SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE DU BOIS-MARIE

1963-1964

THEORIE DES TOPOS ET
COHOMOLOGIE ETALE DES SCHEMAS

(SGA 4)

Un séminaire dirigé par

M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, J.L. VERDIER

Avec la collaboration de

N. BOURBAKI, P. DELIGNE, B. SAINT-DONAT

TOME 1

THEORIE DES TOPOS

(Exposés I à IV)

Préface à la deuxième édition

1. Comme le lecteur le verra dans l'Avant-propos de la première édition (incomplète) du présent Séminaire (qui suit cette préface), le but initial du Séminaire a été de développer la théorie de la cohomologie étale des schémas. D'autre part, depuis l'année ou a été développé le séminaire oral, l'importance du langage des topologies et des topos en géométrie algébrique est allée croissant, tant pour fournir un cadre commode et intuitif pour les techniques de la descente et le passage au quotient (indispensables dans pratiquement toutes les questions de constructions de schémas), que pour développer d'autres théories cohomologiques pour les schémas, mieux adaptées à certaines questions que la cohomologie étale (telles la cohomologie fppf, ou la cohomologie "cristalline" des schémas). De plus, il semble maintenant probable que ce langage va être appelé à rendre des services également aux algébristes et aux topologues. C'est pourquoi le besoin d'un exposé assez systématique de ce langage, avec des notations et une terminologie aussi proches que possible de celles déjà couramment utilisés ailleurs (directement inspirés de la topologie), est allé également en croissant. La présente édition vise (en plus de son but initial déjà mentionné) à donner un tel exposé, qui puisse servir aussi bien comme texte de référence qu'au mathématicien désireux de s'initier au langage des topos, en attendant le jour où l'on disposera d'un traité plus complet. C'est ce changement de perspective qu'exprime le changement dans le titre du Séminaire par

rapport au titre primitif "cohomologie étale des schémas".

Pour les raisons qui précèdent nous avons entièrement refondus les exposés I à VI du Séminaire primitif, consacrés au langage des topologies et des topos. Notre principe directeur a été de développer un langage et des notations qui soient ceux qui servent déjà effectivement dans les diverses applications, de sorte à ne pas perdre contact avec le contenu "géométrique" (ou "topologique") des divers foncteurs qu'on est amené à considérer entre sites. Pour ceci, les notions de topos et de morphisme de topos semblent être le fil conducteur indispensable, et il convient de leur donner la place centrale, la notion de site devenant une notion technique auxiliaire. Cela nous a amené en particulier à étoffer considérablement l'exposé IV consacré à ces notions, et à reprendre complètement la rédaction de l'exposé VI (consacré aux sites et topos fibrés) dans cet esprit. Nous avons également augmenté l'exposé I consacré aux notions générales sur les catégories et les préfaisceaux, pour fournir les références internes nécessaires à la forme révisée du Séminaire.

2. En plus de ces modifications et additions substantielles par rapport au Séminaire sous sa forme initiale, signalons que la présente édition s'en distingue également par la présence des exposés XVII et XVIII sur la cohomologie à supports propres et le théorème de dualité globale. Ces exposés, dûs à P. DELIGNE, diffèrent assez substantiellement des exposés oraux de A. GROTHENDIECK, à divers titres. Ainsi, P. DELIGNE utilise la méthode de J.L. VERDIER en topologie pour la construction

directe du foncteur $f^!$ sans lissification préalable du morphisme f, et il donne une méthode de construction directe du foncteur $Rf_!$ de cohomologie à supports propres, sans compactification préalable du morphisme $f: X \longrightarrow Y$ séparé du type fini, grâce à l'utilisation de la fort utile "théorie de la descente cohomologique" ; cette dernière, qui relève de la topologie générale, à fait l'objet d'un nouvel exposé VI_B , rédigé par B. SAINT-DONAT, et son application à la construction directe de $Rf_!$ est exposée par SAINT-DONAT en appendice à l'exposé XVII. D'autre part, nous sommes redevables à P. DELIGNE d'une vérification soigneuse de très nombreuses compatibilités, qui avaient été admises purement et simplement par son prédécesseur moins scrupuleux, ceci lui a fourni d'ailleurs l'occasion, dans l'exposé XVII, de développer assez systématiquement un certain nombre de compléments à l'algèbre homologique et au formalisme des catégories dérivées, en assouplissant notamment le formalisme des foncteurs dérivés par l'utilisation systématique de la technique des ind et pro-objets ; à ce titre, les paragraphes 1, 2, 4 de XVII doivent être regardées comme des références standard d'algèbre homologique.

3. En plus de ces contributions de présentation et de mise au point de P. DELIGNE, cette réédition du Séminaire contient également un certain nombre de résultats qui lui sont dûs, dont voici les principaux :

a) La théorie de la descente cohomologique, déjà mentionnée, qui fait l'objet de l'exposé VI_B de SAINT-DONAT. Cette théorie s'est déjà avérée un instrument efficace de "passage du local au global", et de réduction de certaines propriétés cohomologiques des schémas à singularités au cas des schémas réguliers (lorsqu'on dispose de la résolution des singularités) ; le même principe doit pouvoir être utilisé pour les espaces analytiques de tous genres.(C'est ainsi qu'il a pu être utilisé dans le développement recent, par P. DELIGNE, d'une théorie de HODGE pour des variétés algébriques complexes à singularités quelconques.)

b) Un certain nombre de résultats de "topologie générale" i.e. sur les topos, notamment : l'existence de suffisamment de points pour un topos localement cohérent (VI 9) ; la stabilité de la notion de platitude d'un Module sur un topos par les foncteurs image inverse (V 8), qui lui donne l'occasion de développer une utile technique de "limites inductives locales" ; l'existence de 2-produits fibrés de topos (IV 15).

