(Y^{n-1}) \longrightarrow \pi_i(X^n)$$

qui est un *isomorphisme pour* $i \leqslant n-2$, un *épimorphisme pour* $i = n-1$. Il en résulte l'énoncé analogue pour les homomorphismes

$$H_i(Y^{n-1}) \rightarrow H_i(X^n)$$

sur l'homologie (entière pour fixer les idées), tandis qu'en cohomologie,

$$H^i(X^n) \longrightarrow H^i(Y^{n-1})$$

est un *isomorphisme en dimension* $i \leqslant n-2$, un *monomorphisme en dimension* $i=n-1$. Nous avons obtenu des variantes de ces résultats dans le cadre des schémas, pour π_0, π_1, Pic , valables d'ailleurs sans hypothèses de non singularité dans une large mesure, cf. exposé XII . De plus, dans l'élimination des hypothèses de non singularité, nous avons utilisé de façon essentielle des variantes "locales" de ces théorèmes de Lefschetz globaux . Tout ceci suggère les problèmes suivants , qui sans doute devront être attaqués simultanément (*) .

Problème 4.1. *Soient* X *un espace analytique,* Y *une partie analytique fermée de* X *(ou simplement une partie fermée ?) telle que pour tout* $x \in Y$ *, l'anneau local* $\underline{O}_{X,x}$ *soit une intersection complète . Soit* n *la codimension complexe de* Y *dans* X *. L'homomorphisme canonique*

$$\pi_i(X-Y) \longrightarrow \pi_i(X)$$

est-il un isomorphisme pour $i \leqslant n-2$ *, et un épimorphisme pour* $i=n-1$?

Dans cet énoncé et les précédents, on suppose évidemment implicitement choisi un point-base pour définir les groupes d'homotopie . Pour énoncer le problème suivant, il faut définir, pour un espace analytique X (plus généralement, pour un espace localement connexe par arc) et un $x \in X$, des

(*) Les formulations 4.1 à 4.3 qui suivent sont provisoires. Voir conjectures A à D plus bas, dans "Commentaires à l'Exp. XIII", pour des formulations plus satisfaisantes, ainsi que Exp. XIV .

invariants locaux $\pi_i^x(X)$ (*). Pour ceci, on choisit une application non constante f de l'intervalle $[0,1]$ dans X, telle que $f(0)=x$ et $f(t)\neq x$ pour $t\neq 0$ (il en existe si x n'est pas un point isolé). Alors pour tout voisinage U de x, il existe un $\varepsilon>0$ tel que $0<t<\varepsilon$ implique $f(t)\in U$, et les groupes d'homotopie $\pi_i(U-x,f(t))$ sont essentiellement indépendants de t (ils sont, pour t variable, reliés par un système transitif d'isomorphismes), on peut les noter $\pi_i(U-x,f)$. On pose alors

$$\pi_i^x(X) = \varprojlim_U \pi_{i-1}(U-x,f)$$

la limite projective étant prise sur le système des voisinages ouverts U de x. En toute rigueur, cette limite dépend de f, et devrait être notée $\pi_i^x(X,f)$, mais on vérifie que pour f variable, ces groupes sont isomorphes entre eux(**), de façon précise ils forment un système local sur l'espace des chemins du type envisagé issus de x. Ces invariants sont la version homotopique des invariants de cohomologie locale $\underline{H}_x^i(F)$ pour un faisceau F sur X, introduits dans I, et devraient jouer le rôle de groupes d'homotopie locale relatifs de X modulo X-x. Leur annulation pour $i\leqslant n$ et pour tout $x\in Y$, où Y est une partie fermée de X de dimension topologique $\leqslant d$, devrait entraîner que les homomorphismes

$$\pi_i(X-Y)\to \pi_i(X)$$

sont bijectifs pour $i<n-d$, et surjectif pour $i=n-d$ (***). De ce point de vue, 4.1 impliquerait (pour Y réduit à un point) une conjecture de nature purement locale, s'exprimant par

$$\pi_i^x(X) = 0 \quad \text{pour} \quad i\leqslant n-1$$

lorsque X est une intersection complète de dimension n en x.

A titre d'exemple d'invariants locaux $\pi_i^x(X)$, notons que si x est un point non singulier de dimension complexe n, alors

(*) Si $i\geqslant 2$. Pour le cas $i\leqslant 1$, cf. Commentaires dans n° 6 ci-dessous, page 25.

(**) Du moins si x ne disconnecte pas X au voisinage de x, cf. Commentaires ci dessous, page 26.

(***) Pour une formulation corrigée, cf. Commentaires ci-dessous, page 26.

$$\pi_i^x(X) = \pi_{i-1}(S^{2n-1}) \quad ,$$

où S^{2n-1} désigne la sphère de dimension $2n-1$. En particulier dans ce cas $\pi_i^x(X)=0$ pour $i \leqslant 2n-1$, ce qui correspond au fait que si d'une variété topologique X on enlève une partie fermée Y de codimension $\geqslant m$, alors $\pi_i(X-Y) \longrightarrow \pi_i(X)$ est un isomorphisme pour $i \leqslant m-2$ et un épimorphisme pour $i=m-1$.

Ceci posé :

Problème 4.2. Soient X un espace analytique, $x \in X$, t une section de $\underline{O}_X$ s'annulant en x , Y l'ensemble des zéros de t . Supposons les conditions suivantes satisfaites :

a) t est régulière en x (i.e. non diviseur de 0 en x , hypothèse peut-être superflue, d'ailleurs) .

b) En les points x' de $X-Y$ voisins de x , $\underline{O}_{X,x'}$ est une intersection complète (hypothèse qui doit pouvoir se remplacer par la suivante, plus générale si 4.1. est vraie : pour x' comme dessus, $\pi_i^{x'}(X) = 0$ pour $i \leqslant n-1$) .

c) En les points y de $Y-\{x\}$ voisins de x , on a

$$\operatorname{prof} \underline{O}_{X,y} \geqslant n$$

(il suffit par exemple que l'on ait $\operatorname{prof} \underline{O}_{X,x} \geqslant n$) .

Sous ces conditions, l'homomorphisme canonique

$$\pi_i^x(Y) \longrightarrow \pi_i^x(X)$$

est-il un isomorphisme pour $i \leqslant n-2$, un épimorphisme pour $i = n-1$?

Voici enfin une variante globale de 4.2 , qui devrait s'en déduire par considération du cône projetant en son origine, et qui généraliserait les théorèmes de Lefschetz classiques :

Problème 4.3. Soient X un espace analytique projectif, muni d'un Module inversible $\underline{L}$ ample, t une section de $\underline{L}$, Y l'ensemble des zéros de t. Supposons :

a) t est une section régulière (peut-être superflue).

b) Pour tout $x \in X-Y$, $\underline{O}_{X,x}$ est une intersection complète (devrait pouvoir se remplacer par $\pi_i^x(X) = 0$ pour $i \leqslant n-1$).

c) Pour tout $x \in Y$, prof $\underline{O}_{X,y} \geqslant n$.

Sous ces conditions, l'homomorphisme

$$\pi_i(Y) \to \pi_i(X)$$

est-il un isomorphisme pour $i \leq n-2$, un épimorphisme pour $i = n-1$?

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer des conjectures analogues, de nature cohomologique (*), les hypothèses et conclusions portant alors sur les invariants cohomologiques locaux (à coefficients dans un groupe donné). En tout état de cause, le résultat-clef semble devoir être 4.2, quand l'hypothèse b) y est prise sous forme respée, - qu'on se place au point de vue de l'homologie, ou de l'homotopie.

Nous avons énoncé ces conjectures dans le cadre transcendant, dans l'espoir d'y intéresser les topologues et de les convaincre que les questions du type "Lefschetz" sont loin d'être closes. Bien entendu, maintenant que nous sommes sur le point de disposer d'une bonne théorie de la cohomologie des schémas (à coefficients finis), grâce aux travaux récents de M. ARTIN, les mêmes questions se posent dans le cadre des schémas, et il est difficile de douter qu'elles ne reçoivent une réponse positive, dans un avenir prochain (*).

(*) Cf. Exp. XIV les résultats correspondants en théorie des schémas.

5. Problèmes liés aux groupes de Picard locaux .

Un premier problème fondamental, signalé pour la première fois par MUMFORD [5] dans un cas particulier, est le suivant . Soient A un anneau local complet de corps résiduel k , $X=\mathrm{Spec}(A)$, $U=\mathrm{Spec}(A)-\{a\}$, où a est l'idéal maximal de A i.e. le point fermé de $\mathrm{Spec}(A)$. On se propose de construire un système projectif strict G de groupes localement algébriques G_i sur k , et un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Pic}(U) \simeq G(k) \tag{+}$$

où on pose évidemment $G(k) = \varprojlim G_i(k)$. De façon heuristique, on se propose de "mettre une structure de groupe algébrique" (ou du moins, pro-algébrique, en un sens convenable) sur le groupe $\mathrm{Pic}(X')$.

Il est évident que tel quel, le problème n'est pas assez précis, car la donnée d'un isomorphisme (+) est loin de caractériser le pro-objet G . Si A contient un sous-corps noté encore k , qui soit un corps de représentants, on peut préciser le problème, en exigeant que pour une extension k' de k variable, on ait un isomorphisme, fonctoriel en k' :

$$\mathrm{Pic}(U') \simeq G(k') \tag{+'}$$

où U' est l'ouvert analogue à U dans $\mathrm{Spec}(A')$, $A' = A\hat{\otimes}_k k'$. On peut procéder de façon analogue même si A n'a pas de corps de représentants, pourvu que k soit parfait, ce qui permet alors de construire fonctoriellement un A' "par extension résiduelle k'/k ". D'ailleurs, lorsque A admet un corps de représentants, la structure algébrique qu'on trouvera sur $\mathrm{Pic}(U)$ dépendra essentiellement du choix de ce corps de représentants (comme on voit déjà sur le cône projetant d'une courbe elliptique), il semble donc qu'il faille partir d'un "pro-anneau algébrique sur k" à la GREENBERG [3] , pour arriver à définir le pro-objet G . Il est d'ailleurs concevable que dans le cas où il n'y a pas de corps de représentants donné, on ne trouve qu'un système projectif de groupes quasi-algébriques au sens de Serre, ou plutôt quasi-localement algébriques (les groupes G_i obtenus ne seront pas en général de type fini sur k, mais seulement localement de type fini sur k). Il est même possible qu'on ne trouvera en général qu'une structure encore plus faible sur $\mathrm{Pic}(U)$, du genre de celles rencontrées par NERON [6] dans sa théorie de dégénérescence des variétés abéliennes définies sur des corps locaux.

Une méthode pour attaquer le problème, également introduite par MUMFORD, consiste à désingulariser X, i.e. à considérer un morphisme projectif birationnel $Y \to X$ avec Y régulier. Lorsque U est régulier, (i.e. a est un point singulier isolé), on peut souvent trouver Y de telle façon que $Y | U = V \to U$ soit un isomorphisme. Dans ce cas, on aura donc

$$\mathrm{Pic}(U) \simeq \mathrm{Pic}(V) \simeq \mathrm{Pic}(Y)/\ \mathrm{Im}\ \underline{Z}^I \quad ,$$

où I est l'ensemble des composantes irréductibles de la fibre Y_a, (chacune de celles-ci définissant un élément de $\mathrm{Pic}(Y)$, étant un diviseur localement principal, grâce à Y régulier). D'autre part, utilisant la technique de Géométrie Formelle EGA III 4 et 5, notamment le théorème d'existence, on trouve

$$\mathrm{Pic}(Y) \simeq \varprojlim \mathrm{Pic}(Y_n) \quad ,$$

où $Y_n = Y \otimes_A A_n$, $A_n = A/\underline{m}^{n+1}$. Lorsque A admet un corps de représentants k, on dispose de la théorie des schémas de Picard des schémas projectifs Y_n sur k, donc on a

$$\mathrm{Pic}(Y_n) \simeq \underline{\mathrm{Pic}}_{Y_n/k}(k) \ .$$

Cela fournit donc une construction d'un système projectif de groupes localement algébriques $\underline{\mathrm{Pic}}_{Y_n/k}/\mathrm{Im}\ \underline{Z}^I$, qui est le système cherché. Dans le cas envisagé ici, on peut d'ailleurs voir (utilisant que a est un point singulier isolé) que les composantes connexes des sous-groupes images universelles dans ce système projectif forment un système projectif essentiellement constant , donc en l'occurrence on trouve un groupe localement algébrique G comme solution du problème . Si on suppose même A normal de dimension 2 , alors une remarque de MUMFORD (disant que la matrice d'intersection des composantes de Y_a dans X est définie négative) implique que G est même un groupe algébrique , i.e. de type fini sur k (le nombre de ses composantes connexes étant d'ailleurs égal au déterminant de la matrice d'intersection envisagée il y a un instant) .

Si par contre a n'est pas une singularité isolée, on se convainc sur des exemples (avec A de dimension 2) qu'on trouve un système projectif de groupes algébriques, ne se réduisant pas à un seul groupe algébrique .

Une fois qu'on disposerait d'une bonne notion de "schéma de Picard local" , il y aurait lieu de renforcer la notion de parafactorialité, en disant que A est "géométriquement parafactoriel", lorsque non seulement A et même $\hat{A}$ sont parafactoriels, mais que le schéma de Picard local $G(\hat{A})$ est le groupe trivial (ce qui est plus fort, lorsque le corps résiduel n'est pas algébriquement clos, que de dire que G n'a d'autre point rationnel sur k que l'unité) . On se rend compte de la nécessité d'une notion renforcée de parafactorialité, en se rappelant qu'il existe des anneaux locaux complets normaux de dimension 2 qui sont factoriels, mais qui admettent des algèbres finies étales qui ne le sont pas. Un anneau local "géométriquement factoriel" serait alors un anneau A normal tel que tous ces localisés de dimension $\geqslant 2$ soient géométriquement parafactoriels , ou mieux, tel que les localisés de $\hat{A}$ soient parafactoriels (*) . Bien entendu, il serait intéressant de trouver une "bonne" définition de ces notions, indépendante de la théorie, encore à faire, des schémas de Picard locaux.

Il est en tous cas plausible qu'on aura besoin de ces notions si on désire obtenir des énoncés du type suivant : Soit A un "bon anneau" (par exemple une algèbre de type fini sur $\underline{Z}$, ou sur un anneau local complet, par exemple sur un corps). Soit U l'ensemble des $x \in X = \mathrm{Spec}(A)$ tels que $\underline{O}_{X,x}$ soit

(*) Pour une notion plus souple d'anneau local "géométriquement factoriel", cf. Commentaires, page 24.

"géométriquement factoriel", alors U est ouvert ? . Ou encore : Soit $f:X \to Y$ un morphisme plat de type fini avec Y localement noethérien, soit U l'ensemble des $x \in X$ tels que $\underline{O}_{X_{f(x)},x}$ soit "géométriquement factoriel" , alors U est ouvert, du moins sous des conditions supplémentaires sympathiques sur f ? . Je doute qu'avec la notion habituelle d'anneau factoriel, il existe des énoncés vrais de ce type .

Nous avons soulevé ici, dans un cas particulier, la question de l'étude des propriétés géométriques d'anneaux locaux "variables", par exemple les $\underline{O}_{X,x}$ pour x parcourant un préschéma X . Lorsque X est un schéma de type fini sur un corps, par exemple, on sait qu'il existe sur X un système projectif d'algèbres finies $P^n_{X/k}$ (obtenu en complétant $X \times_k X$ le long de la diagonale), dont la fibre en tout point $x \in X$ rationnel sur k est isomorphe au système projectif des $\underline{O}_{X,x}/\underline{m}_x^{n+1}$. Il est alors naturel de relier l'étude des complétés des anneaux locaux $\underline{O}_{X,x}$, pour x variable , à celle de la "famille algébrique d'anneaux locaux complets" donnée par les P^n , en notant que pour tout $x \in X$ (rationnel sur k ou non), on obtient un anneau local complet

$$P^{\infty}(x) = \varprojlim P^n(x)$$

(où $P^n(x) =$ fibre réduite $P^n \otimes_{\underline{O}_{X,x}} k(x))$. Un intérêt particulier s'attachera par exemple à l'anneau complet associé ainsi au point générique, et on s'attendra à ce que ses propriétés algébrico-géométriques (s'exprimant par exemple par ses groupes de Picard, ou d'homotopie, ou d'homologie, locaux), seront essentiellement celles des complétés $\hat{\underline{O}}_{X,x}$ pour x dans un ouvert dense convenable U .

On peut, de façon générale, se proposer de faire l'étude simultanée des anneaux locaux complets obtenus ainsi à partir d'un système projectif adique (P_n) d'algèbres finies sur un schéma donné X . Il est plausible qu'on trouvera, moyennant certaines conditions de régularité (telle la platitude des P_n) que les groupes d'homotopie locale proviennent d'un système projectif de schémas en groupes finis sur X , et qu'on aura des résultats analogues pour les groupes de Picard locaux . En ce qui concerne ces dernières, un premier cas intéressant qui mérite d'être investigé est celui où on part d'une surface algébrique X ayant des courbes singulières, et qu'on se propose d'étudier les schémas de Picard locaux en les points variables sur celles-ci, en termes d'un pro-schéma en groupes convenable défini sur le lieu singulier .

6. Commentaires (*).

Le point de vue de la "Cohomologie étale" des schémas et des progrès récents dans cette théorie, nous amène à préciser et à élargir en même temps certains des problèmes posés. Pour la notion de "topologie" et de "topologie étale d'un schéma", je renvoie à M. ARTIN, Grothendieck Topologies, Harvard University 1962 (notes miméographiées) (**) .

Cette théorie, par une notion plus fine de localisation que celle que fournit la traditionnelle "topologie de Zariski", amène à attacher un intérêt particulier aux anneaux strictement locaux, i.e. les anneaux locaux henséliens à corps résiduel séparablement clos. Pour tout anneau local A de corps résiduel k, et toute clôture séparable k' de k, on peut trouver un homomorphisme local de A dans un anneau strictement local A', la clôture strictement locale de A, de corps résiduel k', ayant une propriété universelle évidente. A' est hensélien, plat sur A, et $A' \otimes_A k \simeq k'$; il est noethérien si et seulement si A l'est . (Cf. loc.cit. Chap. III, section 4)(***) . Si X est un préschéma, et x un point de X, x' un point au-dessus de x, spectre d'une clôture séparable k' de $k=k(x)$, on est amené à définir l'anneau strictement local de X en x', $\underline{O}'_{X,x'}$, comme la clôture strictement locale de l'anneau local habituel $\underline{O}_{X,x}$, relativement à l'extension résiduelle K'/K. Ce sont les anneaux strictement locaux des points "géométriques" de X qui, au point de vue de la topologie étale, sont sensés refléter les propriétés locales du préschéma X. Ils jouent aussi, à bien des égards, le rôle qu'on faisait jouer aux complétés des anneaux locaux de X (disons, en les points à corps résiduel algébriquement clos), tout en restant "plus proches" de X et permettant un passage plus aisé aux "points voisins".

Il y a lieu alors de reprendre un bon nombre de questions, qu'on pose généralement pour les anneaux locaux complets (éventuellement restreints à

(*) Rédigés en Mars 1963.
(**) Ou de préférence, à SGA 4.
(***) Ou EGA IV 18.8.

avoir un corps résiduel algébriquement clos), pour les anneaux locaux noethériens henséliens (resp. les anneaux strictement locaux noethériens). C'est ainsi que les problèmes topologiques soulevés dans les n°s 2 et 3, se posent plus généralement pour les anneaux strictement locaux. On peut d'ailleurs énoncer à titre conjectural, pour les "bons" anneaux strictement locaux, certaines propriétés de simple connexion et d'acyclicité pour les fibres géométriques du morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \to \mathrm{Spec}(A)$, qui montreraient que pour beaucoup de propriétés de nature "topologique", il revient au même de les prouver pour l'anneau A, ou pour son complété $\hat{A}$. Certains résultats obtenus déjà dans cette voie (*) permettent d'espérer qu'on disposera bientôt de résultats complets dans cette direction.

La notion de localisation étale fournit une définition qui semble raisonnable de la notion d'anneau local "<u>géométriquement parafactoriel</u>" ou "<u>géométriquement factoriel</u>", (dont le besoin a été signalé dans n° 5, p. 20): on appellera ainsi un anneau local dont la clôture strictement locale est parafactorielle, resp. factorielle. Des hypothèses de cette nature s'introduisent effectivement d'une façon naturelle dans l'étude de la cohomologie étale des préschémas. Ainsi, si X est un préschéma localement noethérien dont les anneaux strictement locaux sont factoriels (i.e. dont les anneaux locaux ordinaires sont "géométriquement factoriels"), on montre que les $H^i(X_{ét}, \underline{G}_m)$ sont des groupes de torsion pour $i \geqslant 2$ (ce qui permet parfois d'exprimer ces groupes en termes des groupes de cohomologie à coefficients dans les groupes μ_n des racines n.ièmes de l'unité), et si X est intègre de corps des fractions K, l'homomorphisme naturel $H^2(X_{ét},\underline{G}_m) \longrightarrow H^2(K,\underline{G}_m) = \mathrm{Br}(K)$ est injectif ; des exemples montrent que ces conclusions peuvent être en défaut, même pour X local, si on suppose seulement X factoriel au lieu de géométriquement factoriel (**).

Concernant les problèmes de type Lefschetz local et global soulevés dans 3.4, et leurs analogues en théorie des schémas, la version homologique de ces questions s'est considérablement clarifiée, tout résultant formellement de trois théorèmes généraux : l'un concernant la dimension cohomologique

(*) Cf. M. ARTIN dans SGA 4 XIX.

(**) Cf. A GROTHENDIECK, le groupe de Brauer II (Séminaire Bourbaki n° 297, Nov. 1965), notamment 1.8 et 1.11 b) de certains schémas affines (resp. des espaces de Stein), tels les schémas affines X de type fini sur un corps algébriquement clos : leur dimension cohomologique est $\leqslant \dim X$ ("théorème de Lefschetz affine") (*) ; l'autre étant un théorème de dualité pour la cohomologie (à coefficients discrets) d'un morphisme projectif (**), enfin le dernier un théorème de <u>dualité locale</u> de nature analogue (***). En Géométrie Algébrique, seul ce dernier n'est pas démontré au moment d'écrire ces lignes (il l'est cependant en car. 0, utilisant la résolution des singularités par HIRONAKA). D'ailleurs, dans le cadre transcendant, on dispose dès à présent de la dualité globale et locale, démontrées récemment par VERDIER. Bornons-nous à indiquer que dans l'énoncé des versions homologiques des problèmes 4.2 et 4.3 (qui désormais méritent le nom de conjectures), les conditions "à l'infini" a) et c) sont certainement superflues, seule étant importante la <u>structure cohomologique locale</u> de $X-Y$, qu'on supposera par exemple localement intersection complète de dimension $\geqslant n$. De plus, dans 4.3 disons, le fait que Y soit une section hyperplane ne devrait pas jouer, et doit pouvoir se remplacer par la seule hypothèse que X est compacte et $X-Y$ est Stein (i.e. dans le cas de la Géométrie Algébrique, X est propre sur k et $X-Y$ affine ; comme nous le disions, la version homologique de cette conjecture est démontrée pour les espaces algébriques sur le corps $\mathbb{C}$) (****).