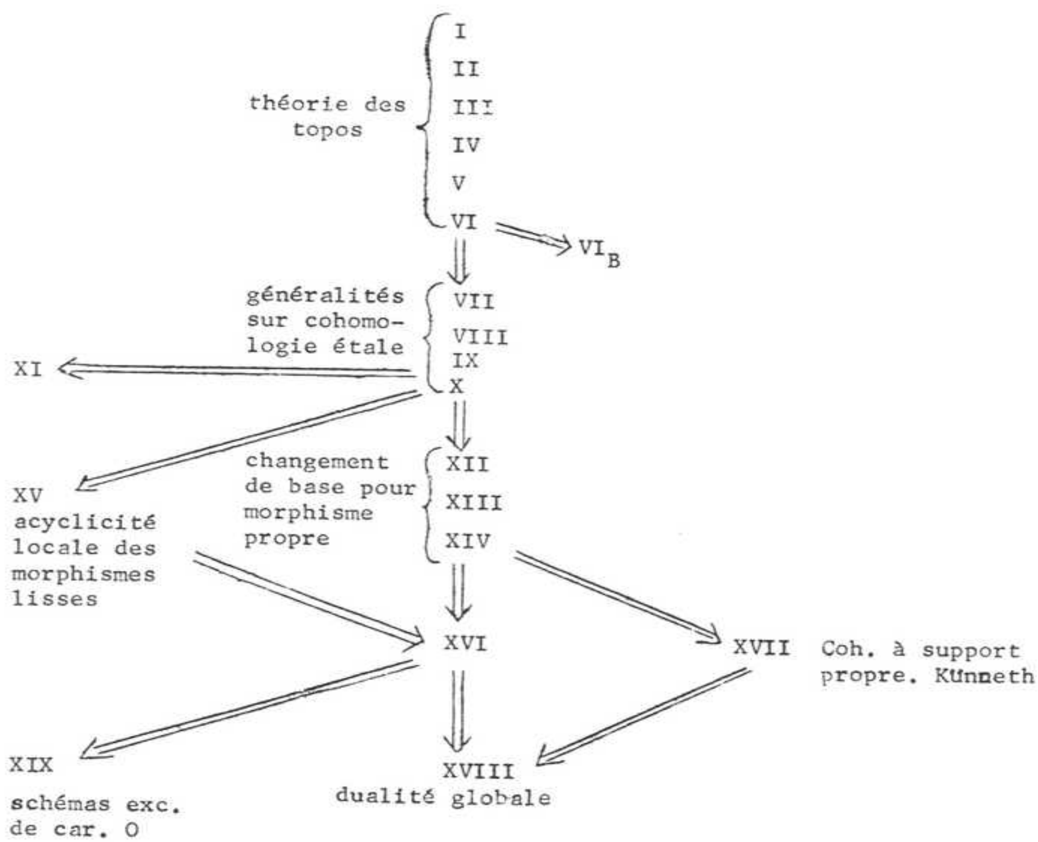
c) Une "formule de Künneth symétrique" XVII 5.5, 2.1, donnant la cohomologie d'une puissance symétrique en cohomologie étale ou cohérente à l'aide des foncteurs dérivés du foncteur TS (produit tensoriel symétrique), inspirée de la formule bien connue en topologie (due à DOLD). Contrairement à ce qu'on pourrait supposer, la formule en cohomologie étale ne résulte pas de "general non-sense", et procède par réductions successives au cas de coefficients constants sur une courbe propre et lisse sur un corps algébriquement clos, auquel cas un argument de spécialisation et le principe de Lefschetz permettent de se ramener au cas transcendant, où la formule résulte de la triangulabilité de l'espace envisagé. La formule de Künneth symétrique a été établie par P. DELIGNE en vue de diverses applications à des formules de fonctions L dans des cas non couverts par les exposés primitifs de SGA 5 (et qui seront sans doute inclus dans la réédition de SGA 5), notamment pour le cas où l'anneau de base pour les coefficients n'est pas un corps (tel $\underline{F}_{\ell}$ ou $\underline{Q}_{\ell}$), où est le corps premier $\underline{F}_p$ (p = car. du corps de base de la variété).

d) Une théorie des "puissances symétriques de torseurs" XVII 6.3, développée en vue de définir la trace d'un torseur par un morphisme fini localement fibre f: X $\longrightarrow$ Y, sous des conditions plus générales que les conditions habituelles (Groupe G sur Y lisse, ou f étale).

e) Une théorie "d'intégration des torseurs" XVIII 1.3 , et une formule "des coefficients universels", qui sont présentés comme des éléments d'une théorie de dualité pour des coefficients continus, relative à un morphisme f: X $\longrightarrow$ S lisse et de dimension relative 1 . Signalons que les notions introduites par P. DELIGNE suggèrent divers raffinements de formules du type Riemann-Roch en comologie étale, obtenus en écrivant des isomorphismes canoniques dans des catégories "d'objets stables" convenables formées avec des faisceaux étales constructibles, et des généralisations possibles en dimensions supérieures, et ouvrent ainsi un intéressant champ de recherches. Signalons aussi qu'à titre d'outil technique, P. DELIGNE démontre un intéressant théorème de structure pour certains torseurs sur certains schémas relatifs lisses f: X ⟶ S, comprenant notamment les fibrés projectifs (XVIII 1.2.2), théorème qui soulève également des questions intéressantes, liées notamment à la théorie des déformations des torseurs sous un schéma en groupes plat.