Dans la définition (p. 15) des $\pi_i^x(X)$, on doit supposer $i \geqslant 2$. Pour $i=0,1$, il n'y a pas de définition raisonnable des $\pi_i^x(X)$, il y a lieu de les remplacer par $H_0^x(X)$ et $H_1^x(X)$, définis respectivement comme le co-noyau et le noyau dans l'homomorphisme naturel

$$\varinjlim H_0(U-(x),\underline{Z}) \longrightarrow \varinjlim H_0(U,\underline{Z}) \quad .$$

A la rigueur et pour la commodité des formulations, on pourra poser $\pi_i^x(X)=H_i^x(X)$ pour $i \leqslant 1$, sinon il faut compléter les assertions ultérieures concernant les π_i^x par les assertions correspondantes pour H_0^x, H_1^x. Si x est un point isolé de X, il convient de poser $\pi_i^x(X) = 0$ pour $i \neq 0$, $\pi_0^x(X) = H_0^x(X) = \underline{Z}$.

(*) Cf. SGA 4 XIV.
(**) Cf. SGA 4 XVIII.
(***) Cf. SGA 5 I.
(****) Cf. Exp. XIV.

L'assertion que les $\pi_i^x(U,f)$ soient isomorphes entre eux n'est vraie que lorsque X n'est pas disconnecté par x au voisinage de x, i.e. si $\pi_i^x(X) = 0$ pour $i = 0,1$. Dans le cas général $\pi_i^x(X)$ ne peut désigner qu'une famille de groupes, pas nécessairement isomorphes entre eux; cependant l'écriture $\pi_i^x(X) = 0$ garde un sens évident.

Page 15, ligne - 11, où je prévois que l'annulation des invariants homotopiques locaux $\pi_i^x(X)$ pour $x \in Y, i \leqslant n$ doit entraîner la bijectivité de $\pi_i(X-Y) \to \pi_i(X)$ pour $i < n-d$, la surjectivité pour $i=n-d$, il convient d'être prudent, faute de pouvoir disposer dans le contexte présent (comme en Géométrie Algébrique) de points "généraux" en lesquels les conditions locales devront aussi s'appliquer. Il sera sans doute nécessaire, pour cette raison, de faire appel à des invariants homotopiques locaux relatifs

$$\pi_i^Y(X,f) = \pi_i^Y(X,x) = \varinjlim_U \pi_{i-1} \quad (U - U \cap Y, f(t)) \qquad \text{pour } i \geqslant 2 ,$$

(et définition ad-hoc comme ci-dessus pour $i = 0,1$),

où Y est une partie fermée de X ; ou de suppléer à l'absence de points généraux en exprimant les hypothèses sur X en termes de propriétés de nature topologique (pour la topologie étale) des spectres des anneaux locaux de X, ce qui permet de récupérer des points généraux. La même réserve s'applique à la généralisation des conjectures 4.2. et 4.3. au cas où $X-Y$ n'est pas supposé localement une intersection complète, généralisation suggérée dans l'énoncé des conditions b) de ces conjectures.

Pour formuler les versions expurgées des conjectures 4.2. et 4.3. suggérées par les résultats auxquels on a fait allusion plus haut, il convient de poser la

Définition 1. Soit X un espace topologique, Y une partie localement fermée de X, et n un entier. On dit que X est de profondeur homotopique $\geqslant n$ le long de Y, et on écrit $\operatorname{prof\,hpt}_Y(X) \geqslant n$, si pour tout $x \in Y$, on a $\pi_i^Y(X,x) = 0$ pour $i < n$.

Il doit être équivalent de dire que pour tout ouvert X' de X, et tout $x \in X' \cap U = U'$ (où $U = X - Y$), l'homomorphisme canonique

$$\pi_i(U',x) \longrightarrow \pi_i(X',x)$$

est un isomorphisme pour $i < n-1$, un monomorphisme pour $i = n-1$.

Définition 2. Soit X un espace analytique complexe, n un entier, on dit que la profondeur homotopique rectifiée de X est n (*), si pour toute partie analytique localement fermée Y de X, on a

$$(x) \qquad \text{prof htp}_Y(X) \geqslant n - \dim Y$$

(où bien entendu, $\dim Y$ désigne la dimension complexe de Y).

Il doit être équivalent de dire que pour toute partie analytique irréductible Y localement fermée dans X, il existe une partie analytique fermée Z de Y, de dimension $< \dim Y$, telle que la relation (x) soit valable pour $Y-Z$ au lieu de Y. Cela permettrait par exemple dans la définition 2 de se borner au cas où Y est non singulière.

La conjecture suivante, de nature purement topologique, est dans la nature d'un "théorème de Hurewicz local".

Conjecture A ("th. de Hurewicz local"). Soit X un espace topologique, Y une partie localement fermée, soumis au besoin à des conditions de "smoothness" genre triangulabilité locale de la paire (X,Y), n un entier $\geqslant 3$. Pour qu'on ait $\text{prof htp}_Y(X) \geqslant n$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\underline{H}^i_Y(\underline{Z}_X) = 0 \qquad \text{pour} \qquad i < n$$

(on dit alors que X est de profondeur cohomologique $\geqslant n$ le long de Y), et que les groupes fondamentaux locaux

(*) Dans la première édition de ces notes, nous avions employé le terme : "vraie profondeur homotopique". Dans la présente version, nous suivons EGA IV 10.8.1 .

$$\pi_Y^2(X,x) = \varprojlim_{U \ni x} \pi_1(U - U \cap Y)$$

soient nuls (on dit alors que X est "pur" le long de Y) .

On notera que si X est un espace analytique, Y un sous-espace analytique, et si X est pur le long de Y, alors pour tout $x \in Y$, l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$, ainsi que ses localisés par rapport à des idéaux premiers contenant l'idéal définissant le germe Y en x (i.e. dans l'image inverse Y_x de Y par $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X,x}) = X_x \to X$) sont purs au sens de Exp. X ; il semble plausible que la réciproque soit également vraie. Des remarques analogues valent pour la profondeur cohomologique, étant entendu qu'on travaille avec la topologie étale sur les $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X,x})$.

La conjecture 4.1 se généralise alors en la

Conjecture B ("Pureté"). Soient E un espace analytique, X une partie analytique de E. On suppose que E est non singulier de dimension N en x, et que X peut se décrire par p équations analytiques au voisinage de tout point. Alors la profondeur homotopique rectifiée de X est $\geqslant N-p$.

En particulier, une intersection complète locale de dimension n en tout point serait de profondeur homotopique rectifiée $\geqslant n$, ce qui n'est autre que la conjecture 4.1.

Les conjectures 4.2. et 4.3. se généralisent respectivement en :

Conjecture C ("Lefschetz local"). Soient X un espace analytique, Y une partie analytique fermée, x un point de Y, on suppose que $X-Y$ est Stein au voisinage de x (par exemple Y défini par une équation en x), et que $X-Y$ est de profondeur homotopique rectifiée $\geqslant n$ au voisinage de x (par exemple, est en tout point de $X-Y$ voisin de x, une intersection complète de dimension $\geqslant n$, cf. conjecture B). Alors l'homomorphisme canonique

$$\pi_i^x(Y) \longrightarrow \pi_i^x(X)$$

est un isomorphisme pour $i < n-1$, un épimorphisme pour $i=n-1$.

Conjecture D ("Lefschetz global") . Soient X un espace analytique compact, Y un sous-espace analytique de X tel que U=X-Y soit Stein, et soit de profondeur homotopique rectifiée $\geqslant n$ (par exemple intersection complète de dimension $\geqslant n$ en tout point) . Alors l'homomorphisme canonique

$$\pi_i(Y) \longrightarrow \pi_i(X)$$

est un isomorphisme pour $i < n-1$, un épimorphisme pour $i=n-1$.

Remarque : Lorsque, dans les énoncés C et D , on remplace l'hypothèse que X-Y est Stein par l'hypothèse que X-Y est réunion de c+1 ouverts de Stein (qui jouera le rôle d'une hypothèse de "concavité" topologique) , les conclusions doivent être modifiées simplement en y remplaçant n par n-c .

Explicitons pour finir, dans le "cas global" D , la conjecture concernant le groupe fondamental (obtenue en faisant n=3) :

Conjecture D'(Lefschetz global pour groupe fondamental). Soient X un espace analytique compact sur le corps des complexes, Y une partie analytique fermée telle que U=X-Y soit Stein. Supposons de plus les conditions suivantes satisfaites :

(i) Pour tout $x \in U$, le groupe fondamental local $\pi_2^x(X,x)$ est nul (i.e. X est "pur en x") , ou seulement l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ est pur.

(ii) Les anneaux locaux des points de U sont "connexes en dimension $\geqslant 2$" .

(iii) Les anneaux locaux des points de U sont de dimension $\geqslant 3$.

Sous ces conditions, pour tout $x \in Y$, l'homomorphisme

$$\pi_1(Y,x) \longrightarrow \pi_1(X,x)$$

<u>est un isomorphisme</u> (et $\pi_2(Y,x) \longrightarrow \pi_2(X,x)$ <u>un épimorphisme</u>) .

On notera que les conditions locales (i) (ii) (iii) sur U sont satisfaites si U est localement intersection complète de dimension ≥ 3 . Du point de vue de la Géométrie Algébrique, (lorsque U provient d'un schéma, encore noté U) , les conditions (i) à (iii) correspondent à des hypothèses sur les invariants locaux $\pi_i^x(U)$, savoir $\pi_i^x(U) = 0$ pour $i < 3 - \mathrm{deg.tr.}k(x)/k$, pour les points x tels que l'on ait respectivement $\mathrm{deg.tr.}k(x)/k = 0,1,2$. La condition globale sur U (U Stein) sera satisfaite si X est projective et Y une section hyperplane .

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Abhyankar, Local uniformisation on algebraic surfaces, Annals of Math. vol. 63, N° 3, 1956

[2] W.L. Chow, On the theorem of Bertini for local domains, Proc. Nat. Acad. Sc. Vol. 44, N° 6, pp. 580-584, 1958

[3] M. Greenberg, Schemata over local rings, Annals of Math., vol. 73, 1961

[4] M. Kneser, Uber die Darstellung algebraischer Raumkurven als Durchschnitte von Flächen, Archiv der Math. Vol. XI, fasc. 3, 1960

[5] D. Mumford, The topology of normal singularities of an algebraic surface, and a criterion for simplicity, Publications Mathématiques, N° 9, 1961

[6] A. Néron, Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux, à paraître aux Publications Mathématiques (existe en notes mimeographiées à circulation restreinte...).

[7] A.H. Wallace, Homology Theory of algebraic Varieties, Pergamon Press, 1958.

[8] S. Abhyankar, Resolution of singularities of arithmetical surfaces, p. 111-152, Arithmetical Algebraic Geometry, Harper and Row, New-York 1963.

Exposé XIV

PROFONDEUR ET THEOREMES DE LEFSCHETZ EN COHOMOLOGIE ETALE .

par Mme M. Raynaud (*)

Au n°1, nous définissons une notion de "<u>profondeur étale</u>" qui est l'analogue en cohomologie étale de la notion de profondeur étudiée dans III, en cohomologie des faisceaux cohérents. Après une partie technique, nous démontrons au n°4 des "théorèmes de Lefschetz", le théorème central étant 4.2. Soient X un schéma, Y une partie fermée de X, U l'ouvert complémentaire X - Y et F un faisceau abélien sur X, pour la topologie étale ; d'une manière générale le but des théorèmes de Lefschetz est de montrer que, si F satisfait à certaines conditions locales sur U, exprimables en termes de profondeur étale aux points de U, alors, sous certaines conditions supplémentaires de nature globale sur U (par exemple U <u>affine</u>), l'application naturelle des groupes de cohomologie étale

$$H^i(X,F) \longrightarrow H^i(Y,F|Y)$$

est un isomorphisme pour des valeurs $i < n$, où n est un certain entier explicité. En prenant pour F un faisceau constant, on obtient ainsi des conditions pour que $\pi_o(X)$ soit égal à $\pi_o(Y)$ et des conditions pour que les groupes fondamentaux rendus abéliens de X et Y soient les mêmes. Au n°5, l'introduction d'une notion de "profondeur géométrique" permet de donner des cas particuliers utiles des théorèmes de Lefschetz (5.7). Enfin, au n°6, nous signalons quelques conjectures, concernant notamment des variantes "non commutatives" des théorèmes obtenus.

(*) D'après des notes inédites de A. Grothendieck.

1. Profondeur cohomologique et homotopique.

1.0. Fixons les notations suivantes. Soient X un schéma (**), Y une partie fermée de X, U l'ouvert complémentaire et i : $Y=X-U \to X$ l'immersion canonique. Soient $\underline{\Gamma}_Y$ le foncteur qui, à un faisceau abélien sur X, fait correspondre le "faisceau des sections à support dans Y", c'est-à-dire $\underline{\Gamma}_Y = i_* i^!$ (cf. SGA 4 IV 3.8 et VIII 6.6) et Γ_Y le foncteur $\Gamma . \underline{\Gamma}_Y$ (où Γ est le foncteur "sections globales"). Considérons la catégorie dérivée $D^+(X)$ et le foncteur dérivé $R\underline{\Gamma}_Y$ (resp. $R\Gamma_Y$) de $\underline{\Gamma}_Y$ (resp. de Γ_Y) (cf. [3]). Etant donné un complexe de faisceaux abéliens F sur X, à degrès bornés inférieurement, on peut le considérer comme un élément de $D^+(X)$; nous noterons alors $\underline{H}^p_Y(F)$ le p-ième faisceau de cohomologie de $R\underline{\Gamma}_Y(F)$ et $H^p_Y(X,F)$ le p-ième groupe de cohomologie de $R\Gamma_Y(F)$. Les résultats de (SGA 4 V 4.3 et 4.4) s'étendent trivialement à $\underline{H}^p_Y(F)$ et $H^p_Y(X,F)$.

Proposition 1.1. *Soient X un schéma, Y une partie fermée de X, U l'ouvert complémentaire et i : $U \to X$ l'immersion canonique. Désignons par F, soit un faisceau d'ensembles sur X, soit un faisceau en groupes sur X, soit un complexe de faisceaux abéliens sur X, à degrés bornés inférieurement. Fixons les notations suivantes : si $X' \to X$ est un morphisme, U' et F' désignent les images inverses de U et F sur X' ; par ailleurs, si $\bar{y}$ est un point géométriques de X, $\bar{X}$ désigne le localisé strict de X en $\bar{y}$ et $\bar{U}$ et $\bar{F}$ les images inverses de U et F dans $\bar{X}$.*

(**) Conformément à la nouvelle terminologie (cf. réédition de EGA I), nous appelerons ici "schéma" ce qui était appelé précédemment "préschéma" et "schéma séparé" ce qui était appelé "schéma".

1°) Soient F un faisceau d'ensembles sur X et n un entier $\leqslant 2$; alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le morphisme canonique

$$F \longrightarrow i_{*}i^{*}F$$

est injectif si $n \geqslant 1$, bijectif si $n \geqslant 2$.

(ii) Pour tout schéma X' étale au-dessus de X, le morphisme canonique

$$H^{o}(X',F') \longrightarrow H^{o}(U',F')$$

est injectif si $n \geqslant 1$, bijectif si $n \geqslant 2$.

Supposons de plus l'ouvert U rétrocompact dans X ; alors les conditions précédentes sont équivalentes à la suivante :

(iii) Pour tout point géométrique $\bar{y}$ de Y, le morphisme canonique

$$H^{o}(\bar{X},\bar{F}) \longrightarrow H^{o}(\bar{U},\bar{F})$$

est injectif si $n \geqslant 1$, et bijectif si $n \geqslant 2$.

2°) Soient F un faisceau en groupes sur X et n un entier $\leqslant 3$; alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le morphisme canonique

$$F \longrightarrow i_{*}i^{*}F$$

est injectif si $n \geqslant 1$, bijectif si $n \geqslant 2$, et si $n \geqslant 3$, en plus des conditions précédentes, le faisceau d'ensembles pointés $R^{1}i_{*}(i^{*}F)$ est nul.

(ii) Pour tout schéma X' étale au-dessus de X, le morphisme canonique

$$H^{o}(X',F') \longrightarrow H^{o}(U',F')$$

est injectif si $n \geqslant 1$, bijectif si $n \geqslant 2$, et de plus le morphisme canonique

$$H^1(X'F') \longrightarrow H^1(U',F')$$

est injectif si $n \geqslant 2$, bijectif si $n \geqslant 3$.

(ii bis) Identique à (ii), sauf dans le cas $n = 2$ où l'on suppose seulement $H^o(X',F') \longrightarrow H^o(U',F')$ bijectif.

Supposons de plus U rétrocompact dans X ; alors les conditions précédentes sont aussi équivalentes à la suivante :

(iii) Pour tout point géométrique $\bar{y}$ de Y, le morphisme canonique

$$H^o(\bar{X},\bar{F}) \longrightarrow H^o(\bar{U},\bar{F})$$

est injectif si $n \geqslant 1$, bijectif si $n \geqslant 2$; enfin si $n \geqslant 3$, en plus des conditions précédentes, $H^1(\bar{U},\bar{F})$ est nul.

3°) Soient F un complexe de faisceaux abéliens, à degrés bornés inférieurement et n un entier ; alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) On a $\underline{H}^p_Y(F) = 0$ pour $p < n$ (cf. 1.0).

(ii) Pour tout schéma X' étale au-dessus de X, le morphisme canonique

$$H^p(X',F') \longrightarrow H^p(U',F')$$

est bijectif pour $p < n-1$, injectif pour $p = n-1$.

Supposons U rétrocompact dans X, alors les conditions qui précédent sont aussi équivalentes à la suivante :

(iii) Pour tout point géométrique $\bar{y}$ de Y, le morphisme canonique

$$H^p(\bar{X},\bar{F}) \longrightarrow H^p(\bar{U},\bar{F})$$

est bijectif pour $p < n-1$, injectif pour $p = n-1$.

Dans le cas où F est un faisceau abélien et $n \geqslant 2$, *les conditions* (i) *et* (ii) *sont aussi équivalentes à la suivante* :

(ii bis) *Pour tout schéma* X' *étale au-dessus de* X, *le morphisme canonique*

$$H^p(X',F') \longrightarrow H^p(U',F')$$

est bijectif pour $p < n-1$.

Démonstration.

1°) Il est clair que (i) $\Longleftrightarrow$ (ii). Montrons que, si U est rétrocompact dans X, (i) $\Longleftrightarrow$ (iii). En effet, (i) équivaut à dire que, pour tout point géométrique $\bar{y}$ de X, le morphisme $F_{\bar{y}} \longrightarrow (i_* i^* F)_{\bar{y}}$ est injectif si $n \leqslant 1$ et bijectif si $n \leqslant 2$ (SGA 4 VIII 3.6). Comme ce morphisme est de toutes façons bijectif lorsque $\bar{y}$ est un point géométrique de U, on peut se borner aux points géométriques $\bar{y}$ de Y. Or il résulte du fait que i est quasi-compact et de (SGA 4 VIII 5.3) que le morphisme

$$F_{\bar{y}} \longrightarrow (i_* i^* F)_{\bar{y}}$$

s'identifie canoniquement au morphisme

$$H^0(\bar{X},\bar{F}) \longrightarrow H^0(\bar{U},\bar{F}) \quad ,$$

d'où l'équivalence de (i) et (iii).

2°) (i) $\Longrightarrow$ (ii). Les assertions sur le H^0 résultent de 1°). Soit alors i' l'immersion canonique de U' dans X' ; les assertions sur le H^1 résultent de la suite exacte (SGA 4 XII 3.2)

$$0 \longrightarrow H^1(X',i'_* i'^* F') \longrightarrow H^1(U',F') \longrightarrow H^0(X',R^1 i'_*(i'^* F')).$$

(ii bis) $\Longrightarrow$ (i). D'après 1°), il suffit de montrer que, pour $n \geqslant 3$, on a $R^1 i_*(i^* F) = 0$. Or $R^1 i_*(i^* F)$ est le faisceau associé au préfaisceau $X' \longmapsto H^1(U', F')$, c'est-à-dire, par hypothèse, le faisceau associé au préfaisceau $X' \longmapsto H^1(X', F')$, lequel est nul.

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii). Tenant compte de 1°), la seule chose qui reste à voir est que la relation $R^1 i_*(i^* F) = 0$ équivaut au fait que $H^1(\bar{U}, \bar{F}) = 0$ pour tout point géométrique $\bar{y}$ de Y. Comme $R^1 i_*(i^* F)$ est nul hors de Y, il revient au même de dire que $R^1 i_*(i^* F) = 0$ ou que $(R^1 i_*(i^* F))_{\bar{y}} = 0$ pour tout point géométrique $\bar{y}$ de Y. Il suffit alors de noter que, i étant quasi-compact, on a $(R^1 i_*(i^* F))_{\bar{y}} = H^1(\bar{U}, \bar{F})$ (SGA 4 VIII 5.3).

3°) (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit X' un schéma étale au-dessus de X ; on a la suite exacte (SGA 4 V 4.5)

$$(*) \qquad \longrightarrow H^p_{Y'}(X', F') \longrightarrow H^p(X', F') \longrightarrow H^p(U', F') \longrightarrow \quad ;$$

donc (ii) équivaut à $H^p_{Y'}(X', F') = 0$ pour $p < n$ et pour tout schéma X' étale au-dessus de X. Considérons alors la suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(X', \underline{H}^q_Y(F)) \Longrightarrow H^*_{Y'}(X', F') \quad ;$$

par hypothèse, $\underline{H}^q_Y(F) = 0$ pour $q < n$, d'où $E_2^{pq} = 0$ pour $p+q < n$ et par suite $H^p_{Y'}(X', F') = 0$ pour $p < n$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Le faisceau $\underline{H}^p_Y(F)$ est associé au préfaisceau $X' \longmapsto H^p_{Y'}(X', F')$; comme on a déjà remarqué que (ii) équivaut à la relation $H^p_{Y'}(X', F') = 0$ pour $p < n$ et pour tout schéma X' étale au-dessus X, on a bien $\underline{H}^p_Y(F) = 0$ pour $p < n$.

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii). Les faisceaux $\underline{H}^p_Y(F)$ sont concentrés sur Y ; par suite il revient au même de dire que $\underline{H}^p_Y(F) = 0$ ou de dire que, pour tout point géométrique $\bar{y}$ de Y, la fibre $(\underline{H}^p_Y(F))_{\bar{y}}$ est nulle. Or, i étant quasi-compact, on déduit de (SGA 4 VIII 5.2) que l'on a $(\underline{H}^p_Y(F))_{\bar{y}} = H^p_{\bar{Y}}(\bar{X},\bar{F})$. L'équivalence de (i) et (iii) en résulte, compte tenu de l'analogue sur $\bar{X}$ de la suite exacte (*).

(ii bis) $\Longrightarrow$ (ii) dans le cas où F est un faisceau abélien. La seule chose qui reste à montrer est que $\underline{H}^{n-1}_Y(F) = 0$. Or, pour $n > 2$, le faisceau $\underline{H}^{n-1}_Y(F)$ est associé au préfaisceau $X' \longmapsto H^{n-2}(U',F') = H^{n-2}(X',F')$ donc est bien nul. Le cas $n = 2$ résulte du fait que $\underline{H}^1_Y(F)$ est le conoyau du morphisme $F \longrightarrow i_* i^* F$.

Définition 1.2. *Les notations sont celles de* 1.1. *On dit que* F *est de* Y-profondeur étale $\geqslant n$ *et on écrit*

$$\mathrm{prof}_Y(F) \geqslant n$$

si F *satisfait aux conditions équivalentes* (i) *et* (ii) *de* 1.1. *Si* F *est un complexe de faisceaux abéliens, on appelle* Y-profondeur étale *de* F *la borne supérieure des* n *pour lesquels* $\mathrm{prof}_Y(F) \geqslant n$; *on utilisera la même notation si* F *est un faisceau d'ensembles resp. de groupes non nécessairement commutatifs* (*de sorte qu'on a alors* $0 \leqslant \mathrm{prof}_Y(F) \leqslant 2$ *resp.* $0 \leqslant \mathrm{prof}_Y(F) \leqslant 3$, *lorsque le contexte ne permet pas de confusion sur celle des trois variantes envisagées ici qu'on utilise*).

Si $\mathbb{L}$ *est un ensemble de nombres premiers, on dit que* X *est de* Y-profondeur étale pour $\mathbb{L} \geqslant n$ *et on écrit*

$$\mathrm{prof}^{\mathbb{L}}_Y(X) \geqslant n$$

si, pour tout faisceau constant de la forme $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ *avec* $\ell \in \mathbb{L}$, *on a*

$\mathrm{prof}_Y(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \geqslant n$. On définit de façon évidente la Y-profondeur étale pour $\mathbb{L}$ de X. Si $\mathbb{L} = \mathbb{P}$, ensemble de tous les nombres premiers, et s'il n'y a pas de risque de confusion avec la notation de (EGA IV 5.7.1) (relative au cas où $F = \mathcal{O}_X$), on omet $\mathbb{L}$ dans la notation ; sinon on écrit $\mathrm{prof}\ \mathrm{\acute{e}t}_Y(X)$.

Enfin on dit que X est de Y-profondeur homotopique pour $\mathbb{L} \geqslant 3$ et on écrit

$$\mathrm{prof}\ \mathrm{hop}_Y^{\mathbb{L}}(X) \geqslant 3$$

si, pour tout faisceau de $\mathbb{L}$-groupes constant fini F sur X, on a $\mathrm{prof}_Y(F) \geqslant 3$. Si $\mathbb{L} = \mathbb{P}$, on omet $\mathbb{L}$ dans la notation.

Corollaire 1.3. Sous les conditions de 1.1, si $\mathrm{prof}_Y(F) \geqslant n$, alors, pour tout fermé Z de Y, on a

$$\mathrm{prof}_Z(F) \geqslant n.$$

Faisons par exemple le raisonnement dans le cas où F est un complexe de faisceaux abéliens à degrés bornés inférieurement. On utilise 1.1 3°) (ii). Soit $V = X - Z$ et considérons, pour tout entier p, la suite de morphismes

$$H^p(X,F) \xrightarrow{f} H^p(V,F) \xrightarrow{g} H^p(U,F).$$

Par hypothèse g et f.g sont bijectifs pour $p < n-1$ et injectifs pour $p = n-1$; il en est donc de même de f. Comme le raisonnement est valable quand on remplace X par un schéma X' étale au-dessus de X, ceci démontre 1.3.

Corollaire 1.4. Les notations sont celles de 1.1 2°). Si X' est un schéma sur X, notons Φ' le foncteur qui fait correspondre à un revêtement étale de X' sa restriction à U', et $\Phi'_{F'}$ le foncteur qui fait correspondre à un torseur (*) sous F' sa restriction à U'. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) On a $\mathrm{prof}_Y(F) \geqslant 1$ (resp. $\mathrm{prof}_Y(F) \geqslant 2$, resp. $\mathrm{prof}_Y(F) \geqslant 3$).

(ii) Pour tout schéma X' étale au-dessus de X, le foncteur $\Phi'_{F'}$ est fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégories).

En particulier, pour que l'on ait $\mathrm{prof}_Y(X) \geqslant 1$ (resp. $\mathrm{prof}_Y(X) \geqslant 2$, resp. prof $\mathrm{hop}_Y(X) \geqslant 3$), il faut et il suffit que le foncteur Φ' soit fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégorie).

Cela résulte en effet de 1.1 2°) (ii), compte tenu de l'interprétation de $H^1(X',F')$ comme l'ensemble des classes (mod. isomorphismes) de torseurs sous F' (SGA 4 VII 2), et des revêtements étales Z de degré n d'un schéma comme associés à des revêtements principaux galoisiens de groupe le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, à Z étant associé le revêtement $\underline{\mathrm{Isom}}_X(Z_\circ,Z)$, où $Z_\circ$ est le revêtement trivial de X de degré n.

Corollaire 1.5. Sous les conditions de 1.1 3°), supposons que l'on ait $\mathrm{prof}_Y(F) \geqslant n$; alors on a

$$H^n_Y(X,F) \simeq H^o(X,\underline{H}^n_Y(F)) .$$

Le corollaire résulte de la suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(X,\underline{H}^q_Y(F)) \Rightarrow H^*_Y(X,F) .$$

En effet on a par hypothèse $E_2^{pq} = 0$ pour $q < n$, d'où il résulte que

$$H^n_Y(X,F) = E_2^{on} = H^o(X,\underline{H}^n_Y(F)) .$$

(*) i.e. un "fibré principal homogène" dans une ancienne terminologie.

Remarques 1.6.

a) La notion de Y-profondeur, sous la forme des conditions équivalentes (i) et (ii) de 1.1, a un sens pour n'importe quel site. Dans le cas particulier où X est un schéma localement noethérien, muni de la topologie de Zariski, et F un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules cohérent, on trouve la notion usuelle de Y-profondeur comme borne inférieure des profondeurs aux points de Y (III).

b) Pour $n \leqslant 2$, la notion de Y-profondeur étale de X est indépendante de $\mathbb{L}$. Pour n = 1, elle signifie simplement que U est dense dans X. En effet cette condition est nécessaire pour que l'on ait $\mathrm{prof}_Y(F) \geqslant 1$, et elle est aussi suffisante car on peut supposer X réduit, cas dans lequel la condition U dense dans X se conserve par changement de base étale (EGA IV 11.10.5) (ii) b)). Si U est rétrocompact dans X, la relation $\mathrm{prof}_Y(X) \geqslant 1$ équivaut aussi à dire que Y ne contient aucun point maximal de X (EGA I 6.6.5). Pour n = 2 et U rétrocompact dans X, la condition $\mathrm{prof}_Y(X) \geqslant 2$ équivaut au fait que, pour tout point géométrique $\bar{y}$ de Y, $\bar{U}$ est connexe non vide, c'est-à-dire que " Y ne disconnecte pas X, localement pour la topologie étale".

c) Si X est de Y-profondeur $\geqslant n$ pour $\mathbb{L}$ et U rétrocompact dans X, alors pour tout faisceau abélien localement constant de $\mathbb{L}$-torsion F sur X, on a $\mathrm{prof}_Y(F) \geqslant n$. En effet, la propriété $\mathrm{prof}_Y(F) \geqslant n$ étant locale pour la topologie étale, on peut supposer F constant ; alors F est limite inductive filtrante de faisceaux sommes finies de faisceaux de la forme $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, où m est un entier > 0 et $p \in \mathbb{L}$. En utilisant 1.1 (iii) et (SGA 4 VII 3.3), on voit que l'on peut se ramener au cas où $F = \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, puis, par récurrence sur m, au cas où $F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour lequel l'assertion résulte de la définition.

d) D'après 1.4, si l'on a $\mathrm{prof}_Y(X) \geq 3$, le couple (X,Y) est <u>pur</u> au sens de X 3.1. En fait les couples purs que l'on rencontre dans la pratique (cf. X 3.4) satisfont à la condition plus forte de profondeur homotopique ≥ 3, et cette notion peut donc se substituer avantageusement à celle de couple pur.

e) Soient F un complexe de faisceaux abéliens et $T(F)$ le complexe obtenu en appliquant à F le foncteur translation ([3]) ; alors on a évidemment :

$$\mathrm{prof}_Y(T(F)) = \mathrm{prof}_Y(F) - 1 .$$

f) Signalons que les travaux récents d'Artin-Mazur ([1]) permettent de définir la notion de profondeur homotopique $\geq n$, quel que soit l'entier n (pas seulement si $n \geq 3$).

g) Sous les conditions de 1.1 3°), pour que l'on ait $\mathrm{prof}_Y(F) = \infty$, il faut et il suffit que l'on ait $F \xrightarrow{\sim} Ri_*(i^*F)$ dans $D^+(X)$. En effet, les $\underline{H}^p_Y(F)$ sont les faisceaux de cohomologie du cône (= mapping cylinder) du morphisme canonique $F \to Ri_*i^*(F)$.

<u>Définition</u> 1.7. <u>Soient</u> X <u>un schéma</u>, x <u>un point de</u> X, $\bar{x}$ <u>un point géométrique au-dessus de</u> x <u>et</u> $\bar{X}$ <u>le localisé strict de</u> X <u>en</u> $\bar{x}$. <u>Comme précédemment</u> F <u>désigne</u>, <u>soit un faisceau d'ensembles sur</u> X, <u>soit un faisceau en groupes sur</u> X, <u>soit un complexe de faisceaux abéliens sur</u> X <u>à degrés bornés inférieurement</u>, $\bar{F}$ <u>son image inverse sur</u> $\bar{X}$ <u>et</u> $\mathbb{L}$ <u>un ensemble de nombres premiers</u>. <u>On dit que</u> F est de profondeur

étale $\geqslant n$ au point x (resp. que la profondeur étale pour $\mathbb{L}$ de X en x est $\geqslant n$, resp. que la profondeur homotopique pour $\mathbb{L}$ de X en x est $\geqslant 3$) et l'on écrit $\mathrm{prof}_x(F) \geqslant n$ (resp. $\mathrm{prof}_x^{\mathbb{L}}(X) \geqslant n$, resp. $\mathrm{prof\,hop}_x^{\mathbb{L}}(X) \geqslant 3$) si l'on a $\mathrm{prof}_{\bar{x}}(\bar{F}) > n$ (resp. $\mathrm{prof}_{\bar{x}}^{\mathbb{L}}(\bar{X}) > n$, resp. $\mathrm{prof\,hop}_{\bar{x}}^{\mathbb{L}}(\bar{X}) \geqslant 3$). On définit de façon évidente l'entier $\mathrm{prof}_x^{\mathbb{L}}(X)$ et, si F est un complexe de faisceaux abéliens, l'entier $\mathrm{prof}_x(F)$. Si $\mathbb{L}$ est l'ensemble de tous les nombres premiers, on omet $\mathbb{L}$ dans la notation $\mathrm{prof}_x^{\mathbb{L}}(X)$, sauf s'il y a risque de confusion avec la notation de (EGA IV 5.7.1), auquel cas on écrit $\mathrm{prof\,ét}_x(X)$.

On a alors la caractérisation ponctuelle suivante de la profondeur :

Théorème 1.8. Soient X un schéma, Y une partie fermée de X telle que l'ouvert $U = X - Y$ soit rétrocompact dans X. Si F est, soit un faisceau d'ensembles sur X, soit un faisceau en groupes sur X, soit un complexe de faisceaux abéliens sur X à degrés bornés inférieurement, alors on a

$$\mathrm{prof}_Y(F) = \operatorname*{Inf}_{y \in Y} \mathrm{prof}_y(F) .$$

1.8.1. Montrons d'abord que, pour tout point y de Y, on a l'inégalité $\mathrm{prof}_y(F) \geqslant \mathrm{prof}_Y(F)$. Soient en effet $\bar{y}$ un point géométrique au-dessus de y, $\bar{X}$ le localisé strict de X en $\bar{y}$, $\bar{F}$ et $\bar{Y}$ les images inverses de F et Y sur $\bar{X}$. On a d'après 1.7 et 1.3

$$\mathrm{prof}_y(F) = \mathrm{prof}_{\bar{y}}(\bar{F}) \geqslant \mathrm{prof}_{\bar{Y}}(\bar{F}) \geqslant \mathrm{prof}_Y(F) \quad ,$$

la dernière inégalité utilisant l'hypothèse " U retrocompact ", via les conditions (iii) dans 1.1 et la transitivité dans la formation des localisés stricts.

1.8.2. Inversement supposons que, pour tout point y de Y, on ait $\mathrm{prof}_y(Y) \geqslant n$ (n entier) et montrons que l'on a alors $\mathrm{prof}_Y(F) \geqslant n$.

Rappelons d'abord les résultats bien connus suivants (SGA 4 VIII) :

Lemme 1.8.2.1. _Soient_ X _un schéma,_ F _un faisceau d'ensembles sur_ X (_resp._ $G \to F$ _un monomorphisme de faisceaux d'ensembles sur_ X). _Alors, pour que deux sections_ s _et_ s' _de_ F _coïncident_ (_resp. pour qu'une section_ s _de_ F _provienne d'une section de_ G), _il faut et il suffit qu'il en soit ainsi localement. En particulier, si_ s _et_ s' _sont deux sections de_ F, _il existe un plus grand ouvert_ V _de_ X _sur lequel elles coïncident_ (_resp. si_ s _est une section de_ F _sur_ X, _il existe un plus grand ouvert_ V _de_ X _tel que_ $s|V$ _provienne d'une section de_ G _sur_ V). _Cet ouvert est aussi l'ensemble des points_ x _de_ X _tels que, désignant par_ $\bar{x}$ _un point géométrique au-dessus de_ x, _les sections_ s _et_ s' _aient même image dans la fibre_ $F_{\bar{x}}$ (_resp. que l'image de_ s _dans_ $F_{\bar{x}}$ _provienne d'un élément de_ $G_{\bar{x}}$).

Revenons à la démonstration de 1.8.

1°) Cas où F est un faisceau d'ensembles. Si $n = 1$, il suffit de montrer que le morphisme canonique

$$H^0(X,F) \to H^0(U,F)$$

est injectif, le résultat s'appliquant encore quand on remplace X par un schéma étale au-dessus de X. Soient s et s' deux sections de F au-dessus de X qui ont même image dans $H^0(U,F)$ et soit V le plus grand ouvert au-dessus duquel elles sont égales ; on a évidemment $V \supset U$. Supposons $V \neq X$ et soient y un point maximal de $X - V$, $\bar{y}$ un point géométrique au-dessus de y, $\bar{X}$ le localisé strict de X en $\bar{y}$ et $\bar{V}$ et $\bar{F}$ les images inverses de V et F sur $\bar{X}$. D'après le choix de y, on a $\bar{X} - \bar{y} = \bar{V}$ et par hypothèse, le morphisme

$$H^o(\bar{X},\bar{F}) \to H^o(\bar{X}-\bar{y},\bar{F}) = H^o(\bar{V},\bar{F})$$

est injectif. Il en résulte que s et s' coïncident au point y, ce qui est absurde. Si $n = 2$, il suffit de montrer, compte tenu de ce qui précède, que le morphisme

$$H^o(X,F) \to H^o(U,F) = H^o(X,i_*i^*F)$$

est surjectif (où i est l'immersion canonique de U dans X). Soient s une section de i_*i^*F au-dessus de X et V le plus grand ouvert au-dessus duquel elle provient d'une section de F. Supposons $V \neq X$ et soit y un point maximal de $X - V$; avec les notations précédentes, il résulte de l'hypothèse que le morphisme canonique

$$H^o(\bar{X},\bar{F}) \to H^o(\bar{X}-\bar{y},\bar{F}) = H^o(\bar{V},\bar{F})$$

est bijectif ; par suite $s|\bar{V}$ se prolonge au point $\bar{y}$, ce qui est absurde et achève la démonstration dans le cas 1°) .

2°) Cas où F est un faisceau en groupes. Compte tenu de 1°), la seule chose qui reste à montrer est que, dans le cas $n = 3$, le morphisme

$$H^1(X,F) = H^1(X,i_*i^*F) \to H^1(U,F)$$

est bijectif. On sait déjà qu'il est injectif grâce à 1°) et à 1.1 2°) (ii bis). Pour la surjectivité, on utilise la suite exacte (SGA 4 XII 3.2)

$$0 \to H^1(X,i_*i^*F) \to H^1(U,F) \xrightarrow{d} H^o(X,R^1i_*(i^*F)) \quad .$$

Soient $s \in H^1(U,F)$ et $V \supset U$ le plus grand ouvert au-dessus duquel

$d(s) = 0$; c'est aussi le plus grand ouvert tel que s provienne d'un élément de $H^1(V,F)$. Supposons $V \neq X$ et soit y un point maximal de $X - V$; si $\bar{X}$ est le localisé strict de X en un point géométrique $\bar{y}$ au-dessus de y, on a, avec des notations évidentes, la suite exacte

$$0 \to H^1(\bar{X},\bar{i}_*(\bar{i}^*\bar{F})) \to H^1(\bar{U},\bar{F}) \xrightarrow{\bar{d}} H^o(\bar{X},R^1\bar{i}_*(\bar{i}^*\bar{F})) .$$

Comme $i : U \to X$ est un quasi-compact, $R^1\bar{i}_*(\bar{i}^*\bar{F})$ est l'image inverse de $R^1 i_*(i^*F)$ par le morphisme $\bar{X} \to X$, d'où $H^o(\bar{X},R^1\bar{i}_*(\bar{i}^*\bar{F})) = (R^1 i_*(i^*F))_{\bar{y}}$. Par hypothèse et vu que $y \in Y$, le morphisme

$$H^1(\bar{X},\bar{F}) \to H^1(\bar{V},\bar{F})$$

est bijectif. L'image $\bar{s}$ de s dans $H^1(\bar{U},\bar{F})$, qui se prolonge à $\bar{V}$ par définition de V, se prolonge donc aussi à $\bar{X}$; il en résulte que $\bar{d}(\bar{s}) = 0$ donc l'image de $d(s)$ dans la fibre géométrique $(R^1 i_*(i^*F))_{\bar{y}}$ est nulle ; mais ceci contredit la définition de V, d'où le cas 2°).

3°) Cas où F est un complexe de faisceaux abéliens, à degrés bornés inférieurement. On raisonne par récurrence sur n. La conclusion est satisfaite pour n assez petit, puisque F est à degrés bornés inférieurement. Supposons donc que $\mathrm{prof}_Y(F) \geqslant n-1$ et montrons que l'on $\mathrm{prof}_Y(F) \geqslant n$, sachant que, pour tout point y de Y, on a $\mathrm{prof}_y(F) \geqslant n$. Il suffit de voir que le morphisme canonique

$$(*) \qquad H^{n-2}(X,F) \to H^{n-2}(U,F)$$

est surjectif et que

$$(**) \qquad H^{n-1}(X,F) \to H^{n-1}(U,F)$$

est injectif (le résultat s'appliquant quand on remplace X par un schéma étale au-dessus de X).

a) Surjectivité de (*). La démonstration est analogue à celle de 2°). Compte tenu de 1.5 et de (SGA 4 V 4.5), on a la suite exacte

$$H^{n-2}(X,F) \to H^{n-2}(U,F) \xrightarrow{d} H_Y^{n-1}(X,F) = H^o(X,\underline{H}_Y^{n-1}(F)) .$$

Soit $s \in H^{n-2}(U,F)$ et $V \supset U$ le plus grand ouvert au-dessus duquel $d(s) = 0$, lequel est aussi le plus grand ouvert tel que s se prolonge à $H^{n-2}(V,F)$. Supposons $V \neq X$ et soient y un point maximal de $X - V$ et $\bar{X}$ le localisé strict de X en un point géométrique $\bar{y}$ au-dessus de y. Comme $i : U \to X$ est quasi-compact, la formation de $\underline{H}_Y^{n-1}(F)$ commute au changement de base $\bar{X} \to X$ et l'on a donc (avec des notations évidentes) la suite exacte

$$H^{n-2}(\bar{X},\bar{F}) \to H^{n-2}(\bar{U},\bar{F}) \xrightarrow{\bar{d}} H_{\bar{Y}}^{n-1}(\bar{X},\bar{F}) = (\underline{H}_Y^{n-1}(F))_{\bar{y}} ,$$

la dernière égalité résultant de l'hypothèse de rétrocompacité sur U. Or on a a hypothèse l'isomorphisme

$$H^{n-2}(\bar{X},\bar{F}) \xrightarrow{\sim} H^{n-2}(\bar{X}-\bar{y},\bar{F}) = H^{n-2}(\bar{V},\bar{F}) ;$$

par suite l'image $\bar{s}$ de s dans $H^{n-2}(\bar{U},\bar{F})$, qui se prolonge (par définition de V) à $H^{n-2}(\bar{V},\bar{F})$, se prolonge aussi à $H^{n-2}(\bar{X},\bar{F})$; mais ceci montre que $\bar{d}(\bar{s}) = 0$, c'est-à-dire que $d(s)$ est nulle en $\bar{y}$, ce qui est absurde.

b) Injectivité de (**). En utilisant la surjectivité de (*), on obtient la suite exacte

$$0 \to H^o(X,\underline{H}_Y^{n-1}(F)) \to H^{n-1}(X,F) \to H^{n-1}(U,F)$$

et il faut montrer que tout élément $s \in H^o(X,\underline{H}_Y^{n-1}(F))$ est nul. Soit

V le plus grand ouvert au-dessus duquel $s = 0$. Supposons que l'on ait $V \neq X$ et soient y un point maximal de $X - V$, $\bar{X}$ un localisé strict de X en un point géométrique $\bar{y}$ au-dessus de y. On a, par hypothèse de récurrence et par 1.8.1, la relation $\mathrm{prof}_{\bar{Y}}(\bar{F}) \geqslant \mathrm{prof}_Y(F) \geqslant n-1$, d'où le fait que l'application e du diagramme qui suit est injective :

$$H^o(\bar{X},\underline{H}^{n-1}_{\bar{Y}}(\bar{F})) = (\underline{H}^{n-1}_Y(F))_{\bar{y}} \xrightarrow{e} H^{n-1}(\bar{X},\bar{F}) \xrightarrow{f} H^{n-1}(\bar{V},\bar{F}) \ .$$

Il en est de même de f en vertu de l'hypothèse ; l'égalité de gauche résulte de l'hypothèse de rétrocompacité sur U. Soit $\bar{s}$ l'image de s dans $(\underline{H}^{n-1}_Y(F))_{\bar{y}}$; comme s s'annule au-dessus de V, on a $f.e(\bar{s}) = 0$, d'où $\bar{s} = 0$, ce qui contredit le choix de y et achève la démonstration.