Bures, Novembre 1969

LEITFADEN



AVANT-PROPOS

1. Le but principal du présent Séminaire est de développer le formalisme de la "cohomologie de WEIL" des schémas. A partir essentiellement des résultats qui sont démontrés ici, des arguments bien connus, d'ailleurs dûs à WEIL lui-même, permettent de déduire une partie des conjectures de WEIL sur les fonctions L des variétés projectives non singulières sur un corps fini (*) (**). Cette déduction sera d'ailleurs présentée dans un séminaire qui fera suite à celui-ci (SGA 5 XIII).

Dans le présent séminaire, nous nous bornons à l'étude de la cohomologie des schémas, relativement à la <u>topologie étale</u>. Cette topologie, par sa description, est fort proche des topologies des variétés topologiques habituelles, et on verra que la plupart des résultats classiques concernant la cohomologie des espaces topologiques ordinaires (suites spectrales variées, théorèmes de finitude, Künneth, dualité, théorèmes de Lefschetz) peuvent se formuler et se démontrer dans le nouveau contexte, à condition de se borner le cas échéant aux faisceaux de torsion <u>premiers aux caractéristiques résiduelles</u> des

---

(*) Au moment d'écrire ces lignes, il n'est pas prouvé que les valeurs propres de l'homomorphisme de Frobenius opérant sur les $H^i(X,\mathbb{Z}_\ell)$ sont des entiers algébriques, ni a fortiori que leurs valeurs absolues sont égales à $q^{i/2}$.

(**) (Rajouté Octobre 1968). Pour un exposé faisant le point de l'état actuel des conjectures de WEIL, cf. l'exposé de KLEIMAN, Algebraic cycles and the Weil conjectures, in J. GIRAUD et Al., Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North Holland Pub. Cie.

[Ajouté en Août 1969]. Le fait que les valeurs propres soient des entiers algébriques a été prouvé récemment par P. DELIGNE (Cf. SGA 7 XXI 5).

schémas envisagés. On obtiendra une théorie cohomologique "à coefficient de caractéristique 0" (comme demandée par WEIL) par un passage à la limites projective essentiellement trivial (cf. SGA 5 VI), permettant de définir une cohomologie à coefficient dans l'anneau $\mathbb{Z}_\ell$ des entiers ℓ-adiques à partir des coefficients $\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}$, $\nu \longrightarrow +\infty$. Lorsque ℓ est premier aux caractéristiques résiduelles, cette cohomologie possède toutes les bonnes propriétés habituelles dans la cohomologie à coefficients $\mathbb{Z}$ classique (et se prête donc à la formulation des conjectures de WEIL). D'ailleurs, lorsque les schémas envisagés sont de type fini sur le corps des complexes $\underline{C}$, nous verrons que la cohomologie (à coefficients de torsion) est essentiellement identique à la cohomologie classique des espaces analytiques correspondants. Cela permettrait d'une part d'appliquer les résultats obtenus par voie purement algébrique à la cohomologie habituelle des variétés algébriques définies sur $\underline{C}$, et de généraliser par cette voie divers résultats classiques, démontrés généralement par voie transcendante sous des conditions de non singularité, et parfois de simplifier certaines démonstrations (notamment en théorie de Lefschetz). D'autre part, cela permettrait d'appliquer le cas échéant les résultats transcendants à la cohomologie des variétés algébriques en caractéristique p qui "se relèvent" en caractéristique 0 .

En revanche, les phénomènes essentiellement nouveaux, originaux à la caractéristique $p > 0$, et concernant des coefficients de p-torsion (qui devraient jouer un rôle essentiel par exemple dans les théorie du corps de classe local ou global), échappent à peu près totalement au point de vue de la cohomologie étale, adopté dans ces notes. Leur étude demandera sans doute l'utilisation d'une topologie plus fine, probablement de "topologie fppf" dont l'étude n'a été abordée que dans un cas très particulier par SCHATZ [Cohomology of artinian group schemes over local fields, Annals of Math. Vol 79, n°3, May 1964, p.411-449] (*). Cela semble être à l'heure actuelle l'extension la plus urgente à apporter à la théorie cohomologique étale (**). Signalons également le problème d'étendre aux schémas l'étude des invariants d'homotopie tels les π_i (tant du point de vue de la topologie étale que de la topologie fppf) ; il est permis d'espérer que des théorèmes du type d'Hurewicz qui restent à formuler, joints à notre assez bonne connaissance de la cohomologie et du groupe fondamental, permettront d'obtenir des résultats dans cette voie (***).

2. En plus de l'influence, évidente, des idées de WEIL, signalons aussi les liens de ce séminaire avec diverses recherches antérieures qui ont influencé l'un ou l'autre de nous :

a) La théorie de J. TATE de la dimension cohomologique des corps [CG], d'ailleurs motivée par le point de vue de la cohomologie

---

(*) Cf. aussi A. GROTHENDIECK, le groupe de Brauer III § 11, in <u>Dix exposés sur la cohomologie des schémas</u> (North Holland Pub. Cie).

(**) Depuis la rédaction de ces lignes, il est apparu que la topologie fppf ne satisfait pas à toutes les propriétés espérées, et "l'extension la plus urgente" serait plutôt dans le développement de la "cohomologie cristalline", initiée dans A. GROTHENDIECK, Crystals and the De Rham cohomology of schemes, inspirée par les travaux de MONSKY-WASHNITZER et de MANIN.

(***) Cf. note (*) de la page suivante.

étale, a été à son tour un outil et un modèle pour la théorie de la dimension cohomologique des schémas.

b) Les travaux de IGUSA sur les "vanishing cycles" (dont il ne sera question que dans un séminaire ultérieur (**), et la démonstration par Igusa de l'inégalité de Picard $\rho \leq b_2$, en toute caractéristique, que nous obtenons ici de façon assez formelle (en même temps que le théorème de finitude de Néron-Sévéri), une fois en possession d'une théorie cohomologique explicite (***).

c) Les résultats de OGG et CHAFAREVITCH sur la cohomologie des corps de fonction d'une variable à coefficient dans des variétés abéliennes. Ces auteurs obtiennent en particulier un équivalent du théorème de dualité pour les courbes algébriques, en même temps qu'une formule de caractéristique d'Euler-Poincaré. (Pour un exposé en termes de cohomologie étale, cf. M. RAYNAUD, Sém. Bourbaki, décembre 1964 (****).

(*) Le problème de l'étude du "type d'homotopie étale" signalé plus haut a été résolu en principe, depuis la rédaction de cette introduction, par les travaux récents de MM. Michael ARTIN et Barry MAZUR (voir leur séminaire 1966 à ce sujet, publié dans M. ARTIN et B. MAZUR, Etale homotopy, Lecture Notes n°100, Springer (1969)).

(**) Cf. SGA 7 III, IX ...

(***) Cf. SGA 6 XIII 5.2, 5.3.

(****) Reproduit dans la collection citée en note à la page (ix).

3. Les exposés I à VI reprennent la théorie des faisceaux du point de vue des sites, ou mieux, des topos, en complétant le séminaire ARTIN 1962 (Harvard) sur de nombreux points. La présentation, et les résultats non contenus dans ARTIN, sont dûs pour l'essentiel à J. GIRAUD et J.L. VERDIER.

Les exposés VII et VIII développent les premières définitions et propriétés relatives à la topologie étale et la cohomologie étale.

Les exposés IX, X donnent les premiers résultats quantitatifs élémentaires relatifs aux coefficients de torsion, concernant en particulier la cohomologie des courbes algébriques, la dimension cohomologique, la notion de faisceau constructible.

Les résultats des exposés XII à XVI ([2]) sont centrés autour des deux "théorèmes de changement de base", qui techniquement constituent le résultat central de ce séminaire. La clef pour l'un et l'autre de ces théorèmes se trouve dans certaines propriétés du groupe fondamental, qui dans notre contexte s'énoncent le plus naturellement en termes de 1-cohomologie à coefficients dans des faisceaux de groupes non nécessairement commutatifs. Aussi, dans l'énoncé des résultats cohomologiques principaux, avons-nous systématiquement pris en considération également la cohomologie non commutative, ce qui permettrait de retrouver, sous une forme parfois plus générale et plus commode du point de vue technique, les principaux résultats sur le groupe fondamental de SGA 1961 (*).

([2]) obtenus entre Septembre 1962 et Mars 1963 par M. ARTIN et A. GROTHENDIECK

(*) Cf. l'exposé de Mme M. RAYNAUD, dans SGA 1 XIII.

Les exposés XVII et XVIII ([3]) présentent la théorie de la cohomologie "à supports compacts" et le <u>théorème de dualité globale</u>, qui impliquent la <u>dualité de Poincaré</u> pour les vairétés algébriques non singulières.

Enfin l'exposé XIX présente certains résultats locaux ([4]) centrés sur le "<u>théorème de pureté cohomologique</u>", dont la plupart utilisent la résolution des singularités, et jusqu'à nouvel ordre ne sont donc applicables qu'en caractéristique nulle.

4. Nous utiliserons couramment les résultats de EGA I à IV, et de SGA 1 et SGA 2.

([3]) obtenus en Février-Mars 1963 par A. GROTHENDIECK, en même temps que le "théorème de dualité locale" qui sera exposé dans SGA 5 .
([4]) obtenu par ARTIN en 1964.