Remarque 1.9. Un résultat analogue à 1.8 est sans doute valable dans le cas où l'on remplace le topos étale d'un schéma X par un " topos localement de type fini ", c'est-à-dire définissable par un site localement de type fini (SGA 4 VI 1.1). Pour le voir, il faut utiliser un résultat de P. Deligne (SGA 4 XVII), affirmant qu'il y a " suffisamment de foncteurs fibres " dans un tel topos.

Nous allons déduire de 1.8 des cas importants où l'on peut déterminer la profondeur étale.

Théorème 1.10. (Théorème de semi-pureté cohomologique). Désignons par X, soit un schéma lisse sur un corps k, soit un schéma régulier excellent (EGA IV 7.8.2) de caractéristique nulle (N.B. si l'on admet la résolution des singularités au sens de (SGA 4 XIX), il suffit de supposer, plus généralement, que X est un schéma régulier excellent d'égale caractéristique). Soient Y une partie fermée de X et $\mathbb{L}$ l'ensemble des nombres premiers distincts de la caractéristique de X. Alors on a

$$\mathrm{prof}_Y^{\mathbb{L}}(X) = 2\ \mathrm{codim}(Y,X)\ .$$

Démonstration. Il résulte de 1.8 que l'on a

$$\mathrm{prof}_Y^{\mathbb{L}}(X) = \operatorname*{Inf}_{y \in Y} \mathrm{prof}_y(X)\ .$$

Comme d'autre part $\mathrm{codim}(Y,X) = \operatorname*{Inf}_{y\in Y} \dim \mathcal{O}_{X,y}$, on est ramené à montrer que

$$\mathrm{prof}_y^{\mathbb{L}}(X) = 2 \dim \mathcal{O}_{X,y}\ ,$$

ce qui résulte de (SGA 4 XVI 3.7 et XIX 3.2).

Théorème 1.11. (Théorème de pureté homotopique). Si X est un schéma localement noethérien qui est régulier (resp. dont les anneaux locaux sont des intersections complètes), Y une partie fermée de X telle que $\mathrm{codim}(Y,X) \geqslant 2$ (resp. $\mathrm{codim}(Y,X) \geqslant 3$), alors on a

$$\mathrm{prof\ hop}_Y(X) \geqslant 3\ .$$

Il résulte en effet de 1.8 que l'on a $\mathrm{prof\ hop}_Y(X) = \operatorname*{Inf}_{y\in Y} \mathrm{prof\ hop}_y(X)$. Or les anneaux strictement locaux de X aux différents points de Y sont des anneaux réguliers de dimension $\geqslant 2$ (resp. d'intersection complète et de dimension $\geqslant 3$). Il résulte alors du théorème de pureté X 3.4 que $\mathrm{prof\ hop}_y(X) \geqslant 3$, ce qui démontre le théorème.

Exemple 1.12. Soient X un schéma localement noethérien, Y une partie fermée de X et $n = 1$ ou 2. Alors, si l'on a $\mathrm{prof}_Y(\mathcal{O}_X) \geqslant n$ ($\mathrm{prof}_Y(\mathcal{O}_X)$ désignant la Y-profondeur au sens des faisceaux cohérents (cf. 1.6 a)), on a aussi $\mathrm{prof}_Y(X) \geqslant n$; c'est évident pour $n = 1$ et, pour $n = 2$, cela n'est autre que le théorème de Hartshorne (III 1). Par contre l'assertion analogue est fausse pour $n \geqslant 3$. Prenons par exemple un espace affine de dimension $\geqslant 3$ sur un corps de caractéristique $\neq 2$ et faisons opérer le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par symétrie par rapport à l'origine. Soient X le quotient et $Y = \{x\}$ l'image de l'origine dans X. Alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de Cohen-Macaulay, donc on a $\mathrm{prof}_x(\mathcal{O}_X) \geqslant 3$; mais l'espace affine privé de l'origine est un revêtement étale de $X - \{x\}$ qui ne se prolonge pas en un revêtement étale de X ; donc on a d'après 1.4 $\mathrm{prof}_Y(X) = 2$.

Le théorème suivant est l'analogue de (EGA IV 6.3.1):

Théorème 1.13. *Soient* $f : X \to S$ *un morphisme de schémas,* Y *une partie fermée de* X, Z *une partie fermée de* S, *telles que* $f(Y) \subset Z$. *On suppose que les anneaux locaux de* X *aux différents points de* Y *sont noethériens et que les ouverts* $X - Y$ *et* $S - Z$ *sont rétrocompacts dans* X *et* S *respectivement. Soient* p, q, r *des entiers tels que* $p \geqslant -r$, $q \geqslant 0$, $\mathbb{L}$ *un ensemble de nombres premiers et* F *un complexe de faisceaux abéliens de* $\mathbb{L}$*-torsion sur* S, *tel que les faisceaux de cohomologie* $\underline{H}^i(F)$ *soient nuls pour* $i < -r$. *On suppose que*

a) *Le morphisme* f *est localement* $(p+q+r-2)$*-acyclique pour* $\mathbb{L}$ (SGA 4 XV 1.11).

b) *On a*

$$\mathrm{prof}_Z(F) \geqslant p \ .$$

c) *Pour tout point* s *de* Z, *on a*

$$\mathrm{prof}^{\mathbb{L}}_{Y_s}(X_s) \geqslant q \ .$$

Alors on a

$$\mathrm{prof}_Y(f^*F) \geqslant p+q \ .$$

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.13.1. Soient $\mathbb{L}$ un ensemble de nombres premiers, n et r des entiers, $f : X \to S$ un morphisme localement n-acyclique pour $\mathbb{L}$. Soient F un complexe de faisceaux abéliens, à faisceaux de cohomologie de $\mathbb{L}$-torsion, tel que $\underline{H}^i(F) = 0$ pour $i < -r$, Z une partie fermée de S telle que $S - Z$ soit rétrocompact dans S et $T = f^{-1}(Z)$. Alors le morphisme canonique

$$f^*(\underline{H}^i_Z(F)) \to \underline{H}^i_T(f^*F)$$

est bijectif pour $i < n-r+2$ et injectif pour $i = n-r+2$.

Posons $U = S - Z$ et $V = X - T$, de sorte que l'on a le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{g} & U \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array} \quad .$$

Considérons le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} \to & f^*(\underline{H}^i_Z(F)) & \to & f^*(\underline{H}^i(F)) & \to & f^*(\underline{H}^i(Rj_*(j^*F))) & \to \\ & \downarrow & & \downarrow\wr & & \downarrow & \\ \to & \underline{H}^i_T(f^*F) & \to & \underline{H}^i(f^*F) & \to & \underline{H}^i(Rk_*(k^*f^*F)) & \to \end{array} ;$$

il en résulte que l'on est ramené à montrer que le morphisme

$$f^*(\underline{H}^i(Rj_*(j^*F))) \to \underline{H}^i(Rk_*(k^*f^*F))$$

est bijectif pour $i < n-r+1$ et injectif pour $i = n-r+1$. Or un tel morphisme provient du morphisme suivant entre suites spectrales d'hypercohomologie

$$\begin{array}{ccc} f^*(E_2^{pq}) = f^*(R^p j_*(\underline{H}^q(j^*F))) & \Rightarrow & f^*(\underline{H}^*(Rj_*(j^*F))) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_2'^{pq} = R^p k_*(\underline{H}^q(k^*f^*F)) & \Rightarrow & H^*(Rk_*(k^*f^*F)) \end{array} .$$

Comme j est quasi-compact, il résulte de (SGA 4 XV 1.10) que le morphisme $f^*(E_2^{pq}) \to E_2'^{pq}$ est bijectif pour $p \leqslant n$ et injectif pour $p = n+1$; en particulier il est bijectif pour $p+q \leqslant n-r$ et injectif pour $p+q = n-r+1$. La conclusion en résulte aussitôt.

Revenons à la démonstration de 1.13. Soit $T = f^{-1}(Z)$. D'après 1.13.1 et la condition a), le morphisme canonique $f^*(\underline{H}_Z^i(F)) \longrightarrow \underline{H}_T^i(f^*F)$ est un isomorphisme pour $i \leqslant p+q$. Il résulte donc de b) que $\underline{H}_T^i(f^*F) = 0$ pour $i < p$ et, pour $i < p+q$, $\underline{H}_T^i(f^*F)$ restreint à T est l'image inverse d'un faisceau G^i sur Z. Soit

$$f_T : T \longrightarrow Z$$

la restriction de f à T. Il résulte alors de c) et du corollaire qui suit que $\underline{H}_Y^j(f_T^*(G^i)) = 0$ pour $j < q$. On en conclut que

$$\underline{H}_Y^j(\underline{H}_T^i(f^*F)) = 0 \quad \text{pour} \quad i + j < p+q ,$$

car l'inégalité $i+j < p+q$ entraîne ou bien $i < p$ et alors $\underline{H}_T^i(f^*F) = 0$, ou bien $j < q$ et alors $\underline{H}_Y^j(\underline{H}_T^i(f^*F)) = 0$. Etant donné que l'on a, avec les notations de 1.0, $\underline{\Gamma}_Y = \underline{\Gamma}_Y . \underline{\Gamma}_T$, on a la suite spectrale

$$(1.13.2) \qquad E_2^{ji} = \underline{H}_Y^j(\underline{H}_T^i(f^*F)) \Rightarrow \underline{H}_Y^*(f^*F) \quad ;$$

comme $E_2^{ji} = 0$ pour $i+j < p+q$, on voit que $\underline{H}_Y^k(f^*F) = 0$ pour $k < p+q$. Le théorème sera donc démontré si l'on prouve le corollaire suivant (qui est le cas particulier de 1.13 obtenu en y faisant $Z = S$, $r = p = 0$ et F réduit au degré zéro).

Corollaire 1.14. *Soient* $f : X \to S$ *un morphisme,* Y *une partie fermée de* X *telle que l'ouvert complémentaire* $X - Y$ *soit rétrocompact dans* X *et que les anneaux locaux de* X *aux différents points de* Y *soient noethériens. Soient* $\mathbb{L}$ *un ensemble de nombres premiers,* q *un entier et* F *un faisceau abélien de* $\mathbb{L}$*-torsion sur* S. *Supposons que* f *soit localement* $(q-2)$*-acyclique pour* $\mathbb{L}$ *et que, pour tout point* s *de* S, *on ait* $\mathrm{prof}^{\mathbb{L}}_{Y_s}(X_s) \geq q$. *Alors on a* $\mathrm{prof}_Y(f^*F) \geq q$.

1°) Réduction au cas où X et S sont des schémas strictement locaux, f un morphisme local et Y réduit au point fermé de X. D'après 1.8, pour établir 1.14, il faut montrer que l'on a pour tout point y de Y :

$$\mathrm{prof}_y(f^*F) \geq q .$$

Soient $s = f(y)$, $\bar{s}$ un point géométrique au-dessus de s, $\bar{y}$ un point géométrique au-dessus de y et de $\bar{s}$, $\bar{X}$ et $\bar{S}$ les localisés stricts de X et S en $\bar{y}$ et $\bar{s}$ respectivement, $\bar{f} : \bar{X} \to \bar{S}$ le morphisme canonique et $\bar{F}$ l'image inverse de F sur $\bar{S}$. Comme on a la relation $\mathrm{prof}_y(f^*F) = \mathrm{prof}_{\bar{y}}(\bar{f}^*\bar{F})$, il suffit de montrer que les hypothèses de 1.14 se conservent quand on remplace f (resp. Y, resp. F) par $\bar{f}$ (resp. $\{\bar{y}\}$, resp. $\bar{F}$). La condition de rétrocompacité résulte de l'hypothèse noethérienne sur $\underline{\mathcal{O}}_{X,x}$, impliquant que $\bar{X}$ est noethérien. D'après (SGA 4 XV 1.10 (i)), $\bar{f}$ est encore localement (q-2)-acyclique pour $\mathbb{L}$. D'autre part la fibre $(\bar{X})_{\bar{s}}$ de $\bar{X}$ au-dessus de $\bar{s}$ s'identifie au localisé strict de X_s en $\bar{y}$, donc satisfait à la relation $\mathrm{prof}_{\bar{y}}((\bar{X})_{\bar{s}}) \geqslant q$. Comme une relation analogue est trivialement vérifiée pour les fibres du $\bar{S}$-schéma $\bar{X}$, autres que la fibre fermée, ceci achève la réduction.

2°) Cas où X et S sont strictement locaux, f un homomorphisme local et Y réduit au point fermé y de X. Soient

$$g : U = X - \{y\} \to S$$

le morphisme structural de U. On doit montrer que le morphisme canonique

$$u_i : H^i(X, f^*F) \to H^i(U, f^*F)$$

est bijectif pour $i \leqslant q-2$ et injectif pour $i = q-1$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^i(X,f^*F) \arrow[rr, "u_i"] & & H^i(U,f^*F) \\ & H^i(S,F) \arrow[ul, "v_i"] \arrow[ur, "w_i"'] & \end{tikzcd} .$$

Le morphisme v_i est évidemment bijectif pour tout i. D'autre part g est localement (q-2)-acyclique pour $\mathbb{L}$; de plus ses fibres sont (q-2)-acyclique pour $\mathbb{L}$, comme il résulte du fait que $\mathrm{prof}_y(X_s) \geqslant q$ et que les fibres de f sont (q-2)-acycliques pour $\mathbb{L}$; comme g est quasi-compact puisque X est noethérien, il résulte de (SGA 4 XV 1.16) que g est (q-2)-acyclique pour $\mathbb{L}$. Par suite w_i , donc aussi u_i , est bijectif pour $i \leqslant q-2$ et injectif pour $i = q-1$, ce qui achève la démonstration de 1.14.

Corollaire 1.15. Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas, $\mathbb{L}$ un ensemble de nombres premiers, m et r des entiers et F un complexe de faisceaux abéliens de $\mathbb{L}$-torsion sur S tel que $H^i(F) = 0$ pour $i < -r$. Soit x un point de X, $s = f(x)$ et supposons que l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ soit noethérien. Alors, si f est localement m-acyclique pour $\mathbb{L}$, on a la relation

$$(*) \qquad \operatorname{prof}_x(f^*F) \geqslant \operatorname{Inf}(\operatorname{prof}_s(F) + \operatorname{prof}_x^{\mathbb{L}}(X_s)\ ,\ n\ ),\ \text{où } n = m-r+2\ .$$

En particulier, si $n \geqslant \operatorname{prof}_s(F) + \operatorname{prof}_x^{\mathbb{L}}(X_s)$, par exemple si f est localement acyclique pour $\mathbb{L}$, on a

$$(**) \qquad \operatorname{prof}_x(f^*F) \geqslant \operatorname{prof}_s(F) + \operatorname{prof}_x^{\mathbb{L}}(X_s)\ .$$

Si $\mathbb{L}$ est réduit à un élément ℓ et si l'on a $n \geqslant \operatorname{prof}_s(F) + \operatorname{prof}_x^{\ell}(X_s)$, l'inégalité précédente est une égalité.

On se ramène au cas où s et x sont des points fermés, en prenant les localisés stricts de S et X en des points géométriques $\bar{s}$ au-dessus de s et $\bar{x}$ au-dessus de x et de $\bar{s}$. Si l'on a l'inégalité $n \geqslant \operatorname{prof}_s(F) + \operatorname{prof}_x^{\mathbb{L}}(X_s)$, alors $(*)$ s'obtient à partir de 1.13 en y faisant $p = \operatorname{prof}_s(F)$ et $q = \operatorname{prof}_x^{\mathbb{L}}(X_s)$ (l'hypothèse que $S - \{s\}$ est rétrocompact dans S résulte du fait que $X - X_s$ est rétrocompact dans X et que f est surjectif puisqu'il est (-1)-acyclique (sauf peut-être si la conclusion de 1.15 est vide)). Si l'on a $n < \operatorname{prof}_s(F) + \operatorname{prof}_x^{\mathbb{L}}(X_s)$, l'inégalité $(*)$ s'obtient encore à partir de 1.13 en y faisant par exemple $p = \operatorname{prof}_s(F)$ et $q = n-p$. Il reste à démontrer la dernière assertion. Soient $p = \mathrm{prof}_s(F)$ et $q = \mathrm{prof}_x(X_s)$; il résulte de 1.13.2 que l'on a

$$\underline{H}_x^{p+q}(f^*(F)) \simeq \underline{H}_x^q(f^*(\underline{H}_s^p(F))) \quad .$$

Comme $\mathrm{prof}_s(F) = p$, le faisceau $\underline{H}_s^p(F)$ est un faisceau de ℓ-torsion, constant sur s, différent de zéro. Par suite le faisceau $G = f^*(\underline{H}_s^p(F))$ est un faisceau de ℓ-torsion, constant sur X_s, non nul, donc contient un sous-faisceau isomorphe à $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$; comme $\underline{H}_x^q$ est exact à gauche sur les faisceaux constants de ℓ-torsion et comme $\underline{H}_x^q(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ est différent de zéro, on a bien $\underline{H}_x^q(G) \neq 0$.

<u>Corollaire</u> 1.16. <u>Soient</u> $f : X \to S$ <u>un morphisme régulier de schémas excellents</u> (EGA IV 7.8.2) <u>de caractéristique nulle</u>, ℓ <u>un nombre premier et</u> F <u>un complexe de faisceau de</u> ℓ <u>-torsion sur</u> S. <u>Soient</u> $x \in X$, $s = f(x)$; <u>alors on a</u>

$$\mathrm{prof}_x(f^*F) = \mathrm{prof}_s(F) + 2\dim(\mathcal{O}_{X_s,x}) \quad .$$

En effet f est régulier par définition de "excellent" donc localement acyclique (SGA 4 XIX 4.1). Il résulte alors de 1.15 que l'on a

$$\mathrm{prof}_x(f^*F) = \mathrm{prof}_s(F) + \mathrm{prof}_x(X_s) \quad .$$

Or on a d'après 1.10

$$\mathrm{prof}_x(X_s) = 2\dim \mathcal{O}_{X_s,x} \quad ,$$

d'où le résultat.

<u>Remarque</u> 1.17. Il résulte de 1.15 que 1.13 reste vrai quand on remplace

b) et c) par les conditions :

b') Pour tout point $s \in f(Y)$, on a $\mathrm{prof}_s(F) \geqslant p$.

c') Pour tout point $x \in Y$, si $s = f(x)$, on a $\mathrm{prof}_x^{\mathbb{L}}(X_s) \geqslant q$.

Dans le cas d'un faisceau d'ensembles ou de groupes, on a le théorème suivant analogue à 1.13.

<u>Théorème</u> 1.18. <u>Soient</u> $f : X \to S$ <u>un morphisme de schémas</u>, Y <u>une partie fermée de</u> X <u>telle que</u> $X - Y$ <u>soit rétrocompact dans</u> X <u>et que, pour tout point</u> x <u>de</u> Y, <u>l'anneau local</u> $\mathcal{O}_{X,x}$ <u>soit noethérien</u>.

1°) <u>Soient</u> F <u>un faisceau d'ensembles sur</u> S <u>et</u> n <u>un entier égal à</u> 1 <u>ou</u> 2. <u>Supposons que</u> f <u>soit localement</u> $(n-2)$-<u>acyclique et que, pour tout point</u> s <u>de</u> $f(Y)$, <u>on ait</u> :

$$\mathrm{prof}_{Y_s}(X_s) + \mathrm{prof}_s(F) \geqslant n .$$

<u>Alors on a</u> :

$$\mathrm{prof}_Y(f^*F) \geqslant n .$$

2°) <u>Soient</u> $\mathbb{L}$ <u>un ensemble de nombres permiers et</u> F <u>un faisceau de ind-$\mathbb{L}$-groupes</u>. <u>Supposons que</u> f <u>soit localement</u> 1-<u>asphérique pour</u> $\mathbb{L}$ (SGA 4 XV 1.11) <u>et que, pour tout point</u> s <u>de</u> $f(Y)$, <u>on ait</u> :

$$\mathrm{prof}\ \mathrm{hop}_{Y_s}^{\mathbb{L}}(X_s) + \mathrm{prof}_s(F) \geqslant 3 .$$

<u>Alors on a</u> :

$$\mathrm{prof}_Y(f^*F) \geqslant 3 .$$

<u>Démonstration</u>. On se ramène, comme dans 1.14 et 1.15, au cas où X et S sont des schémas strictement locaux, f un homomorphisme local et Y le point fermé x de X. Soit $s = f(x)$ le point fermé de S ; on a le diagramme commutatif :

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccc} X - X_s & \xrightarrow{i} & X - \{x\} & \xrightarrow{j} & X \\ h \downarrow & & g \searrow & & \swarrow f \\ S - \{s\} & & \xrightarrow{k} & & S . \end{array}$$

1°) a) <u>Cas</u> $n = 1$.

Si l'on a $\mathrm{prof}_s(F) \geqslant 1$, alors le morphisme $F \to k_* k^* F$ est injectif, donc le morphisme $f^*(F) \to f^*(k_* k^* F)$ est aussi injectif. D'autre part il résulte du fait que f est localement (-1)-acyclique, que le morphisme $f^*(k_* k^* F) \to (j.i)_*(f^* F | (X - X_s))$ est injectif. Finalement le morphisme composé $f^* F \to (j.i)_*(f^* F | (X - X_s))$ est injectif, ce qui montre que l'on a $\mathrm{prof}_{X_s}(f^* F) \geqslant 1$, donc aussi $\mathrm{prof}_x(f^* F) \geqslant 1$.

Si l'on a $\mathrm{prof}_x(X_s) \geqslant 1$, on considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, f^* F) & \xrightarrow{v} & H^0(X - \{x\}, f^* F) \\ \wr\downarrow & & \downarrow \\ H^0(X_s, f^* F) & \xrightarrow{v'} & H^0(X_s - \{x\}, f^* F) \end{array} \quad ;$$

par hypothèse v' est injectif donc il en est de même de v .

b) <u>Cas</u> $n = 2$. On considère le diagramme commutatif

$$(**) \qquad \begin{array}{ccccc} H^0(S, F) & & \xrightarrow{u} & & H^0(S - \{s\}, F) \\ m \wr\downarrow & & & & \downarrow\wr\, n \\ H^0(X, f^* F) & \xrightarrow{v} & H^0(X - \{x\}, f^* F) & \xrightarrow{w} & H^0(X - X_s, f^* F) \end{array} \quad ;$$

on doit montrer que v est bijectif. Le morphisme m est évidemment bijectif, et comme f est 0-acyclique, n est aussi bijectif.