SOMMAIRE

EXPOSE I : "PREFAISCEAUX", par A. Grothendieck et J.L. Verdier

EXPOSE II : "TOPOLOGIES ET FAISCEAUX", par J.L. Verdier

EXPOSE III : "FONCTORIALITE DES CATEGORIES DE FAISCEAUX", par J.L. Verdier

EXPOSE IV : "TOPOS", par A. Grothendieck et J.L. Verdier

S G A 4

E X P O S E I

PREFAISCEAUX

par A. Grothendieck et J.L. Verdier

(avec un appendice de N. Bourbaki)

Dans les numéros 0 à 5 de cet exposé, on présente les propriétés élémentaires, et le plus souvent bien connues, des catégories de préfaisceaux (*). Ces propriétés sont utilisées constamment dans la suite du séminaire et leur connaissance est essentielle pour la compréhension des exposés suivants. Les démonstrations sont immédiates ; elles sont le plus souvent omises. Dans les numéros 6 à 9 sont abordés quelques thèmes utilisés à différentes reprises dans la suite. Le lecteur pressé pourra les omettre en première lecture. Le numéro 10 fixe la terminologie employée. L'appendice 11 est dû à N. Bourbaki.

0. Univers

Un univers est un ensemble non-vide $\underline{U}$ qui jouit des propriétés suivantes :

($\underline{U}$ 1) Si $x \in \underline{U}$ et si $y \in x$ alors $y \in \underline{U}$.

($\underline{U}$ 2) Si $x, y \in \underline{U}$, alors $\{x,y\} \in \underline{U}$.

($\underline{U}$ 3) Si $x \in \underline{U}$, alors $\mathfrak{P}(x) \in \underline{U}$.

($\underline{U}$ 4) Si $(x_i, i \in I \in \underline{U})$ est une famille d'éléments de $\underline{U}$, alors $\bigcup_{i\in I} x_i \in \underline{U}$.

(*) Le lecteur pourra aussi consulter SGA 3 I §§ 1 à 3.

Des axiomes précédents on déduit facilement les propriétés :

- Si $x \in \underline{U}$, l'ensemble $\{x\}$ appartient à $\underline{U}$.
- Si x est un sous-ensemble de $y \in \underline{U}$, alors $x \in \underline{U}$.
- Si $x,y \in \underline{U}$, le couple $(x,y) = \{\{x,y\}, x\}$ (définition de Kuratowski) est un élément de $\underline{U}$.
- Si $x,y \in \underline{U}$, la réunion $x \cup y$ et le produit $x \times y$ sont des éléments de $\underline{U}$.
- Si $(x_i, i \in I \in \underline{U})$ est une famille d'éléments de $\underline{U}$, le produit $\prod_{i \in I} x_i$ est un élément de $\underline{U}$.
- Si $x \in \underline{U}$, alors $\mathrm{card}(x) < \mathrm{card}(\underline{U})$ (strictement). En particulier la relation $\underline{U} \in \underline{U}$ n'est pas vérifiée.

On peut donc faire toutes les opérations usuelles de la théorie des ensembles à partir des éléments d'un univers sans, pour cela, que le résultat final cesse d'être un élément de l'univers.

La notion d'univers a pour premier interêt de fournir une définition des catégories usuelles : la catégorie des ensembles appartenant à l'univers $\underline{U}$ ($\underline{U}$-Ens), la catégorie des espaces topologiques appartenant à l'univers $\underline{U}$, la catégorie des groupes commutatifs appartenant à l'univers $\underline{U}$ ($\underline{U}$-Ab), la catégorie des catégories appartenant à l'univers $\underline{U}$ ... .

Cependant le seul univers connu est l'ensemble des symboles du type $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset\}\}$ etc. (tous les éléments de cet univers sont des ensembles finis et cet univers est dénombrable). En particulier, on ne connaît pas d'univers qui contienne un élément de cardinal infini. On est donc amené à ajouter aux axiomes de la théorie des ensembles l'axiome :

($\underline{U}$A) <u>Pour tout ensemble</u> x <u>il existe un univers</u> $\underline{U}$ <u>tel que</u> $x \in \underline{U}$.

L'intersection d'une famille d'univers étant un univers, on en déduit immédiatement que tout ensemble est élément d'un plus petit univers. On peut montrer que l'axiome ($\underline{U}$A) est indépendant des axiomes de la théorie des ensembles.

On ajoutera aussi l'axiome :

($\underline{U}$B) Soit $R\{x\}$ une relation et $\underline{U}$ un univers. S'il existe un élément $y \in \underline{U}$ tel que $R\{y\}$, alors $\tau_x R\{x\} \in \underline{U}$.

La non-contradiction des axiomes ($\underline{U}$A) et ($\underline{U}$B) par rapport aux autres axiomes de la théorie des ensembles n'est pas démontrée ni démon trable, semble-t-il.

Soit $\underline{U}$ un univers et $c(\underline{U})$ la borne supérieure des cardinaux des éléments de $\underline{U}$ ($c(\underline{U}) \leq \mathrm{card}(\underline{U})$). Le cardinal $c(\underline{U})$ jouit des propriétés suivantes :

(FI) Si $a < c(\underline{U})$, alors $2^a < c(\underline{U})$.

(FII) Si $(a_i, i \in I)$ est une famille de cardinaux strictement inférieurs à $c(\underline{U})$ et si card(I) est strictement inférieur à $c(\underline{U})$, $\sum_{i \in I} a_i < c(\underline{U})$.

Les cardinaux qui possèdent les propriétés (FI) et (FII) sont appelés cardinaux fortement inaccessibles.

Le cardinal 0 et le cardinal infini dénombrable sont fortement inacessibles

L'axiome ($\underline{U}$A) implique :

($\underline{U}$A') Tout cardinal est majoré strictement par un cardinal fortement inaccessible.

On peut montrer (11) que réciproquement la non contradiction de (UA') implique la non contradiction de (UA), et que la non contradiction de ces axiomes entraîne celle de l'axiome ($\underline{U}$B).

Appelons ensemble artinien tout ensemble E tel qu'il n'existe pas de familles infinies (x_n, $n \in N$) telle que $x_o \in E$, $x_{n+1} \in x_n$. On peut alors montrer [loc. cit.] qu'il y a une correspondance biunivoque entre les cardinaux fortement inaccessibles et les univers artiniens, définie ainsi : à tout cardinal fortement inaccessible c on fait correspondre l'unique univers artinien U_c tel que

$$\mathrm{card}(\underline{U}_c) = c \quad .$$

Soient $c < c'$ deux cardinaux fortement inaccessibles. On a :

$$\underline{U}_c \in \underline{U}'_{c'} \quad .$$

En particulier les univers artiniens de cardinaux inférieurs à un cardinal donné forment un ensemble bien ordonné (pour la relation d'appartenance). L'axiome ($\underline{U}$A') est équivalent à l'axiome :

($\underline{U}$A"). Tout ensemble artinien est élément d'un univers artinien.

Remarquons que tous les ensembles usuels ($\underline{Z}$, $\underline{Q}$, ...) sont des ensembles artiniens.

1. U-catégories. Préfaisceaux d'ensembles

1.0. Dans la suite du séminaire et sauf mention expresse du contraire, les univers considérés posséderont un élément de cardinal infini. Soit $\underline{U}$ un univers. On dit qu'un ensemble est $\underline{U}$-petit (ou, quand aucune confusion n'en résulte, petit) s'il est isomorphe à un élément de $\underline{U}$. On utilise aussi la terminologie : petit groupe, petit anneau, petite catégorie... On supposera souvent, sans mention explicite, que les schémas, espaces topologiques, ensembles d'indices... avec lesquels on travaille sont $\in \underline{U}$, où tout au moins ont un cardinal $\in \underline{U}$; cependant, de nombreuses catégories avec lesquelles on travaillera ne seront pas $\in \underline{U}$.

Définition 1.1. Soient $\underline{U}$ un univers et C une catégorie. On dit que C est une $\underline{U}$-catégorie si pour tout couple (x,y) d'objets de C, l'ensemble $\mathrm{Hom}_C(x,y)$ est $\underline{U}$-petit.

1.1.1. Soient C et D deux catégories et Fonct(C,D) la catégorie des foncteurs de C dans D. On vérifie immédiatement les assertions suivantes :

a) Si C et D sont éléments d'un univers $\underline{U}$ (resp. $\underline{U}$-petites) la catégorie Fonct(C,D) est un élément de $\underline{U}$ (resp. est $\underline{U}$-petite).

b) Si C est $\underline{U}$-petite et si D est une $\underline{U}$-catégorie, Fonct(C,D) est une $\underline{U}$-catégorie.

Remarque 1.1.2. Soit D une catégorie possédant les propriétés suivantes :

(C1) L'ensemble ob(D) est contenu dans l'univers $\underline{U}$.

(C2) Pour tout couple (x,y) d'objets de D, l'ensemble $\mathrm{Hom}_D(x,y)$ est un élément de $\underline{U}$.

(Les catégories usuelles construites à partir d'un univers $\underline{U}$ possédent ces deux propriétés : $\underline{U}$-Ens, $\underline{U}$-Ab, ...). Soit C une catégorie appartenant à $\underline{U}$. Alors la catégorie Fonct(C,D) ne possède pas en général les propriétés (C1) et (C2). Par exemple la catégorie Fonct(C,$\underline{U}$-Ens) ne possède aucune des propriétés (C1) et (C2). C'est ce qui justifie la définition adoptée de $\underline{U}$-catégorie, de préférence à la notion plus restrictive par les conditions (C1) et (C2) ci-dessus.

<u>Définition</u> 1.2. <u>Soit</u> C <u>une catégorie</u>. <u>On appelle</u> catégorie des préfaisceau d'ensembles sur C relative à l'univers $\underline{U}$ (<u>ou</u>, <u>lorsqu'aucune confusion n'en résulte</u>, <u>catégorie des</u> préfaisceaux sur C) <u>la catégorie des foncteurs contravariants sur</u> C <u>à valeur dans la catégorie des</u> $\underline{U}$<u>-ensembles</u>.

On désigne par $C^{\wedge}_{\underline{U}}$ (ou plus simplement, lorsqu'aucune confusion n'en résulte, par $C^{\wedge}$) la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur C relative à l'univers $\underline{U}$. Les objets de $C^{\wedge}_{\underline{U}}$ sont appelés $\underline{U}$-préfaisceaux (ou plus simplement préfaisceaux) sur C. Lorsque C est $\underline{U}$-petite, la catégorie $C^{\wedge}_{\underline{U}}$ est une $\underline{U}$-catégorie. Lorsque C est une $\underline{U}$-catégorie, $C^{\wedge}_{\underline{U}}$ n'est pas nécessairement une $\underline{U}$-catégorie.