Si l'on a $\mathrm{prof}_s(F) \geqslant 2$, u est bijectif. Comme on l'a vu dans a), la seule hypothèse $\mathrm{prof}_s(F) \geqslant 1$ entraîne la relation $\mathrm{prof}_{X_s}(f^*F) \geqslant 1$; par suite v et w sont injectifs ; il résulte alors de (**) que v est bijectif.

Si l'on a $\mathrm{prof}_x(X_s) \geqslant 2$, alors g est 0-acyclique (car il est localement 0-acyclique et ses fibres sont 0-acycliques). Il en résulte que $v.m$ est bijectif, donc v est bijectif.

Si l'on a $\mathrm{prof}_s(F) \geqslant 1$ et $\mathrm{prof}_x(X_s) \geqslant 1$, alors on sait déjà que v et w sont injectifs. Soient z un point maximal de $X_s - \{x\}$ (un tel point existe d'après l'hypothèse $\mathrm{prof}_x(X_s) \geqslant 1$), $\bar{Z}$ le localisé strict de X en un point géométrique au-dessus de z et $\overline{f^*F}$ l'image inverse de f^*F sur $\bar{Z}$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & H^0(S,F) \arrow[rr] \arrow[dl, "m"'] & & H^0(S-\{s\},F) \arrow[dr, "n"] & \\
H^0(X,f^*F) \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "m'"'] & & H^0(X-\{x\},f^*F) \arrow[rr, "w"] \arrow[dl, "r"] & & H^0(X-X_s,f^*F) \arrow[dl, "n'"] \\
 & H^0(\bar{Z},f^*F) \arrow[rr] & & H^0(\bar{Z}-\{\bar{z}\},\overline{f^*F}) &
\end{tikzcd}$$

le morphisme $m'.m$ est évidemment bijectif et il résulte du fait que f est localement 0-acyclique que $n'.n$ est bijectif ; par suite m' et n' sont aussi bijectifs. Comme w est injectif, r est aussi injectif et par suite v est bijectif.

2°) Compte tenu de b), on sait déjà que $\mathrm{prof}_x(f^*F) \geqslant 2$.

Si l'on a $\mathrm{prof}_s(F) \geqslant 3$, alors $R^1k_*(k^*F) = 1$. Comme f est localement 1-asphérique, on a $R^1(j.i)_*(f^*F|(X-X_s)) = f^*(R^1k_*(k^*F)) = 1$. On a donc $\mathrm{prof}_{X_s}(f^*F) \geqslant 3$ et par suite on a aussi $\mathrm{prof}_x(f^*F) \geqslant 3$.

Si l'on a $\mathrm{prof}_x(X_s) \geqslant 3$, alors g est 1-asphérique (car g est localement 1-asphérique et ses fibres sont 1-asphériques). On a donc $H^1(X-\{x\}, f^*F) = H^1(S,F) = 1$ et par suite $\mathrm{prof}_x(f^*F) \geqslant 3$.

Si l'on a $\mathrm{prof}_s(F) \geqslant 2$ et $\mathrm{prof}_x(X_s) \geqslant 1$, on utilise la suite exacte (SGA 4 XII 3.2) :

$$1 \to R^1j_*(i_*(f^*F|(X-X_s))) \to R^1(j.i)_*(f^*F|(X-X_s)) \to j_*(R^1i_*(f^*F|(X-X_s))).$$

Comme f et g sont localement 1-asphérique, on a

$$R^1(j.i)_*(f^*F|(X-X_s)) \simeq f^*(R^1k_*(k^*F))$$

$$R^1i_*(f^*F|(X-X_s)) \simeq g^*(R^1k_*(k^*F)) \quad ;$$

la suite exacte précédente s'écrit alors sous la forme

$$(***) \qquad 1 \to R^1j_*(i_*(f^*F|(X-X_s))) \to f^*(R^1k_*(k^*F)) \xrightarrow{a} j_*(j^*(f^*(R^1k_*(k^*F)))).$$

L'hypothèse $\mathrm{prof}_s(F) \geqslant 2$ montre que le morphisme $F \to k_*k^*F$ est bijectif ; en appliquant g^*, on trouve, compte tenu du fait que g est localement 0-acyclique, $f^*F|(X-\{x\}) = i_*(f^*F|(X-X_s))$. L'hypothèse $\mathrm{prof}_x(X_s) \geqslant 1$ montre que le morphisme a est injectif (noter que $f^*(R^1k_*(k^*F))$ est un faisceau égal à 1 en dehors de X_s et constant sur X_s). Il résulte alors de (***) que l'on a $R^1j_*(f^*F|(X-\{x\}) = 1$, donc $\mathrm{prof}_x(f^*F) \geqslant 3$.

Si l'on a $\mathrm{prof}_s(F) \geqslant 1$ et $\mathrm{prof}_x(f^*F) \geqslant 2$, on considère le faisceau en espaces homogènes G défini par la suite exacte

$$1 \to F \to k_*k^*F \to G \to 1 \quad .$$

En appliquant à cette suite exacte le foncteur exact g^* et en utilisant (SGA 4 XII 3.1), on obtient le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
f^*(k_*k^*F) \arrow[r] \arrow[d] & f^*G \arrow[r] \arrow[d, "b"] & 1 & \\
j_*(g^*(k_*k^*F)) \arrow[r] & j_*(g^*G) \arrow[r] & R^1j_*(g^*F) \arrow[r] & R^1j_*(g^*(k_*k^*F))
\end{tikzcd} \quad .$$

Comme $\mathrm{prof}_x(X_s) \geqslant 2$, le morphisme b est bijectif donc u est surjectif et l'on a ainsi une application à noyau réduit à l'élément neutre :

$$1 \to R^1j_*(g^*F) \to R^1j_*(g^*(k_*k^*F)) = R \ .$$

Comme $g^*(k_*k^*F) \simeq i_*(f^*F|(X-X_s))$ (car g est localement 0-acyclique), R s'identifie au premier terme de la suite exacte (***) ; or on a vu dans le cas précédent que $R = 1$ dès que l'on a $\mathrm{prof}_x(X_s) \geqslant 1$, ce qui démontre que $\mathrm{prof}_x(f^*F) \geqslant 3$ et achève la démonstration de 1.18.

Les corollaires qui suivent sont des généralisations de (SGA 4 XVI 3.2 et 3.3).

<u>Corollaire</u> 1.19. <u>Soient</u> $f : X \to S$ <u>un morphisme plat</u>, <u>à fibres séparables</u>, <u>de schémas localement noethériens et</u> Y <u>une partie fermée de</u> X .

Supposons que pour tout point $s \in f(Y)$, la fibre Y_s soit rare dans X_s et que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

a) l'adhérence de $f(Y)$ est rare dans S .

b) X_s est géométriquement unibranche aux points de Y_s .

Alors on a

$$\mathrm{prof}_Y(X) \geqslant 2 .$$

Il résulte en effet de l'hypothèse faite sur f que f est localement 0-acyclique (SGA 4 XV 4.1). On applique alors 1.13. L'hypothèse Y_s rare dans X_s (resp. $\overline{f(Y)}$ rare dans S) équivaut d'après 1.6 b) à la relation $\mathrm{prof}_{Y_s}(X_s) \geqslant 1$ (resp. $\mathrm{prof}_{\overline{f(Y)}}(S) \geqslant 1$). L'hypothèse X_s géométriquement unibranche en chaque point de Y_s équivaut à dire que le localisé strict de X_s en un point géométrique de Y_s est irréductible ; sachant que Y_s est rare dans X_s , cela entraîne évidemment $\mathrm{prof}_{Y_s}(X_s) \geqslant 2$, grâce à 1.8. Dans l'un et l'autre cas 1.13 donne bien $\mathrm{prof}_Y(X) \geqslant 2$.

Corollaire 1.20. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme régulier (EGA IV 6.8.1) de schémas localement noethériens, Y une partie fermée de X. Supposons que, pour tout point $s \in f(Y)$, l'une des conditions suivantes soit réalisée :

a) On a $\mathrm{codim}(Y_s,X_s) \geqslant 2$.

b) On a $\mathrm{codim}(Y_s,X_s) \geqslant 1$ et $\mathrm{prof}_s(S) \geqslant 1$.

c) On a $\mathrm{prof\ hop}_s(S) \geqslant 3$.

Alors on a

$$\text{prof hop}_Y(X) \geq 3 .$$

Cela résulte en effet de 1.18, étant donné que l'hypothèse a) implique $\text{prof hop}_{Y_s}(X_s) \geq 3$ (cf. 1.11), et que la condition $\text{codim}(Y_s, X_s) \geq 1$ implique évidemment $\text{prof}_Y(X) \geq 2$.

2. Lemmes techniques.

2.1. Soient S un schéma localement noethérien, $f : X \longrightarrow S$ un morphisme localement de type fini, t un point de S. Si $x \in X$ est tel que $s = f(x) \in \text{Spec } \mathcal{O}_{S,t}$, on pose

$$\delta_t(x) = \deg \text{tr } k(x)/k(s) + \dim(\overline{\{s\}}) ,$$

où $\overline{\{s\}}$ désigne l'adhérence de s dans $\text{Spec } \mathcal{O}_{S,t}$, $k(x)$ et $k(s)$ les corps résiduels de x et s respectivement. Si S est un anneau local de point fermé t, on écrit aussi $\delta(x)$ au lieu de $\delta_t(x)$ (cf. SGA 4 XIV 2.2).

Lemme 2.1.1. Soit un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{h} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S , \end{array}$$

où S et S' sont des anneaux locaux noethériens, de points fermés t et t' respectivement, g un morphisme fidèlement plat tel que

$g^{-1}(t) = t'$,f *un morphisme localement de type fini*. *Soient* $x' \in X'$, $x = h(x')$, $s = f(x)$, $s' = f'(x')$; *alors on a*

$$\delta(x') \leqslant \delta(x)$$

De plus l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si l'on a :

$$\deg \operatorname{tr} k(x)/k(s) = \deg \operatorname{tr} k(x')/k(s') \quad \underline{\text{et}} \quad \dim(\overline{\{s\}}) = \dim(\overline{\{s'\}}) \ .$$

En particulier, étant donné $x \in X$, *on peut trouver* x' *tel que l'on ait* $\delta(x) = \delta(x')$.

On a en effet (EGA IV 6.11)

$$\dim(\overline{\{s\}}) = \dim(g^{-1}(\overline{\{s\}})) \ .$$

Il en résulte que, pour tout point s' de $g^{-1}(s)$, on a la relation $\dim(\overline{\{s'\}}) \leqslant \dim(\overline{\{s\}})$, et que, s étant donné, on peut trouver $s' \in g^{-1}(s)$, tel que l'on ait l'égalité. Désignons alors par Z l'adhérence schématique de x dans la fibre X_s de X en s, et soit $Z' = Z \times_{\operatorname{Spec} k(s)} \operatorname{Spec} k(s')$. Alors Z' est équidimentionnel de dimension $\deg \operatorname{tr} k(x)/k(s)$; on a donc, pour tout point $x' \in Z'_x$,

$\deg \operatorname{tr} k(x')/k(s') \leqslant \deg \operatorname{tr} k(x)/k(s)$, et on a l'égalité lorsque x' est un point maximal de Z'_x . D'où aussitôt la conclusion annoncée.

2.2. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme localement de type fini et T une partie fermée de S. Soient $x \in X$, $s = f(x)$; nous poserons

$$\delta_T(x) = \deg \operatorname{tr} k(x)/k(s) + \operatorname{codim}(\overline{\{s\}} \cap T, \overline{\{s\}}) = \operatorname*{Inf}_{t \in T \cap \overline{\{s\}}} \delta_t(x) \ .$$

Lemme 2.2.1. Soit un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{h} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S , \end{array}$$

où les schémas S et S' sont localement noethériens, caténaires, le morphisme f localement de type fini et g fidèlement plat. Soient T une partie fermée de S, T' une partie fermée de S', telles que $g(T')\subset T$, x' un élément de X', $x = h(x')$ et

$$h_{x'} : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X',x'} \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$$

le morphisme induit par h. Alors on a :

$$\delta_T(x) - \delta_{T'}(x') \leqslant \dim h_{x'}^{-1}(x) .$$

Soient $s' = f'(x')$, $s = f(x)$. On a, par définition :

$$\delta_T(x) - \delta_{T'}(x') = \deg \operatorname{tr} k(x)/k(s) - \deg \operatorname{tr} k(x')/k(s') + \operatorname{codim}(\overline{\{s\}} \cap T, \overline{\{s\}})$$
$$- \operatorname{codim}(\overline{\{s'\}} \cap T', \overline{\{s'\}}) .$$

Puisque g est fidèlement plat, il résulte de (EGA IV 6.1.4) que l'on a

$$(*) \quad \operatorname{codim}(\overline{\{s\}} \cap T, \overline{\{s\}}) = \operatorname{codim}(g^{-1}(\overline{\{s\}}) \cap g^{-1}(T), g^{-1}(\overline{\{s\}}))$$
$$\leqslant \operatorname{codim}(g^{-1}(\overline{\{s\}}) \cap T', g^{-1}(\overline{\{s\}})) ;$$

comme S' est caténaire, on a, d'après (EGA 0_{IV} 14.3.2 b)) :

$$\operatorname{codim}(\overline{\{s'\}} \cap T', g^{-1}(\overline{\{s\}})) = \operatorname{codim}(\overline{\{s'\}} \cap T', \overline{\{s'\}}) + \operatorname{codim}(\overline{\{s'\}}, g^{-1}(\overline{\{s\}}))$$
$$= \operatorname{codim}(\overline{\{s'\}} \cap T', g^{-1}(\overline{\{s\}}) \cap T') + \operatorname{codim}(g^{-1}(\overline{\{s\}}) \cap T', g^{-1}(\overline{\{s\}})).$$

On déduit de cette relation et de (*)

$\delta_T(x) - \delta_{T'}(x') \leqslant \deg\,\mathrm{tr}\; k(x)/k(s) - \deg\,\mathrm{tr}\; k(x')/k(s') + \mathrm{codim}\,(\overline{\{s'\}}, g^{-1}(\overline{\{s\}}))$.

Calculons $\mathrm{codim}(\overline{\{s'\}}, g^{-1}(\overline{\{s\}})) = \dim(\mathcal{O}_{S'_s,s'})$ (où S'_s est la fibre de S' en s). Soit Z l'image fermée de x dans X_s et $Z' \subset X'_s$ le schéma défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Z' & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ S'_s & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\, k(s) \end{array} .$$

Le morphisme $Z \to \mathrm{Spec}\, k(s)$ est plat, localement de type fini et l'on a $\dim Z = \deg\,\mathrm{tr}\; k(x)/k(s)$. Il résulte alors de (EGA IV 6.1.2) que

$$\dim(\mathcal{O}_{Z',x'}) = \dim(\mathcal{O}_{S'_s,s'}) + \dim(\mathcal{O}_{Z'_{s'},x'})$$

$$= \dim(\mathcal{O}_{S'_s,s'}) + \deg\,\mathrm{tr}\; k(x)/k(s) - \deg\,\mathrm{tr}\; k(x')/k(s') ;$$

compte tenu du fait que $Z'_{s'} \simeq Z \otimes_{k(s)} k(s')$, on obtient alors :

$$\delta_T(x) - \delta_{T'}(x') \leqslant \dim(\mathcal{O}_{Z',x'}) .$$

Or $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Z',x'})$ s'identifie à la fibre en x du morphisme

$$(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X',x'}))_s \longrightarrow (\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}))_s ,$$

donc aussi à la fibre en x de $h_{x'}$, ce qui démontre le lemme.

2.3. Les démonstrations des théorèmes du n°4 sont basées sur la théorie de la dualité ; elles utilisent les lemmes qui suivent. Soit

m un entier puissance d'un nombre premier ℓ ; si X est un schéma, tous les faisceaux considérés sur X sont des faisceaux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-modules ; on a alors la notion de complexe dualisant sur X (SGA 5 I 1.7). Supposons qu'il existe un tel complexe K sur X ; alors, pour chaque point géométrique $\bar{x}$ au-dessus d'un point x de X, on déduit de K (cf. SGA 5 I 4.5) un complexe dualisant $K_{\bar{x}}$ sur $\operatorname{Spec} k(\bar{x})$, de sorte que l'on a $K_{\bar{x}} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\,[\,n\,]$ (le crochet désignant le foncteur translation) pour un certain entier n ne dépendant que de x. Nous poserons

$$\delta^K(x) = n \ .$$

Si K est normalisé au point x, (SGA 5 I 4.5), on a donc $n = 0$.

<u>Lemme</u> 2.3.1. <u>Soit</u> X <u>un schéma localement noethérien, muni d'un complexe dualisant</u> K. <u>Si</u> x <u>et</u> x' <u>sont deux points de</u> X, <u>tels que</u> x <u>soit une spécialisation de</u> x' <u>et que l'on ait</u> $\operatorname{codim}(\overline{\{x\}},\overline{\{x'\}}) = 1$, <u>alors on a</u>

$$\delta^K(x) = \delta^K(x') - 2 \ .$$

On peut d'abord se ramener au cas où X est un schéma strictement local. Soient en effet $\bar{X}$ le localisé strict de X en un point géométrique $\bar{x}$ au-dessus de x, $i : \bar{X} \to X$ le morphisme canonique, $\bar{x}'$ un point géométrique de $\bar{X}$ au-dessus de x'. Alors i^*K est un complexe dualisant sur $\bar{X}$ et l'on a (SGA 5 I 4.5) :

$$(i^*K)_{\bar{x}} \simeq K_{\bar{x}} \quad \text{et} \quad (i^*K)_{\bar{x}'} \simeq K_{\bar{x}'} \ ,$$

ce qui achève la réduction au cas strictement local.

Si $j : \overline{\{x'\}} \longrightarrow X$ désigne l'immersion du sous-schéma fermé réduit de X, d'espace sous-jacent $\overline{\{x'\}}$, alors $R^! j(K)$ est un complexe dualisant sur $\overline{\{x'\}}$ et on voit tout de suite, en utilisant (SGA 5 I 4.5) qu'il suffit de démontrer le lemme pour $\overline{\{x'\}}$. On est ainsi ramené au cas où X est un schéma strictement local intègre de dimension 1.

Soient alors X' le normalisé de X et $f : X' \longrightarrow X$ le morphisme canonique ; f est un morphisme entier, surjectif, radiciel, et il en résulte que $f^* K$ est un complexe dualisant sur X' et qu'il suffit de démontrer le lemme pour X' et pour les points au-dessus de x et x'. On est ainsi ramené au cas où X est un schéma local, intègre, régulier de dimension 1, mais on sait (cf. SGA 5 I 4.6.2 et 5.1) qu'alors $\mu_m[2]$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sont des complexes dualisants, normalisés respectivement aux points x et x' ; le lemme en résulte aussitôt.

<u>Lemme</u> 2.3.2. <u>Soient</u> S <u>un schéma local noethérien</u>, $f : X \longrightarrow S$ <u>un morphisme de type fini</u>. <u>Si</u> K <u>est un complexe dualisant sur</u> S, <u>normalisé au point fermé</u> t <u>de</u> S <u>et si</u> $R^! f(K) = K'$ <u>est un complexe dualisant sur</u> X (<u>cf</u>. SGA 5 I 3.4.3), <u>on a</u>, <u>pour tout point</u> x <u>de</u> X :

$$\delta^K(x) = 2\ \delta\ (x)\ .$$

En effet soient $s = f(x)$ et x' un point fermé de la fibre X_s ; alors on a $\delta^{K'}(x') = \delta^K(s)$ et d'après 2.3.1

$$\delta^K(s) = 2\ \mathrm{codim}(\overline{\{t\}}, \overline{\{s\}}) = 2\ \dim(\overline{\{s\}})\ .$$

Comme on peut choisir pour x' une spécialisation de x, on a d'après 2.3.1

$$\delta^{K'}(x) = \delta^{K'}(x') + 2\ \mathrm{codim}(\overline{\{x\}},\overline{\{x'\}}) = \delta^{K'}(x') + 2\ \deg \mathrm{tr}\ k(x)/k(s) \ ;$$

le lemme en résulte aussitôt.

Le lemme suivant servira seulement pour la réciproque du théorème de Lefschetz, dans le n°4 :

Lemme 2.3.3. Soit un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{h} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array} ,$$

où S est un schéma strictement local excellent de caractéristique nulle, S' le complété de S et f un morphisme de type fini. Soient ℓ un nombre premier, $x \in X$, Z l'adhérence schématique de X'_x dans X', et $i : X'_x \quad Z$, $j : Z \to X'$ les morphismes canoniques. Alors, si $k : X' \to R$ est une immersion fermée de X' dans un schéma R régulier excellent, de caractéristique nulle, le complexe

$$K' = i^*(R^!(k.j)(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}))$$

est un complexe dualisant sur X'_x constant (c'est-à-dire ayant un seul faisceau de cohomologie non nul, isomorphe à $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$).

Compte tenu de (SGA 5 I 3.4.3), la seule chose à démontrer est que K' est constant. Or, comme Z est excellent, l'ensemble des points de

Z dont les anneaux locaux sont réguliers est un ensemble ouvert U (EGA IV 7.8.3 (iv)), et U contient évidemment X'_x qui est régulier. Soit alors

$$u : U \longrightarrow R$$

l'immersion canonique de U dans R ; il résulte du théorème de pureté (SGA 4 XIX 3.2 et 3.4) et de l'isomorphie $(\mu_\ell)_S \simeq (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})_S$ (S strictement local) que l'on a

$$R^! u(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}[\,2c\,] \quad ,$$

où c est une fonction localement constante sur U, nécessairement constante au voisinage de X'_x , car les fibres de g sont géométriquement intègres d'après (EGA IV 18.9.1) donc X'_x est intègre. Le lemme en résulte aussitôt.

3. Réciproque du théorème de Lefschetz affine.

Le présent numéro sera utilisé au n°4 pour prouver une réciproque au "théorème de Lefschetz" ; un lecteur qui n'est intéressé que par la partie directe dudit théorème peut donc omettre la lecture du présent numéro.

3.1. Rappelons l'énoncé du théorème de Lefschetz affine (SGA 4 XIX 6.1 bis) :

Soient S un schéma strictement local excellent de caractéristique nulle, $f : X \longrightarrow S$ un morphisme affine de type fini et F un faisceau de torsion sur X. Alors, si l'on pose

$$\delta(F) = \sup\{\delta(x) \mid x \in X \text{ et } F_{\bar{x}} \neq 0\},$$

on a

$$H^q(X,F) = 0 \text{ pour } q > \delta(F) .$$

Avant d'énoncer la réciproque, prouvons quelques lemmes.

Lemme 3.2. Soient K un corps, ℓ un nombre premier distinct de la caractéristique de K et F un faisceau de ℓ-torsion sur K, constructible, non nul. Supposons que la ℓ-dimension cohomologique de K (SGA 4 X 1) soit égal à n (ceci est réalisé par exemple si K est le corps des fractions d'un anneau strictement local excellent intègre, de caractéristique nulle, de dimension n (SGA 4 XIX 6.3), ou si K est une extension de type fini de degré de transcendance n d'un corps séparablement clos (SGA 4 X 2.1)). Alors on peut trouver une extension séparable finie L de K, telle que l'on ait :

$$H^n(L,F|L) \neq 0 .$$

On peut trouver une extension finie K' de K, telle que les restrictions de F et de μ_ℓ à Spec K' soient des faisceaux constants. On a alors $cd_\ell(K') = cd_\ell(K) = n$ (SGA 4 X 2.1), et il résulte de ([2] II § 3 Prop. 4 (iii)) que l'on peut trouver une extension finie L de K' telle que l'on ait

$$H^n(L,\mu_\ell) \neq 0 \text{ , i.e. } H^n(L,\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \neq 0 \quad .$$

Or le foncteur $H^n(L,.)$ est exact à droite sur la catégorie des faisceaux de ℓ-torsion, puisque $cd_\ell(L) = n$; comme F admet un quotient isomorphe à $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, on a aussi $H^n(L,F|L) \neq 0$.

Corollaire 3.3. Soient k un corps, K une extension de type fini de degré de transcendance n de k, F un faisceau de ℓ-torsion sur K, constructible, non nul, avec ℓ premier à la caractéristique de k. Alors on peut trouver une extension finie séparable L de K telle que, si $u : \operatorname{Spec} L \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ désigne le morphisme canonique, on ait

$$R^n u_*(F|\operatorname{Spec} L) \neq 0 \ .$$

Lorsque le corps k est séparable clos, le corollaire est un cas particulier de 3.2. Dans le cas général, on peut trouver une extension séparable finie k_1 de k' telle que les composantes irréductibles de $K \otimes_k k_1$ soient géométriquement irréductibles (EGA IV 4.5.11) ; soit K_1 l'une d'elles. Si k' est une clôture séparable de k_1, alors $K' = K_1 \otimes_{k_1} k'$ est un corps, et l'on a d'aprés (EGA IV 4.2)

$$\deg \operatorname{tr} K'/k' = \deg \operatorname{tr} K/k = n \ .$$

Il résulte alors de 3.2 que l'on peut trouver une extension finie séparable L' de K' telle que l'on ait $H^n(L',F|L') \neq 0$. Mais on a $k' = \varinjlim_i k_i$, où k_i parcourt les extensions finies de k_1 contenues dans k', et par suite $K' = \varinjlim_{i} (k_i \otimes_{k_1} K_1)$. Il en résulte que l'on peut trouver un indice i et une extension finie séparable L de $k_i \otimes_{k_1} K_1 = K_i$, telle que l'on ait $L' \xrightarrow{\sim} L \otimes_{K_i} K'$. L'extension L de K répond à la question ; en effet il résulte du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Spec} L \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "u"] & \\ \operatorname{Spec} k_i \arrow[rr, "w"] & & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd} ,$$

avec w fini donc $R^q w_* = 0$ si $q > 0$, que l'on a

$$R^n u_*(F|\operatorname{Spec} L) \xrightarrow{\sim} w_*(R^n v_*(F|\operatorname{Spec} L)) .$$

Or $R^n v_*(F|\operatorname{Spec} L) \neq 0$, puisque $H^n(L',F|L') \neq 0$; on a donc aussi $R^n u_*(F|\operatorname{Spec} L) \neq 0$.

Rappelons le lemme connu suivant (cf. EGA 0_{III} 10.3.1.2 et EGA IV 18.2.3) :

<u>Lemme</u> 3.4. <u>Soient</u> X <u>un schéma</u>, x <u>un point de</u> X , K <u>une extension séparable finie de</u> $k(x)$. <u>Alors il existe un schéma</u> X_1 <u>étale au-dessus de</u> X, <u>affine</u>, <u>et un point</u> $x_1 \in X_1$ <u>au-dessus de</u> x, <u>tels que</u> $k(x_1)$ <u>soit</u> $k(x)$-<u>isomorphe à</u> K.

Nous utiliserons au n°4 la forme technique qui suit de la réciproque de 3.1.

Proposition 3.5. Soit un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{h} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array},$$

où les schémas S et S' sont strictement locaux excellents de caractéristique nulle, le morphisme f localement de type fini, g régulier (EGA IV 6.8.1) surjectif, la fibre fermée de g réduite au point fermé de S'. Etant donné un S-schéma X_1 (resp. un S-morphisme f_1, etc.), nous noterons X_1' (resp. f_1', etc.) le schéma $X_1 \times_S S'$ (resp. le morphisme $(f_1)_{(S')}$, etc.). Soit F un faisceau de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-modules sur X' (m puissance d'un nombre premier ℓ), constructible, satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) Pour tout point $x \in X$, on peut trouver une extension finie séparable K de $k(x)$ telle que la restriction de F à la fibre $(X')_{(\mathrm{Spec}\,K)}$ provienne par image réciproque d'un faisceau constructible sur Spec K.

(ii) Pour tout morphisme $f_1 : X_1 \to S$, avec X_1 étale au-dessus de X, affine, pour tout point $s \in S$ et pour tout entier $q \geqslant 0$, on peut trouver une extension finie séparable K de $k(s)$ telle que la restriction de $R^q f'_{1*}(F|X_1')$ à la fibre $S'_{(\mathrm{Spec}\,K)}$ provienne par image réciproque d'un faisceau constructible sur Spec K.

Soit n un entier, et supposons que pour tout schéma X_1 étale au-dessus de X, affine, on ait

$$H^i(X'_1,F) = 0 \quad \text{pour} \quad i > n .$$

<u>Alors, si</u> $\bar{x}'$ <u>est un point géométrique au-dessus du point</u> $x' \in X'$, <u>tel que</u> $F_{\bar{x}'} \neq 0$, <u>on a</u>

$$\delta(x') \leqslant n .$$

Soit Z' l'ensemble des points x' de X' tels que l'on ait $F_{\bar{x}'} = 0$. Alors, si $Z = h(Z')$, on a d'après (i) $Z' = h^{-1}(Z)$; soient $x' \in X'$, $x = h(x')$, $s' = f'(x')$, $s = f(x)$. Il résulte de 2.1.1 et du fait que la fonction δ diminue par spécialisation, qu'il suffit de démontrer l'inégalité $\delta(x') \leqslant n$ lorsque x est un point maximal de Z et x' tel que l'on ait

$$r = \deg \operatorname{tr} k(x)/k(s) = \deg \operatorname{tr} k(x')/k(s') \quad \text{et} \quad d = \dim\overline{\{s\}} = \dim\overline{\{s'\}}$$

Soit x' un tel point ; il suffit de montrer que l'on peut trouver un schéma X_1 étale sur X, affine, tel que l'on ait

$$H^{d+r}(X'_1,F) \neq 0 .$$

L'ensemble Z' est constructible (SGA 4 IX 2.4), donc il en est de même de Z (EGA IV 1.9.12) ; on peut alors supposer, quitte à restreindre X à un voisinage de x, que Z est un fermé irréductible de point générique x. Soit $T = f(Z)$; T est un ensemble constructible contenu dans $\overline{\{s\}}$; on peut donc trouver un ouvert affine U de S, tel que $s \in U$ et que $T \cap U = T_U$ soit un fermé irréductible de U de point générique s.

Soit alors V un schéma étale sur X, affine, dont l'image dans X contienne x et dont l'image dans S soit contenue dans U ; soient Z_V l'image inverse de Z dans V et $u : Z_V \to T_U$ le morphisme canonique. Soient W un schéma étale sur U, affine, on note alors T_W l'image inverse de T_U dans W et soit $X_1 = W \times_U V$. Comme F est nul en dehors de Z', on a la suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p((T_W)', R^q u_*^{!}(F|(Z_V)')) \Longrightarrow H^*(X_1^{!}, F) \ .$$

Nous allons montrer que l'on peut choisir V et W de telle sorte que l'on ait

a) $E_2^{pq} = 0$ pour $p > d$ et pour $q > r$.

b) $E_2^{dr} \neq 0$.

Il résultera alors de la suite spectrale la relation $H^{d+r}(X_1^{!}, F) \neq 0$.

1°) Posons $G_q = R^q u_*^{!}(F|(Z_V)')$; alors on a :

$$(G_q)_{\bar{s}'} = H^q((Z_V)'_{\bar{s}'}, F|(Z_V)'_{\bar{s}'}) \ ,$$

car s' est un point maximal de $(T_U)'$. Comme la fibre $(Z_V)'_{\bar{s}'}$ est un schéma affine de type fini de dimension r sur un corps séparablement clos, il résulte de 3.1 que l'on a

$$(G_q)_{\bar{s}'} = 0 \quad \text{pour} \quad q > r \ .$$

Pour $q > r$, soit Y'_q l'ensemble des points de $(T_U)'$ où la fibre géométrique de G_q est $\neq 0$ et $Y_q = g(Y'_q)$; alors on a $Y'_q = g^{-1}(Y_q)$ d'après (ii), donc Y_q est un sous-ensemble constructible de T_U (SGA 4 XIX 5.1 et EGA 1.9.12) qui ne contient pas s ; quitte à restreindre U à un voisinage ouvert de s, on peut supposer que l'on a $G_q = 0$ pour $q > r$, donc $E_2^{pq} = 0$ pour $q > r$.

Par ailleurs, comme $(T_W)'$ est un schéma affine de type fini au-dessus de $g^{-1}(\{\overline{s}\})$, on a quel que soit q (cf. 3.1) :

$$H^p((T_W)',G_q) = 0 \quad \text{pour} \quad p > \dim g^{-1}(\{\overline{s}\}) = d \ ,$$

d'où la condition a).

2°) Montrons que l'on peut choisir V de telle sorte que l'on ait $(G_r)_{\overline{s}'} \neq 0$. D'après (i), il existe un faisceau constructible I, défini sur une extension finie séparable K de $k(x)$, dont l'image inverse sur $(X')_{(\mathrm{Spec}\ K)}$ soit isomorphe à $F|(X')_{(\mathrm{Spec}\ K)}$. D'après 3.3, on trouve une extension finie séparable L de K telle que, si $v : \mathrm{Spec}\ L \to \mathrm{Spec}\ k(s)$ désigne le morphisme canonique, on ait $R^r v_*(I) \neq 0$. Comme le morphisme $S'_s \to \mathrm{Spec}\ k(s)$ est régulier, on a d'après (SGA 4 XIX 4.2) :

$$R^r v'_*(F|(\mathrm{Spec}\ L)') \simeq (R^r v_*(I))' \neq 0 \ .$$

D'après le lemme 3.4, on peut trouver un schéma X_2 étale sur X, affine, et un point x_2 de X_2 au-dessus de x, tel que L soit $k(x)$-isomorphe à $k(x_2)$ et l'on peut supposer X_2 au-dessus de U. Comme x est un point maximal de Z, on a

$$\mathrm{Spec}\ L \simeq \varprojlim_{V} Z_V ,$$

où V parcourt les voisinages ouverts affines de x_2. On en déduit par passage à la limite (SGA 4 VII 5.8), après restriction à la fibre géométrique en $\bar{s}'$:

$$(R^r v'_*(F|\mathrm{Spec}\ I)')_{\bar{s}'} = \varinjlim_{V}(R^r u'_*(F|(Z_V)')_{\bar{s}'} ,$$

ce qui montre bien que l'on peut trouver V tel que l'on ait $(G_r)_{\bar{s}'} \neq 0$.

3°) Le schéma V ayant été choisi dans 2°), montrons que l'on peut choisir le schéma W de telle sorte que l'on ait

$$E_2^{dr} = H^d((T_W)',G_r) \neq 0 .$$

D'après (ii), il existe un faisceau constructible J, défini sur une extension finie séparable K de $k(s)$, dont l'image inverse sur $(S')_{(\mathrm{Spec}\ K)}$ soit isomorphe à $G_r|(S')_{(\mathrm{Spec}\ K)}$. D'après le lemme 3.2, on peut trouver une extension finie séparable L de K, telle que l'on ait $H^d(\mathrm{Spec}\ L,J) \neq 0$. Comme le morphisme $(S')_{(\mathrm{Spec}\ L)} \to \mathrm{Spec}\ L$ est acyclique (SGA 4 XIX 4.1 et XV 1.10 et 1.16), on a

$$H^d((\mathrm{Spec}\ L)',G_r|(\mathrm{Spec}\ L)') = H^d(\mathrm{Spec}\ L,J) \neq 0 .$$

D'après 3.4, on peut trouver un schéma U_1 étale sur U, affine, et un point s_1 au-dessus de s, tels que $k(s_1)$ soit $k(s)$-isomorphe à L. Or, s étant un point maximal de T_U, on a

$$\mathrm{Spec}\ L \simeq \varprojlim_{W} T_W ,$$

où W parcourt les voisinages ouverts affines de s_1. On en déduit que $(\mathrm{Spec}\ L)' \simeq \varprojlim_W (T_W)'$, et par passage à la limite (SGA 4 VII 5.8) :

$$H^d((\mathrm{Spec}\ L)', G_r|(\mathrm{Spec}\ L)') \simeq \varinjlim_W H^d((T_W)', G_r|(T_W)') \ ;$$

par suite on peut trouver W tel que l'on ait

$$H^d((T_W)', G_r|(T_W)') \neq 0 \ ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Corollaire 3.6. Les hypothèses concernant S, S', f, f', m, sont celles de 3.5. Désignons maintenant par F un complexe de faisceaux de Z/mZ-modules sur X', à degrés bornés inférieurement et à cohomologie constructible, et dont les faisceaux de cohomologie satisfont aux conditions (i) et (ii) de 3.5. Soit n un entier, et supposons que, pour tout schéma X_1 étale sur X, affine, on ait

$$H^i(X_1', F) = 0 \quad \text{pour} \quad i > n \ .$$

Alors, si $\bar{x}'$ est un point géométrique au-dessus d'un point x' de X', tel que l'on ait, pour un entier j, $(\underline{H}^j(F))_{\bar{x}'} \neq 0$, on a

$$\delta\ (x') \leqslant n-j \ .$$

Soit T' l'ensemble des points de X' où la conclusion de 3.7 est en défaut et supposons $T' \neq \emptyset$; soit $T = f(T')$, x un point maximal de T et x' un point de X' au-dessus de x. Soit j le plus grand entier tel que l'on ait $(\underline{H}^j(F))_{\bar{x}'} \neq 0$; on a donc $r = \delta(x) > n-j$. Soit Z'_q l'ensemble des points où la fibre géométrique de $\underline{H}^q(F)$ est $= 0$ et $Z_q = h(Z'_q)$; on voit comme dans la démonstration de 3.5 que Z_q est constructible. On a évidemment $Z'_q = \emptyset$ pour $q > n$ et pour q suffisamment petit. Les autres valeurs de q se répartissent en trois sous-ensembles. Soit

$$Q_1 = \{q \mid x \in Z_q \text{ et une générisation de } x, \text{ distincte de } x, \notin Z_q\}.$$

On a $j \in Q_1$ et on peut trouver un voisinage ouvert affine U_1 de x, tel que, pour tout $q \in Q_1$, $U_1 \cap Z_q$ soit un fermé irréductible de point générique x. Si $q \in Q_1$, on a

(*) $\delta(\underline{H}^q(F) \mid U'_1) = \delta(x)$ (pour la définition de $\delta(\underline{H}^q(F))$ cf. 3.1).

Soit

$$Q_2 = \{ q \mid \text{aucune générisation de } x \text{ n'appartient à } Z_q \}.$$

Alors, si $j < q \leqslant n$, on a $q \in Q_2$, et l'on peut trouver un voisinage ouvert affine U_2 de x, tel que, pour tout $q \in Q_2$, on ait $Z_q \cap U_2 = \emptyset$; on a ainsi

(**) $\underline{H}^q(F) \mid U'_2 = 0$ pour $q \in Q_2$.

Soit enfin

$$Q_3 = \{ q \mid Z_q \text{ contient des générisations strictes de } x \}.$$

Alors on peut trouver un voisinage ouvert affine de x, U_3, tel que, pour tout $q \in Q_3$, tous les points maximaux de $Z_q \cap U_3$ soient des générisations de x. Si $q \in Q_3$, on a

(***) $$\delta(\underline{H}^q(F)\,|\,U_3') \leqslant n-q \ .$$

Pour tout schéma X_1 étale au-dessus de $U_1 \cap U_2 \cap_3$, affine, considérons la suite spectrale d'ypercohomologie

$$E_2^{pq} = H^p(X_1', \underline{H}^q(F)) \Rightarrow H^*(X_1', F) \quad .$$

On a $E_2^{pq} = 0$ pour $q >$ d'après (**). On a $E_2^{pq} = 0$ pour $p+q \geqslant r+j$ sauf peut-être pour $p = r$, $q = j$. En effet c'est clair si $q < Q_2$; si $q \in Q_1$, on a alors $p > r$ sauf si $p = r$, $q = j$ et cela résulte de 3.1 compte tenu de (*) ; enfin si $q \in Q_3$, comme $r > n-j$, on a $p > n-q$ et l'assertion résulte de 3.1 compte tenu de (***). Vu que $H^{r+j}(X_1', F) = 0$, il résulte de la suite spectrale que l'on a

$$H^r(X_1', \underline{H}^j(F)) = 0 \quad ;$$

or ceci entraîne, d'après 3.5, $\delta\,(x) < r$, ce qui est absurde.

Corollaire 3.7. Soient S un schéma strictement local excellent de caractéristique nulle, $f : X \longrightarrow S$ un morphisme localement de type fini, m une puissance d'un nombre premier, F un complexe de faisceaux de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$-modules sur X, bornés inférieurement, à cohomologie constructible, et n un entier. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout schéma X_1 étale au-dessus de X, affine, on a

$$H^i(X_1, F) = 0 \quad \text{pour } i > n \ .$$

(ii) Pour tout point géométrique $\bar{x}$ au-dessus du point x de X, et pour tout entier j tel que l'on ait $(\underline{H}^j(F))_{\bar{x}} \neq 0$, on a

$$\delta(x) \leq n-j .$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) est le cas particulier de 3.6 obtenu en faisant $S = S'$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) résulte immédiatement de 3.1, en utilisant la suite spectrale d'hypercohomologie

$$H^p(X_1,\underline{H}^q(F)) \Rightarrow H^*(X_1,F) .$$

4. Théorème principal et variantes.

4.0. Soients $g : X \longrightarrow S$ un morphisme séparé de type fini, T une partie fermée de S, $Z = g^{-1}(T)$ et F un complexe de faisceaux abéliens sur X, à degrés bornés inférieurement. Nous appelerons i-ième groupe de cohomologie de F, à support propre, à support dans Z, le groupe

$$H^i_{Z!}(X/S,F) = H^i_T(S,R_!g(F)) ,$$

où $R_!g$ désigne "l'image directe à support propre" (SGA 4 XVII). Dans le cas particulier où g est propre, on a simplement

$$H^i_{Z!}(X/S,F) = H^i_Z(X,F) .$$

Proposition 4.1. Soient $f : U \to S$ un morphisme de type fini, F un complexe de faisceaux abéliens sur U à degrés bornés inférieurement.

Supposons que l'on ait une factorisation de f :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i} & X \\ & f \searrow \quad \swarrow g & \\ & S & \end{array} \quad ,$$

où i est une immersion ouverte et g un morphisme séparé de type fini, et désignons par G un complexe de faisceaux abéliens sur X, à degrés bornés inférieurement, qui prolonge F. Soient Y un sous-schéma fermé de X d'espace sous-jacent $X-U$, de sorte que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{j} & X \\ & h \searrow \quad \swarrow g & \\ & S & \end{array}$$

Soient enfin n un entier et T une partie fermée de S. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) On a $\mathrm{prof}_T(R_! f(F)) \geqslant n$.

(ii) Le morphisme canonique

$$\underline{H}_T^i(R_! g(G)) \longrightarrow \underline{H}_T^i(R_! h(j^* G))$$

est bijectif pour $i < n-1$, injectif pour $i = n-1$.

(iii) Pour tout schéma S' étale au-dessus de S, si l'on désigne

<u>par</u> X' (<u>resp</u>. f' , <u>resp</u>. <u>etc</u>.) <u>le schéma</u> $X \times_S S'$ (<u>resp</u>. <u>le morphisme</u> $f_{(S')}$, <u>resp</u>. <u>etc</u>.), <u>le morphisme canonique</u>

$$H^i_{g'^{-1}(T')!}(X'/S',G') \to H^i_{h'^{-1}(T')!}(Y'/S',j'^*G')$$

<u>est bijectif pour</u> $i < n-1$, <u>injectif pour</u> $i = n-1$.

Considérons dans la catégorie dérivée $D^+(X)$ (cf. [3]) le triangle distingué

$$\begin{tikzcd} & j_*j^*G \arrow[dl] & \\ i_!F \arrow[rr] & & G \arrow[ul] \end{tikzcd} .$$

En appliquant à ce triangle le foncteur $R_!g$, on obtient le triangle

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & R_!h(j^*G) \arrow[dl] & \\ R_!f(F) \arrow[rr] & & R_!g(G) \arrow[ul] \end{tikzcd} .$$

Montrons que (i) $\Leftrightarrow$ (ii). En effet, d'après la définition 1.2, (i) équivaut à la relation

$$\underline{H}^i_T(R_!f(F)) = 0 \quad \text{pour} \quad i < n ;$$

or on déduit de (*) la suite exacte de faisceaux

$$\to \underline{H}^i_T(R_!f(F)) \to \underline{H}^i_T(R_!g(G)) \to \underline{H}^i_T(R_!h(j^*G)) \to ,$$

d'où l'équivalence de (i) et (ii).

(i)$\Leftrightarrow$(iii). En effet (i) équivaut à dire que, pour tout schéma S' étale au-dessus de S, on a la relation

$$(**) \qquad H^i_{T'}(S', R_! f'(F')) = 0 \quad \text{pour} \quad i < n \; .$$

Or on déduit de (*) la suite exacte de groupes abéliens

$$\to H^i_{T'}(S', R_! f'(F')) \to H^i_{T'}(S', R_! g'(G')) \to H^i_{T'}(S', R_! h'(j'^* G')) \to \; ;$$

compte tenu de 4.0, cette suite exacte s'écrit sous la forme

$$\to H^i_{T'}(S', R_! f'(F')) \to H^i_{g'^{-1}(T')!}(X'/S', G') \to H^i_{h'^{-1}(T')!}(Y'/S', j'^* G')$$

L'équivalence de (i) et (iii) en résulte, compte tenu de la forme (**) de (i).