<u>Construction-définition</u> 1.3. Soit x un objet d'une $\underline{U}$-catégorie C. On appel] $\underline{U}$<u>-foncteur représenté par</u> x le foncteur $h_{\underline{U}}(x) : C^{\circ} \longrightarrow \underline{U}\text{-Ens}$ dont la construction suit (*). Soit y un objet de C.

a) Si $\mathrm{Hom}_C(y,x)$ est un élément de $\underline{U}$, alors :

$$h_{\underline{U}}(x)(y) = \mathrm{Hom}_C(y,x)$$

b) Supposons que $\mathrm{Hom}_C(y,x)$ ne soit pas un élément de $\underline{U}$ et soit $R(Z,x,y)$ la relation : "L'ensemble Z est but d'un isomorphisme $\mathrm{Hom}_C(y,x) \xrightarrow{\sim} Z$".
On pose alors :

$$h_{\underline{U}}(x)(y) = \tau_Z R(Z) \quad .$$

(En vertu de l'axiome ($\underline{UB}$), $h_{\underline{U}}(x)(y)$ est un élément de $\underline{U}$). Soit $R'(u,x,y)$ la relation : "u est une bijection

$$u : \mathrm{Hom}_C(y,x) \xrightarrow{\sim} h_{\underline{U}}(x)(y) \text{ "} \quad .$$

(*) C° désignera toujours la catégorie opposée à C.

On pose alors :

$$\varphi(y,x) = \tau_u R'(u) \quad .$$

On remarquera qu'on a, dans les cas (a) et (b), un isomorphisme canonique :

$$\varphi(y,x) : \mathrm{Hom}_C(y,x) \xrightarrow{\sim} h_{\underline{U}}(x)(y) \quad .$$

(Dans le cas a) $\varphi(y,x)$ est l'identité). Soit alors $u : y \longrightarrow y'$ une flèche de C. Le morphisme u définit, par la composition des morphismes, une application :

$$\mathrm{Hom}_C(u,x) : \mathrm{Hom}_C(y',x) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(y,x) \quad .$$

On pose alors

$$h_{\underline{U}}(x)(u) = \varphi(y\ ,\ x)\ \mathrm{Hom}_C(x,u)\ \ \varphi(y\ ,\ x)^{-1} \quad .$$

On vérifie immédiatement que $h_{\underline{U}}(x)$, ainsi défini, est un foncteur $C^{\circ} \longrightarrow \underline{U}\text{-Ens}$.

1.3.1. De même, on définit, à l'aide des isomorphismes φ , pour tout morphisme $y : x \longrightarrow x'$ un morphisme de foncteurs :

$$h_{\underline{U}}(y) \ :\ h_{\underline{U}}(x) \longrightarrow h_{\underline{U}}(x')$$

et on vérifie immédiatement qu'on a définit ainsi un foncteur

$$h_{\underline{U}} \ :\ C \longrightarrow C^{\wedge}_{\underline{U}} \quad .$$

1.3.2. Soit maintenant $\underline{V}$ un univers tel que $\underline{U} \subset \underline{V}$. On a alors un foncteur canonique pleinement fidèle :

$$\underline{U}\text{-Ens} \hookrightarrow \underline{V}\text{-Ens}$$

d'où un foncteur pleinement fidèle :

$$C^{\wedge}_{\underline{U}} \hookrightarrow C^{\wedge}_{\underline{V}}$$

et le diagramme :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h_{\underline{U}}"] \arrow[dr, "h_{\underline{V}}"'] & C^{\wedge}_{\underline{U}} \arrow[d, hook] \\ & C^{\wedge}_{\underline{V}} \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme canonique près. Lorsque C est un élément de $\underline{U}$, cet isomorphisme canonique est l'identité.

1.3.3. *Dans la pratique, l'univers* $\underline{U}$ *est fixé une fois pour toutes et n'est pas mentionné*. On utilise alors les notations $C^{\wedge}$ (pour la catégorie des $\underline{U}$-préfaisceaux d'ensembles) et

$$h : C \longrightarrow C^{\wedge} \quad .$$

Pour tout objet x de C, le préfaisceau h(x) est appelé le *préfaisceau représenté par* x et nous identifierons toujours la valeur en $y \in ob(C)$ du préfaisceau h(x) avec $Hom_C(y,x)$.

Proposition 1.4. *Soient* C *une* $\underline{U}$-*catégorie*, F *un préfaisceau sur* C *et* X *un objet de* C. *Il existe un isomorphisme fonctoriel en* X *et en* F :

$$i \ : \ Hom_{C^{\wedge}}(h(X),F) \xleftarrow{\sim} F(X) \quad ,$$

l'application i *n'étant autre*, *lorsque* F *est de la forme* h(Y), *que l'application* :

$$h \ : \ Hom(h(X),h(Y)) \longleftarrow Hom(X,Y) \quad .$$

En particulier le foncteur h *est pleinement fidèle*.

1.4.1. Cette proposition justifie les abus de langage habituels identifiant un objet de C et le foncteur contravariant correspondant. Un préfaisceau isomorphe à un objet image par h (ou, en utilisant l'abus de langage signalé ci-dessus, isomorphe à un objet de C) est appelé préfaisceau représentable.