4.2.0. Lorsque $f : U \to S$ est affine, nous allons donner des conditions <u>locales</u> sur F pour que les conditions (i) à (iii) de 4.1 soient vérifiées . Dans la suite, les schémas considérés sont des schémas excellents de caractéristique nulle, les faisceaux sont des faisceaux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-modules, où m est une puissance d'un nombre premier. Si l'on disposait de la résolution des singularités au sens de (SGA 4 XIX) , les résultats énoncés, ainsi que leurs démonstrations, seraient encore valables pour des schémas excellents d'égale caractéristique, avec m premier à la caractéristique.

Théorème 4.2. Soient S un schéma excellent de caractéristique nulle et $f : U \to S$ un morphisme séparé de type fini. Soient F un complexe de faisceaux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-modules sur U, à degrés bornés inférieurement et à cohomologie constructible, n un entier et T une partie fermée de S. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout schéma U_1 étale au-dessus de U, affine sur S, on a, en désignant par f_1 le morphisme structural de U_1 et par F_1 la restriction de F_1 à U_1 :

$$\mathrm{prof}_T(R_! f_1(F_1)) \geqslant n$$

(cf. prop. 4.1 sur la signification de cette relation).

(ii) Pour tout point u de U, on a :

$$\mathrm{prof}_u(F) \geqslant n - \delta_T(u) ,$$

où l'on pose (cf. 2.2) : $\delta_T(u) = \deg \mathrm{tr}\, k(x)/k(s) + \mathrm{codim}(\overline{\{s\}} \cap T, \overline{\{s\}})$.

Démonstration. 1°) Soient t un point de T, $\bar{S}$ le localisé strict de S en un point géométrique au-dessus de t et S' le complété de $\bar{S}$, de point fermé t' ; alors $\bar{S}$ est excellent d'après (EGA IV 7.9.5), donc S' est un schéma strictement local complet excellent. Etant donné un schéma U sur X (resp. un S-morphisme f, resp. etc.), nous désignerons par U' (resp. f', resp. etc.) le schéma $U \times_S S'$ (resp. le morphisme $f_{(S')}$, resp. etc.). On a le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{h} & U \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array} ,$$

dans lequel le morphisme g est régulier (EGA IV 7.8.2). Montrons qu'il suffit de prouver que (pour tout point $t \in T$) les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$(i)_t$ Pour tout schéma U_1 étale sur U, affine sur S, posant $f_1 : U_1 \longrightarrow S$, on a

$$\mathrm{prof}_{t'}(R_! f_1'(F_1')) \geqslant n .$$

$(ii)_t$ Pour tout point u' de U', on a

$$\mathrm{prof}_{u'}(F') \geqslant n - \delta_{t'}(u') .$$

Il suffit de démontrer le lemme suivant :

Lemme 4.2.1. On a $(i) \Leftrightarrow (i)_t$ pour tout $t \in T$ et $(ii) \Leftrightarrow (ii)_t$ pour tout $t \in T$.

$(i) \Leftrightarrow (i)_t$ pour tout $t \in T$. En effet (i) équivaut à dire que, pour tout schéma U_1 étale au-dessus de U, affine sur S, on a

$$\mathrm{prof}_T(R_! f_1(F_1)) \geqslant n ;$$

or d'après 1.8

$$\mathrm{prof}_T(R_! f_1(F_1)) = \inf_{t \in T} \mathrm{prof}_t(R_! f_1(F_1)) .$$

Comme $g^*(R_! f_1(F_1)) \simeq R_! f_1'(F_1')$ (SGA 4 XVII), on a d'après 1.16

$$\mathrm{prof}_t(R_! f_1(F_1)) = \mathrm{prof}_{t'}(R_! f_1'(F_1')) ,$$

donc (i) équivaut à dire que l'on a, pour tout $t \in T$, $\mathrm{prof}_{t'}(R_! f'_1(F'_1)) \geqslant n$, ce qui n'est autre que $(i)_t$.

$(ii)_t$ pour tout $t \in T \Rightarrow$ (ii). En effet soit $u \in U$; on doit montrer la relation

$$\mathrm{prof}_u(F) \geqslant n - \delta_T(u) ,$$

où $\delta_T(u) = \mathrm{Inf}_{t \in T \cap \overline{\{s\}}} \delta_t(u)$ (cf. 2.2) ; on est donc ramené à montrer que l'on a, pour tout $t \in T \cap \overline{\{s\}}$

$$\mathrm{prof}_u(F) \geqslant n - \delta_t(u) .$$

Soient u' un point de U' tel que l'on ait $h(u') = u$ et $\delta_{t'}(u') = \delta_t(u)$ (cf. 2.1.1). Comme h est localement acyclique (SGA 4 XIX 4.1), il résulte de 1.16 et du fait que u' est un point générique de U'_u que l'on a

$$\mathrm{prof}_{u'}(F') = \mathrm{prof}_u(F) .$$

Mais on a d'après $(ii)_t$ $\mathrm{prof}_u(F) = \mathrm{prof}_{u'}(F') \geqslant n - \delta_t(u)$, ce qui démontre (ii).

(ii) $\Rightarrow$ $(ii)_t$ pour tout t. Avec les notations de 2.2.1, pour tout point u' de U' , on a grâce à 1.16

$$\mathrm{prof}_{u'}(F') \geqslant \mathrm{prof}_u(F) + 2 \dim h^{-1}_{u'}(u) \geqslant \mathrm{prof}_u(F) + \dim h^{-1}_{u'}(u) .$$

Compte tenu de 2.2.1 et (ii), on obtient

$$\mathrm{prof}_{u'}(F') \geqslant n - \delta_T(u) + \dim h^{-1}_{u'}(u) \geqslant n - \delta_{t'}(u') ,$$

ce qui n'est autre que $(ii)_t$.

2°) $(ii)_t \Leftrightarrow (i)_t$. On se ramène immédiatement au cas où F est à degrés bornés, en tronquant F à un rang suffisamment élevé. On peut réaliser S' comme fermé d'un schéma local régulier complet, donc excellent ; il résulte alors de (SGA 5 I 3.4.3) qu'il existe un complexe dualisant K sur S' et que $R^!f'(K) = K'$ est un complexe dualisant sur U'. Nous choisirons K de telle sorte que l'on ait $\delta^K(t') = 0$ (pour la définition de $\delta^K(t')$, cf. 2.3), et noterons DF' le dual de F' par rapport à K'. On **peut** reformuler l'hypothèse $(ii)_t$ de la façon suivante :

<u>Lemme</u> 4.2.2. <u>Soit</u> u' <u>un point de</u> U' ; <u>alors les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>On a</u> $\mathrm{prof}_{u'}(F') \geqslant n - \delta_{t'}(u')$.

(ii) <u>On a</u> $(\underline{H}^q(DF'))_{\bar{u}'} = 0$ <u>pour</u> $q > -n- \delta_{t'}(u')$ ($\bar{u}'$ <u>point géométrique au-dessus de</u> u').

Soient $\bar{U}'$ le localisé strict de U' en $\bar{u}'$ et $\bar{F}'$ l'image réciproque de F par le morphisme $\bar{U}' \to U'$. La relation $\mathrm{prof}_{u'}(F') \geqslant n-\delta_{t'}(u')$ équivaut par définition à la suivante :

$$(*) \qquad H^i_{\bar{u}'}(\bar{F}') = 0 \quad \text{pour} \quad i > n - \delta_{t'}(u') \ .$$

Soit $D(H^i_{\bar{u}'}(\bar{F}'))$ le dual du groupe abélien $H^i_{\bar{u}'}(\bar{F}')$ par rapport à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. D'**après** 2.3.2, $K'[-2\,\delta_{t'}(u')] = K''$ satisfait à $\delta^{K''}(u') = 0$; comme F' est à cohomologie constructible, on a $\overline{DF'} = D(\bar{F}')$ et le théorème de dualité locale (SGA 5 I 4.5.3) montre alors que l'on a

$$D(\underline{H}^i_{\bar{u}'}(\bar{F}')) \simeq (\underline{H}^{-i-2\delta_{t'}(u')}(DF'))_{\bar{u}'} \quad .$$

Donc (*) équivaut à la relation

$$(**) \qquad (\underline{H}^q(DF'))_{\bar{u}'} = 0 \quad \text{pour} \quad q > -n-\delta_{t'}(u') \ .$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème. La relation $(ii)_t$ équivaut à la relation (**). Soit $G^q = \underline{H}^q(DF')$; le théorème de Lefschetz affine (3.1) entraîne en particulier que, pour tout schéma U_1 étale sur U, affine sur S, on a

$$H^p(U_1', G^q) = 0 \quad \text{pour} \quad p > \delta(G^q) \ ,$$

où $\delta(G^q)$ est la borne supérieure des $\delta_{t'}(u')$ pour les u' tels que l'on ait $G^q_{\bar{u}'} \neq 0$; d'après (**) on a $\delta(G^q) \leqslant -n-q$, donc $(ii)_t$ entraîne la relation

$$H^p(U_1', \underline{H}^q(DF')) = 0 \quad \text{pour} \quad p > -q-n \ .$$

Compte tenu de la suite spectrale d'hypercohomologie du foncteur "sections sur U_1'" par rapport au complexe DF' :

$$E_2^{pq} = H^p(U_1', \underline{H}^q(DF')) \Rightarrow H^*(U_1', DF') \ ,$$

on obtient la relation

$$(***) \qquad H^i(U_1', DF') = 0 \quad \text{pour} \quad i > -n \ .$$

Inversement supposons vérifiée la relation précédente, pour tout U_1 étale sur U, affine sur S. Appliquons la proposition 3.6 en y remplaçant S par $\bar{S}'$; les hypothèses de 3.6 concernant $\bar{S}$ sont satisfaites, car, pour tout schéma $\bar{U}_1$ étale au-dessus de $\bar{U}$, affine, on peut trouver un schéma au-dessus de $\bar{U}_1$ qui provienne par image réciproque d'un schéma étale au-dessus de U, affine sur S ; quant aux hypothèses concernant F, elles sont satisfaites grâce à 2.3.3. On a ainsi, pour tout point u' de U' tel que $(\underline{H}^q(DF'))_{\bar{u}'} \neq 0$:

$$\delta_{t'}(u') \leqslant -n-q ,$$

ce qui n'est autre que la relation (**) ; on a donc prouvé l'équivalence

$$(ii)_t \Leftrightarrow (***).$$

Nous allons transformer la relation (***) ; on a d'abord

$$H^i(U_1',DF') = (\underline{H}^i(Rf'_{1*}(DF'_1)))_{t'} ;$$

mais d'après (SGA 5 I 1.12), il existe un isomorphisme canonique

$$Rf'_{1*}(DF'_1) \simeq D(R_!f'_1(F'_1)) ,$$

où $D(R_!f'_1(F'_1))$ désigne le dual de $R_!f'_1(F'_1)$ par rapport à K. On voit ainsi que $(ii)_t$ équivaut à

$$(\underline{H}^i(D(R_!f'_1(F'_1))))_{t'} = 0 \quad \text{pour} \quad i > -n .$$

Appliquant de nouveau le théorème de dualité locale (SGA 5 I 4.5.3), mais cette fois-ci au point t', on trouve que

$$(\underline{H}^i(D(R_! f_1'(F_1'))))_{t'} \simeq D(H_{t'}^{-i}(R_! f_1'(F_1'))) ,$$

et finalement $(ii)_t$ équivaut à la relation

$$H_{t'}^i(R_! f_1'(F_1')) = 0 \quad \text{pour} \quad i < n ,$$

c'est-à-dire $\mathrm{prof}_{t'}(R_! f_1'(F_1')) \geqslant n$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque 4.2.3. Le raisonnement se simplifie assez considérablement lorsqu'on suppose que S admet (du moins localement) un complexe dualisant (par exemple est localement immergeable dans un schéma régulier). Cela évite le recours à un complété (le passage au cas S strictement local étant immédiat), à 2.3.3 et à l'énoncé technique peu plaisant 3.6, qu'on peut alors remplacer par la référence plus sympathique 3.7.

Corollaire 4.3. *Soient* S *un schéma excellent de caractéristique nulle et* $f : U \to S$ *un morphisme séparé de type fini, tel que* U *soit* réunion de $c+1$ ouverts, affines sur S. *Soient* F *un complexe de faisceaux de* $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$*-modules, à degrés bornés inférieurement et à cohomologie constructible,* n *un entier et* T *une partie fermée de* S. *Supposons que, pour tout point* $u \in U$, *on ait*

$$\mathrm{prof}_u(F) \geqslant n - \delta_T(u) .$$

Alors on a

$$\mathrm{prof}_T(R_! f(F)) \geqslant n-c \quad .$$

Soit en effet U_i, $0 \leqslant i \leqslant c$, un recouvrement de U par des ouverts U_i, affines sur S. Reprenant les notations de la démonstration de 4.2, on a, pour tout i,

$$H^i(U_i', \underline{H}^q(DF')) = 0 \quad \text{pour} \quad i > -n.$$

En utilisant la suite spectrale qui relie la cohomologie de U à celle du recouvrement formé par les U_i (SGA 4 V 2.4), la relation précédente montre que l'on a

$$H^i(U', \underline{H}^q(DF')) = 0 \quad \text{pour} \quad i > -n+c \ .$$

Le corollaire résulte alors de la fin de la démonstration de 4.2.

Corollaire 4.4. Soient S un schéma excellent de caractéristique nulle, $g : X \to S$ un morphisme, U un ouvert de X, réunion de $c+1$ ouverts affines sur S, Y un sous-schéma fermé d'espace sous-jacent $X-U$ et $j : Y \to X$ le morphisme naturel. Soient F un complexe de faisceaux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-modules sur X, à degrés bornés inférieurement et à cohomologie constructible, T une partie fermée de S et n un entier. Supposons que, pour tout point u de U, on ait

$$\mathrm{prof}_u(F) \geqslant n - \delta_T(u) \ .$$

Alors le morphisme canonique

$$H^i_{g^{-1}(T)!}(X/S,F) \to H^i_{(g^{-1}(T)\cap Y)!}(Y/S,j^*F)$$

est bijectif pour $i < n-c-1$, injectif pour $i = n-c-1$.

Cela résulte immédiatement de 4.1 et 4.3.

Corollaire 4.5. (Théorème de Lefschetz local). Soient S un schéma local hensélien excellent de caractéristique nulle, t le point fermé de S, X un schéma propre sur $S' = S - \{t\}$ et U un ouvert de X, réunion de $c+1$ ouverts affines. Soient Y un sous-schéma fermé de X, d'espace sous-jacent $X-U$, $j : Y \to X$ le morphisme canonique, F un complexe de faisceaux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-modules sur X, à degrés bornés inférieurement et à cohomologie constructible, et n un entier. Supposons que, pour tout point u de U, on ait

$$\mathrm{prof}_u(F) \geqslant n - \delta'_t(u), \text{ où } \delta'_t(u) = \delta_t(u) - 1 .$$

Alors le morphisme canonique

$$H^i(X,F) \to H^i(Y,j^*F)$$

est bijectif pour $i < n-c-1$, injectif pour $i = n-c-1$.

Soit $f : U \to S$ le morphisme canonique ; il résulte de 4.2, appliqué en remplaçant n par $n+1$, que l'on a

$$\mathrm{prof}_t(R_!f(F|U)) \geqslant n+1-c.$$

La relation précédente montre que le morphisme canonique

$$H^i(S,R_!f(F|U)) \to H^i(S',R_!f(F|U))$$

est bijectif pour $i < n-c$, injectif pour $i = n-c$. Comme $R_!f(F|U)$ est nul en dehors de S', on a $H^i(S,R_!f(F|U)) \simeq (\underline{H}^i(R_!f(F|U)))_t = 0$, et par suite

$$(*) \qquad H^i(S',R_!f(F|U)) = 0 \quad \text{pour} \quad i < n-c.$$

Soient $g : X \to S'$, $h : Y \to S'$, $f' : U \to S'$, les morphismes canoniques. Il résulte du triangle distingué

$$\begin{tikzcd}
 & Rh_*(j^*F) \arrow[dl] & \\
R_!f'(F|U) \arrow[rr] & & Rg_*(F) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

que la condition (*) équivaut au fait que le morphisme

$$H^i(S',Rg_*F) \to H^i(S',Rh_*(j^*F))$$

est bijectif pour $i < n-c-1$, injectif pour $i = n-c-1$. Comme ce morphisme s'identifie canoniquement au morphisme

$$H^i(X,F) \to H^i(Y,j^*F) \ ,$$

la conclusion en résulte aussitôt.

Corollaire 4.6. (Théorème de Lefschetz global). Soient S le spectre d'un corps, X un schéma propre sur S et U un ouvert de X réunion de $c+1$ ouverts affines. Soient Y un sous-schéma fermé de X d'espace sous-jacent $X - U$, $j : Y \to X$ le morphisme canonique, F un complexe de faisceaux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-modules sur X, à degrés bornés inférieurement et à cohomologie constructible et n un entier. Supposons que, pour tout point u de U, on ait

$$\mathrm{prof}_u(F) \geqslant n - \dim(\overline{\{u\}}) \quad .$$

Alors le morphisme canonique

$$H^i(X,F) \longrightarrow H^i(Y,j^*F)$$

est bijectif pour $i < n-c-1$ et injectif pour $i = n-c-1$.

Plus généralement, si $g : X \to S$ est un morphisme séparé de type fini, les hypothèses sur S, U, Y, F étant les mêmes que précédemment, alors le morphisme canonique

$$H^i_!(X/S,F) \longrightarrow H^i_!(Y/S,j^*F)$$

(où $H^i_!$ désigne la cohomologie à support propre, c'est-à-dire $H^i_!(X,F) = H^i(S,R_!g(F))$) est bijectif pour $i < n-c-1$, injectif pour $i = n-c-1$.

Le corollaire est un cas particulier de 4.4, avec $T = S$.

Voici une réciproque partielle à 4.3 :

Proposition 4.7. Soient S un schéma noethérien, $f : U \to S$ un morphisme de type fini. Supposons qu'il existe un complexe dualisant K sur S et que $R^!f(K)$ soit un complexe dualisant sur U. Soient T une partie fermée de S et c un entier. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout complexe de faisceaux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-modules F sur U, à degrés bornés inférieurement et à cohomologie constructible, et pour tout entier n tel que l'on ait, pour tout point u de U,

$$\mathrm{prof}_u(F) \geqslant n - \delta_T(u) ,$$

on a

$$\mathrm{prof}_T(R_! f(F)) \geqslant n-c .$$

(ii) Pour tout faisceau de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-modules G sur U, constructible, et pour tout point $t \in T$, on a

$$(R^p f_*(G))_{\bar{t}} = 0 \quad \text{pour} \quad p > \delta(G,f,t) + c$$

(rappelons d'après (SGA X 4 XIX 6.0) que $\delta(G,f,t) = \sup\{\delta_t(u) \mid t \in \overline{\{u\}} \text{ et } G_{\bar{u}} \neq 0\}$

N.B. La condition (ii) est satisfaite en vertu de 3.1 si f est séparé et si U est, localement sur S pour la topologie étale, réunion de $c+1$ ouverts affines sur S, donc 4.7 contient 4.3 (*).

On peut évidemment supposer que S est local et que T est le point fermé t de S. La démonstration de (ii) $\Rightarrow$ (i) est essentiellement iden-

(*) Du moins dans le cas ou S admet localement un complexe dualisant, p.ex. S immergeable localement dans un schéma régulier.

tique à la partie 2°) de la démonstration de 4.2. Montrons rapidement que (i)$\Rightarrow$ (ii). Le théorème de dualité locale (SGA 5 I 4.3.2) appliqué à DG montre que

$$D(H^i_{\bar{u}}(DG)) \simeq (\underline{H}^{-i-2\delta_t(u)}(G))_{\bar{u}} \quad .$$

Comme G est réduit au degré zéro, on a donc $H^i_{\bar{u}}(DG) = 0$ sauf peut-être pour $i = -2\delta_t(u)$; plus précisemment

$$\mathrm{prof}_u(DG) = -2\delta_t(u) \quad \text{si} \quad G_{\bar{u}} \neq 0 \ ,$$

$$\mathrm{prof}_u(DG) = \infty \quad \text{si} \quad G_{\bar{u}} = 0 \ .$$

Il en résulte que l'on a, quel que soit $u \in U$:

$$\mathrm{prof}_u(DG) \geqslant -n-\delta_t(u) \ .$$

Il résulte alors de l'hypothèse (i) que l'on a $\mathrm{prof}_t(R_! f(DG)) \geqslant -n-c$. On transforme cette relation en utilisant l'isomorphisme $R_! f(DG) \simeq D(Rf_*(G))$ (SGA 5 I 1.12) et en appliquant le théorème de dualité locale au point t ; on obtient ainsi

$$(\underline{H}^i(Rf_*(G)))_{\bar{t}} = 0 \quad \text{pour} \quad i > n+c \ ,$$

ce qui n'est autre que (ii).

4.8. Les hypothèses étant celles de 4.4 avec g propre (resp. 4.5, resp. 4.6 avec g propre), si V est un voisinage ouvert de Y dans

X, le morphisme

$$H^i(V,F) \to H^i(Y,j^*F)$$

est bijectif pour $i < n-c-1$, injectif pour $i = n-c-1$. Si $i : V \to X$ est le morphisme canonique, il suffit en effet pour le voir d'appliquer 4.4 (resp. 4.5, resp. 4.6) au complexe $Ri_*(F|V)$. On peut se poser la question de savoir si le morphisme précédent est bijectif pour $i = n-c-1$, injectif pour $i = n-c$. Il suffit évidemment que les hypothèses soient vérifiées quand on remplace n par $n+1$; la proposition qui suit montre qu'il suffit d'un peu moins.

Proposition 4.9. *Soient S un schéma local excellent de caractéristique nulle, de point fermé t (resp. en plus des conditions précédentes on suppose S hensélien), $f : X \to S$ un schéma propre sur S (resp. propre sur $S - \{s\}$) et U un ouvert de X réunion de $c+1$ ouverts affines. Soient Y un sous-schéma fermé de X, d'espace sous-jacent $X - U$, $j : Y \to X$ le morphisme canonique, F un complexe de faisceaux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-modules sur X, à degrés bornés inférieurement et à cohomologie constructible, et n un entier. On suppose que l'on a, pour tout point u de U,*

$$\mathrm{prof}_u(F) \geqslant \mathrm{Inf}(n-1, n-\delta_t(u)) \quad (\text{resp. } \mathrm{prof}_u(F) \geqslant \mathrm{Inf}(n-1, n+1-\delta_t(u)))\ .$$

Alors, pour tout voisinage ouvert V de Y dans X, le morphisme canonique

$$H^i_{f^{-1}(t)}(V,F) \to H^i_{f^{-1}(t)\cap Y}(Y,j^*F) \quad (\text{resp. } H^i(V,F) \to H^i(Y,j^*F))$$

est bijectif pour $i < n-c-2$ et injectif pour $i = n-c-2$. De plus il existe un voisinage ouvert V_o de Y dans X, tel que, pour tout autre tel V avec $V \subset V_o$, le morphisme canonique

$$H^i_{f^{-1}(t)\cap V}(V,F) \to H^i_{f^{-1}(t)\cap Y}(Y,j^*F) \quad (\text{resp. } H^i(V,F) \to H^i(Y,j^*F))$$

soit bijectif pour $i < n-c-1$, injectif pour $i = n-c-1$.

Démonstration. Posons pour simplifier $\delta'_t(u) = \delta_t(u)$ (resp. $\delta'_t(u) = \delta_t(u) - 1$). On déduit de 4.8 la première assertion de 4.9, car les hypothèses de 4.4 (resp. 4.5) sont vérifiées quand on y remplace n par $n-1$. Elles le sont aussi pour n lui-même, sauf aux points u tels que $\delta'_t(u) = 0$. Or, pour un $u \in U$, dire que l'on a $\delta'_t(u) = 0$ équivaut à dire que u est un point fermé de U_t (resp. un point fermé de X). Soit E l'ensemble des points de U tels que $\delta'_t(u) = 0$; montrons que, pour tous les points $u \in E$, sauf un nombre fini, on a $\text{prof}_u(F) \geq n$. Soient $\bar{S}$ le localisé strict de S en t, S' le complété de $\bar{S}$, de point fermé t', et considérons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{h} & U \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array} \quad .$$

Les hypothèses de profondeur aux points de U se conservent quand on remplace U par U' et F par l'image inverse F' de F sur U'. Soient en effet $u' \in U'$ et $u = h(u')$. Si $u \notin E$, on a la relation $\mathrm{prof}_u(F) \geqslant n - \delta_t^!(u)$, et il résulte de 4.2.1 que ceci entraîne la relation $\mathrm{prof}_{u'}(F') \geqslant n - \delta_t^!(u')$. Si $u \in E$, u' est un point fermé de $U_t^!$ (resp. un point fermé de $X' = X \times_S S'$), et, comme la fibre U_u' de h en u est de dimension zéro et h régulier, il résulte de 1.16 que l'on a $\mathrm{prof}_{u'}(F') = \mathrm{prof}_u(F) \geqslant n-1$.

Soient alors K un complexe dualisant sur S', normalisé au point fermé t', et DF' le dual de F' par rapport à $R^! f(K)$. D'après 4.2.2, les hypothèses de profondeur étale aux points de U' se traduisent par les relations :

$$(\underline{H}^q(DF'))_{\bar{u}'} = 0 \quad \text{pour} \quad q > -n-\delta_t^!(u') \quad (\text{resp. } q > -n-2-\delta_{t'}^!(u')\ ) ,$$

si u' n'est pas un point de $E' = h^{-1}(E)$,

$$(\underline{H}^q(DF'))_{\bar{u}'} = 0 \quad \text{pour} \quad q > -(n-1) \quad (\text{resp. } q > -n-1\ ) , \text{ si } u' \in E'.$$

Soit $G = \underline{H}^{-(n-1)}(DF')$ (resp. $G = \underline{H}^{-n-1}(DF')$) ; comme G est un faisceau constructible, l'ensemble des points en lesquels la fibre géométrique est non nulle est un ensemble constructible (SGA 4 IX 2.4 (iv)) ; or par hypothèse cet ensemble est contenu dans l'ensemble E' des points fermés de $U_{t'}'$ (resp. des points de U' fermés dans X') ; il résulte donc de 4.9.1 ci-dessous que cet ensemble est réduit à un nombre fini de points. Appliquant 4.2.2, on voit que, pour tous les points de E', sauf un nombre fini, on a $\mathrm{prof}_{u'}(F') \geqslant n$. Il en résulte bien par 1.16 que, pour tous les points de E' sauf un nombre fini, on a

$$\mathrm{prof}_u(F) \geqslant n \ .$$

Soit V un voisinage ouvert de Y dans X, contenu dans le complémentaire dans X de l'ensemble fini de points u de E pour lesquels on a $\mathrm{prof}_u(F) = n-1$. Si $i : V \to X$ est l'immersion canonique, soit

$$F_1 = Ri_*(F|V) \ ;$$

alors F_1 est un complexe de faisceaux sur X, à cohomologie constructible (SGA 4 XIX 5.1) et à degrés bornés inférieurement. Nous allons voir que, pour tout point u de U, le complexe F_1 vérifie la relation

$$(*) \qquad \mathrm{prof}_u(F_1) \geqslant n - \delta_t'(u) \ .$$

Si $u \in U \cap V$, on a $\mathrm{prof}_u(F_1) = \mathrm{prof}_u(F)$, et la relation (*) est vérifiée par hypothèse pour les points de U qui n'appartiennent pas à E ; pour ces derniers, elle est aussi vérifiée d'après le choix de V. Enfin, si $u \in U$ et $u \notin V$, on a d'après 1.6 g) $\mathrm{prof}_u(F_1) = \infty$. On applique alors 4.4 (resp. 4.5) en remplaçant F par F_1 ; on obtient le résultat anoncé, compte tenu du fait que l'on a, quel que soit i :

$$H^i_{f^{-1}(t)}(X, Ri_*(F|V)) \simeq H^i_{f^{-1}(t)\cap V}(V,F) \quad (\text{resp. } H^i(X, Ri_*(F|V)) \simeq H^i(V,F).$$

Lemme 4.9.1. *Un ensemble constructible* E *contenu dans l'ensemble des points fermés d'un schéma* X *noethérien est réduit à un nombre fini de* points.

En effet E est réunion fini d'ensemble de la forme $U \cap \complement V$, où U et V sont des ouverts de X ; par hypothèse tous les points de $U \cap \complement V$ sont des points maximaux de cet ensemble, donc ils sont en nombre fini.

5. Profondeur géométrique.

Pour appliquer en pratique 4.2 et ses corollaires, il faut disposer d'un critère commode qui permette de vérifier les hypothèses de profondeur étale aux points de U. Nous allons donner un tel critère, en utilisant le thèorème de Lefschetz local (4.5).

5.1. Soient A un anneau local noethérien ; quand nous parlerons de la profondeur étale de A, il s'agira de la profondeur au point fermé. Nous allons introduire une notion de "profondeur géométrique de A", et utiliser 4.5 pour la comparer à la profondeur étale prof ét(A).

Proposition 5.2. *Soit* A *un anneau local noethérien ; supposons que* A *soit isomorphe à un quotient d'un anneau local régulier* B *par un idéal* I (*c'est vrai par exemple lorsque* A *est complet*, *en vertu du théorème de Cohen* (EGA 0_{IV} 19.8.8)). *Soit* q *le nombre minimal de générateurs de* I ; *alors le nombre* $\dim B - q$ *est indépendant du choix de* B.

Le nombre minimal de générateurs de I est aussi égal au rang du k-espace vectoriel $I \otimes_B k$, où k désigne le corps résiduel de A. On se ramène tout de suite au cas où A est complet, car on a $\hat{A} \simeq \hat{B}/\hat{I}$ avec $\dim B = \dim \hat{B}$ et $rg_k(I \otimes_B k) = rg_k(\hat{I} \otimes_{\hat{B}} k)$; pour la même raison on peut supposer que les anneaux B sont complets. Soient B et B' deux anneaux locaux réguliers complets, $f : B \to A$, $f' : B' \to A$ deux homomorphismes surjectifs et $I = \operatorname{Ker} f$, $I' = \operatorname{Ker} f'$. On doit montrer que

$$\dim B - \operatorname{rg}_k(I \otimes_B k) = \dim B' - \operatorname{rg}(I' \otimes_{B'} k) \quad .$$

Plaçons-nous d'abord dans le cas où l'on a une factorisation de la forme

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & A \\ & B' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

avec g surjectif. Soit $J = \operatorname{Ker} g$; alors $J \subset I$ et $I/J = I'$. Puisque B' est régulier, $\dim B' = \dim B - \operatorname{rg}_k(J \otimes_B k)$ et J est engendré par des éléments faisant partie d'un système régulier de paramètres de B. Il en résulte que l'on a la suite exacte

$$0 \to J \otimes_B k \to I \otimes_B k \to J/I \otimes_{B'} k \to 0 \ ,$$

et par suite

$$\dim B - \operatorname{rg}(I \otimes_B k) = \dim B - \operatorname{rg}_k(J \otimes_B k) - \operatorname{rg}_k(J/I \otimes_{B'} k) = \dim B' - \operatorname{rg}_k(I' \otimes_{B'} k).$$

Le cas général se ramène au précédent ; pour le voir, il suffit de montrer que l'on peut trouver un anneau local régulier complet B'' et des homomorphismes surjectifs $g : B'' \to B$ et $g' : B'' \to B'$, rendant commutatif le diagramme

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "f"] & \\ B'' \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & & A \\ & B' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd} .$$

Or, si W est un anneau de Cohen de corps résiduel k, on a un morphisme local $W \to A$ qui se relève à B et B' (EGA IV 19.8.6), de sorte que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr] & \\ W \arrow[ur] \arrow[dr] & & A \\ & B' \arrow[ur] & \end{tikzcd} .$$

On peut trouver des entiers n et n' et des morphismes surjectifs $h : W[[T_1,\dots,T_n]] \to B$ et $h' : W[[T'_1,\dots,T'_{n'}]] \to B'$ qui soient des morphismes de W-algèbres (EGA 0_{IV} 19.8.8) ; si l'on pose alors $B'' = W[[T_1,\dots,T_n,T'_1,\dots,T'_n]]$ et si l'on définit g et g' comme des morphisme de W-algèbres tels que

$$g(T_i) = h(T_i)\ ,\ g(T'_i) = b_i\ ,\ g'(T_i) = b'_i\ ,\ g'(T'_i) = h'(T'_i)\ ,$$

où b_i (resp. b'_i) est un élément de B (resp. de B') qui relève $h'.f'(T'_i)$ (resp. $h.f(T_i)$), le diagramme (*) est bien commutatif.

La proposition 5.2 justifie la définition suivante :

Définition 5.3. Soient A un anneau local noethérien, $\hat{A}$ son complété, qui est donc isomorphe au quotient d'un anneau local régulier complet B par un idéal I ; si q est le nombre minimal de générateurs de I, on appelle profondeur géométrique de A le nombre

$$\text{prof géom}(A) = \dim B - q.$$

Proposition 5.4. Soit A un anneau local noethérien. Alors on a

$$\text{prof géom}(A) \leqslant \dim A,$$

et on a l'égalité si et seulement si A est un intersection complète.

On peut supposer A complet. Soit alors $A = B/I$, où B est un anneau local régulier complet et I un idéal de B. Si $(x_1,\dots,x_q)$ est un système minimal de générateurs de I, on a $\dim A \geqslant \dim B - q$, et dire que $\dim A = \dim B - q$ équivaut à dire que $(x_1,\dots,x_q)$ fait partie d'un système de paramètres de B (EGA 0_{IV} 16.3.7) ; la proposition en résulte immédiatement.

Proposition 5.5. Soient A et A' des anneaux locaux noethériens, $f : A \to A'$ un homomorphisme local. Supposons que f soit plat et que, désignant par k le corps résiduel de A, $A' \otimes_A k$ soit un corps, extension séparable de K. Alors on a

$$\text{prof géom}(A) = \text{prof géom}(A').$$

Quitte à remplacer A et A' par leurs complétés, on peut supposer A et A' complets (il résulte de (EGA 0_{III} 10.2.1) que l'hypothèse de platitude est conservée et cela est évident pour les autres hypothèses). Soit alors $A = B/I$, où B est un anneau local régulier et I un idéal de B. Comme A' est formellement lisse sur A (EGA 0_{IV} 19.8.2), il résulte de (EGA 0_{IV} 19.7.2) que l'on peut trouver un anneau local noethérien complet B' et un homomorphisme local $B \to B'$, tel que B' soit un B-module plat et que l'on ait $B' \otimes_B A \simeq A'$. On a donc $A' \simeq B'/IB'$; de plus l'anneau B' est régulier ; en effet, si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de B, $\mathfrak{m}B'$ est l'idéal maximal de B', et, puisque $\mathfrak{m}$ est engendré par une suite régulière par définition de "régulier", B' est engendré par une suite B'-régulière (EGA 0_{IV} 15.1.14). Comme on a évidemment $\dim B = \dim B'$, et comme I et IB' ont même nombre minimal de générateurs, l'assertion en résulte.

Théorème 5.6. Soit A un anneau local excellent de caractéristique nulle. Alors on a

$$\text{prof ét}(A) \geqslant \text{prof géom}(A).$$

On peut supposer A strictement local complet, puisque la profondeur géométrique et la profondeur étale de A se conservent par passage à l'hensélisé strict et au complété d'après 5.5 et 1.16. Soit $A \simeq B/I$, où B est un anneau local régulier complet, et soit $(f_1,\ldots,f_q)$ un système minimal de générateurs de l'idéal I. On a donc

$$\pi = \text{prof géom}(A) = \dim B - q.$$

Considérons l'immersion fermée

$$Y = \operatorname{Spec} A \longrightarrow X = \operatorname{Spec} B,$$

et soient $U = X - Y = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant q} X_{f_i}$. Si a désigne le point fermé de X, on doit montrer que, pour tout nombre premier p, on a

$$H^i_a(Y,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0 \quad \text{pour} \quad i < \pi .$$

Comme B est régulier excellent, on a prof ét$(B) = 2 \dim X$ (cf. 1.10) et par suite $H^i_a(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ pour $i < 2 \dim X$. Il suffit donc, pour démontrer le théorème, de prouver que le morphisme

$$(*) \qquad H^i_a(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i_a(Y,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

est bijectif pour $i < \pi$. On applique pour cela le théorème de Lefschetz local (4.5) avec $n = \pi+q-1$, $c = q-1$ donc $n-c = \pi$. Notons que $U = X - Y$ est réunion des q ouverts affines X_{f_i}. Montrons que l'on a, pour tout point u de U :

$$\text{prof ét}_u(X) \geqslant \pi+q-1-\dim(\overline{\{u\}}) = \dim \mathcal{O}_{X,u}$$

(où $\overline{\{u\}}$ désigne l'adhérence de u dans $X - \{\overline{a}\}$). En effet il résulte de 1.10 que l'on a

$$\text{prof ét}_u(X) = 2 \dim \mathcal{O}_{X,u} \geqslant \dim \mathcal{O}_{X,u} .$$

En utilisant 4.5, on voit que (*) est bijectif pour $i < \pi$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Corollaire 5.7. Soient S le spectre d'un corps de caractéristique nulle (resp. un schéma local hensélien excellent de caractéristique nulle), $f : X \to S$ un schéma propre sur S (resp. sur $S - \{s\}$). Soient U une réunion de $c+1$ ouverts de X, affines, Y un sous-schéma fermé d'espace sous-jacent $X - U$, n et m des entiers > 0. On suppose que, pour tout point u de U, on a

$$\text{prof géom}(\mathcal{O}_{X,u}) \geqslant n - \dim(\overline{\{u\}})$$

($\overline{\{u\}}$ adhérence de u dans X). Alors le morphisme canonique

$$H^i(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \to H^i(Y,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$$

est bijectif pour $i < n-c-1$, injectif pour $i = n-c-1$.

On applique 4.5 et 4.6. Les hypothèses de profondeur étale aux points de U sont vérifiées car on a d'après 5.6

$$\text{prof ét}_u(X) \geqslant \text{prof géom } \mathcal{O}_{X,u} \geqslant n - \dim(\overline{\{u\}}).$$

6. Questions ouvertes.

6.1. On peut se demander si l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) de 4.2 est valable plus généralement pour des faisceaux F de torsion, pas nécessairement annulés par un entier m donné et pas nécessairement constructibles. Dans le cas où S n'est pas de caractéristique nulle, il semble possible que cette implication reste valable, même pour les faisceaux de p-torsion, (p la caractéristique résiduelle). Enfin il n'est pas clair non plus que l'hypothèse S excellent ne puisse être levée.

6.2. Soient X un schéma propre sur un corps k ou bien le complémentaire du point fermé d'un schéma local hensélien, et $j : Y \to X$ un sous-schéma fermé de X, dont le complémentaire U est affine. Alors, si F est un faisceau d'ensembles sur X ou un faisceau en groupes non nécessairement commutatifs, les énoncés 4.5 ou 4.6 et 4.9 ont encore un sens pour un tel F, à condition de se borner à des petites valeurs de n. Si u est un point de U, on désigne par $\bar{u}$ un point géométrique au-dessus de u, par $X(\bar{u})$ le localisé strict de X en $\bar{u}$ et par $F_{\bar{u}}$ la fibre de F en $\bar{u}$. Alors, en faisant éventuellement certaines hypothèses sur X et sur F, par exemple en supposant X excellent (éventuellement de caractéristique nulle, ou d'égale caractéristique en utilisant la résolution des singularités) et F ind-fini (ou au besoin même $\mathbb{L}$-ind-fini avec $\mathbb{L}$ premier à la caractéristique de X), on aimerait démontrer les énoncés suivants :

a) Soit F un faisceau d'ensembles (resp. un faisceau en groupes) et supposons que, pour tout point u de U, on ait

$$F_{\bar{u}} \to H^{0}(X(\bar{u})-\bar{u},F) \quad \text{injectif si} \quad \dim(\overline{\{u\}}) \leq 1$$

(c'est-à-dire, pour un tel u, on a $\mathrm{prof}_u(F) \geq 1$). Alors, quand V parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de Y, le morphisme canonique

$$\varinjlim_{V} H^{o}(V,F) \to H^{o}(Y,j^{*}F)$$

est bijectif (resp. on a la conclusion précédente et de plus le morphisme $\varinjlim_{V} H^{1}(V,F) \to H^{1}(Y,j^{*}F)$ est injectif). Si F est constructible, on peut remplacer les $\varinjlim$ par la cohomologie de V pour V "assez petit".

b) Soit F un faisceau d'ensembles (resp. un faisceau en groupes) et supposons que, pour tout point u de U, on ait $\mathrm{prof}_{u}(F) \geqslant 2-\dim(\overline{\{u\}})$, ce qui se traduit aussi par les relations

$$F_{\bar{u}} \to H^{o}(X(\bar{u})-\bar{u},F) \quad \text{est bijectif si} \quad \dim(\overline{\{u\}}) = 0$$

$$F_{\bar{u}} \to H^{o}(X(\bar{u})-\bar{u},F) \quad \text{est injectif si} \quad \dim(\overline{\{u\}}) = 1 .$$

Alors le morphisme canonique

$$H^{o}(X,F) \to H^{o}(Y,j^{*}F)$$

est bijectif (resp. on a la conclusion précédente et de plus le morphisme $H^{1}(X,F) \to H^{1}(Y,j^{*}F)$ est injectif).

c) Soit F un faisceau en groupes ind-fini. Supposons que, pour tout point u de U, on ait

$$F_{\bar{u}} \to H^{o}(X(\bar{u})-\bar{u},F) \quad \text{bijectif si} \quad \dim(\overline{\{u\}}) = 0 \text{ ou } 1 ,$$

$$F_{\bar{u}} \to H^{o}(X(\bar{u})-\bar{u},F) \quad \text{injectif si} \quad \dim(\overline{\{u\}}) = 2 .$$

Alors, quand V parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de Y, les morphismes canoniques

$$\varinjlim_{V} H^{o}(V,F) \to H^{o}(Y,j^{*}F) \text{ et } \varinjlim_{V} H^{1}(V,F) \to H^{1}(Y,j^{*}F)$$

sont bijectifs. Si F est constructible, on peut remplacer les $\varinjlim$ par la cohomologie de V pour V assez petit.

d) Soit F un faisceau en groupes. Supposons que, pour tout point u de U, on ait $\mathrm{prof}_{u}(F) \geqslant 3\text{-}\dim(\overline{\{u\}})$, ce qui se traduit aussi par les conditions

$$F_{\bar{u}} \to H^{o}(X(\bar{u})-\bar{u},F) \text{ bijectif, et } H^{1}(X(\bar{u})-\bar{u},F) = 0 \text{ si } \dim(\overline{\{u\}}) = 0 ,$$

$$F_{\bar{u}} \to H^{o}(X(\bar{u})-\bar{u},F) \text{ bijectif si } \dim(\overline{\{u\}}) = 1 ,$$

$$F_{\bar{u}} \rightarrowtail H^{o}(X(\bar{u})-\bar{u},F) \text{ injectif si } \dim(\overline{\{u\}}) = 2 .$$

Alors les morphismes canoniques

$$H^{o}(X,F) \to H^{o}(Y,j^{*}F) \quad \text{et} \quad H^{1}(X,F) \to H^{1}(Y,j^{*}F)$$

sont bijectifs.

Comme indication en faveur de ces énoncés, signalons **XIII** 2.1, X 3.4 et XII 3.5. Signalons que, grâce à l'argument de 4.8 et 4.9, l'énoncé a) (resp. c)) résulterait de b) (resp. d)).

6.3. Il résulterait de d) l'énoncé suivant analogue à 5.6 : si A

est un anneau local noethérien (éventuellement excellent) et si l'on a prof géom(A) $\geqslant 3$, alors on a prof hop(A) $\geqslant 3$. Pour voir ceci, on réalise $Y' = \operatorname{Spec} A$ comme fermé d'un schéma local régulier $X' = \operatorname{Spec} B$, dont le complémentaire est réunion de q ouverts affines, avec la relation $\dim B - q =$ prof géom(A). On a, pour tout point x de X', si $n = \dim B$, prof $\mathrm{hop}_x(X) \geqslant \mathrm{Inf}(3, n-\dim(\overline{\{x\}}))$ (cf. 1.11) et l'on déduit de d) que ceci entraîne prof $\mathrm{hop}_y(Y') \geqslant \mathrm{Inf}(3, n-q-\dim(\overline{\{y\}}))$, pour tout point y de Y'. Le résultat s'obtient alors en prenant pour y le point fermé de Y'.

6.4. Un variante de 4.2, tout au moins de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i), doit encore être valable dans le cas analytique complexe, à condition de travailler avec des faisceaux "analytiquement constructibles" (cf. XIII) ; la démonstration serait analogue à celle de 4.2, en utilisant la théorie de la dualité de J.L. Verdier. Notons par contre que, pour l'analogue analytique complexe des variantes non commutatives signalées dans 6.2, on ne dispose pas même d'une méthode d'attaque pour les énoncés concernant le groupe fondamental suggérés par les résultats des exposés X, XII, XIII, rappelés à la fin de 6.2. Les méthodes du Séminaire semblent en effet irrémédiablement liées au cas des revêtements finis (qui peuvent être étudiés en termes de faisceaux cohérents d'Algèbres).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Artin et B. Mazur, Homotopy of Varieties in Etale Topology, in Proceedings of a Conference on Local Fields, Springer (1967).

[2] J.P. Serre, Cohomologie Galoisienne, Springer-Verlag, 1964.

[3] J.L. Verdier, Algèbre homologique et Catégories dérivées, North. Holland Pub. Cie., à paraître.

INDEX DES NOTATIONS

INDEX TERMINOLOGIQUE