1.4.2. Soit $\underline{V}$ un univers contenant un univers $\underline{U}$. La catégorie des $\underline{U}$-préfaisceaux est une sous-catégorie pleine de la catégorie des $\underline{V}$-préfaisceaux et par suite un $\underline{U}$-préfaisceau est représentable si et seulement si son image dans la catégorie des $\underline{V}$-préfaisceaux est un $\underline{V}$-préfaisceau représentable.

2. Limites projectives et inductives

Soient C une $\underline{U}$-catégorie et I une petite catégorie. Notons Fonct(I,C) la catégorie des foncteurs de I dans C. La catégorie Fonct (I,C) est une $\underline{U}$-catégorie. A tout objet X de C associons la sous-catégorie $\underline{X}$ de C ayant pour seul objet l'objet X et pour seule flèche l'identité de X. Désignons par $i_X : \underline{X} \longrightarrow C$ le foncteur d'inclusion. Il existe un et un seul foncteur $e_X : I \longrightarrow \underline{X}$, et nous désignerons par $k_X : I \longrightarrow C$ le foncteur $i_X \circ e_X$. (On dira que k_X est le foncteur constant de valeur X). La correspondance $X \longmapsto k_X$ est visiblement fonctorielle en X, ce qui nous permet de définir, pour tout foncteur $G : I \longrightarrow C$, le préfaisceau $X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fonct}(I,C)}(k_X, G)$.

Définition 2.1. *On appelle* limite projective *de* G *et on note* $\varprojlim\limits_{I} G$ *le préfaisceau* :

$$X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fonct}(I,C)}(k_X, G) \quad .$$

Lorsque le préfaisceau $\varprojlim\limits_{I} G$ *est représentable, on désigne encore par* $\varprojlim\limits_{I} G$

un objet de C qui le représente. L'objet $\varprojlim_{I}$ G n'est donc défini qu'à isomorphisme près. Lorsqu'aucune confusion n'en résulte on emploie la notation abrégée $\varprojlim$ G.

Pour G variable, $\varprojlim$ G est un foncteur de la catégorie Fonct(I,C) à valeurs dans C^.

2.1.1. On définit de même par symétrie (renversement du sens des flèches dans C) la limite inductive d'un foncteur : c'est un foncteur covariant sur C à valeur dans la catégorie des U-ensembles. Nous emploierons les notations $\varinjlim_{I}$ G ou bien $\varinjlim$ G.

On notera que les produits, produits fibrés, noyaux sont des limites projectives. De même les sommes, sommes amalgamées, conoyaux sont des limites inductives.

Définition 2.2. Soient I et C deux catégories et G : I $\longrightarrow$ C un foncteur. On dit que la limite projective de G est représentable s'il existe un univers U tel que :

1) La catégorie I soit U-petite.

2) La catégorie C soit une U-catégorie.

3) Le préfaisceau $\varprojlim$ G à valeurs dans la catégorie des U-ensembles soit représentable.

Il résulte au n° 1 que l'objet $\varprojlim$ G représentant le préfaisceau $\varprojlim$ G ne dépend pas, à isomorphisme près, de l'univers U. Notons aussi qu'il existe un plus petit univers U' possédant les propriétés (1) et (2), et que le préfaisceau $\varprojlim$ G est nécessairement à valeurs dans la catégorie des U'-ensembles.

2.2.1. Soient I et C deux catégories. On dit que *les I-limites projectives dans* C *sont représentables* si pour tout foncteur $G : I \longrightarrow C$, la limite projective de G est représentable. Enfin soient C une catégorie et $\underline{U}$ un univers. On dit que les *$\underline{U}$-limites projectives dans* C *sont représentables* si pour toute catégorie I $\underline{U}$-petite et pour tout foncteur $G : I \longrightarrow C$, la limite projective de G est représentable.

Proposition 2.3. *Soient* C *une catégorie et* $\underline{U}$ *un univers non vide*. *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

i) *Les* $\underline{U}$*-limites projectives dans* C *sont représentables*.

ii) *Les produits*, *indexés par un petit ensemble sont représentables*, *et les noyaux de couples de flèches sont représentables*.

iii) *Les produits*, *indexés par un petit ensemble sont représentables*, *et les produits fibrés sont représentables*.

Preuve. Il suffit de remarquer qu'il existe un isomorphisme fonctoriel en G $\varprojlim G = \mathrm{Ker}\,\Big(\prod_{i\in \mathrm{ob}(I)} G(i) \rightrightarrows \prod_{u\in \mathrm{Fl}(I)} G(\mathrm{but}(u))\Big)$, le couple de flèches étant défini par les morphismes

$$\prod_{i\in \mathrm{ob}(I)} G(i) \xrightarrow{\ pr_{\mathrm{but}(u)}\ } G\,(\mathrm{but}(u))$$

$$\prod_{i\in \mathrm{ob}(I)} G(i) \xrightarrow{\ pr_{\mathrm{source}(u)}\ } G\,(\mathrm{source}\,(u)) \xrightarrow{\ G(u)\ } G(\mathrm{but}(u)) \ .$$

De plus, il est clair que $\mathrm{Ker}\,(X \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} Y) = X \prod_{X\times Y} X$, les deux morphismes de X dans $X\times Y$ étant $\mathrm{id}_X \times u$ et $\mathrm{id}_X \times v$.

2.3.1. Il existe évidemment des définitions et assertions analogues pour les limites inductives que nous n'expliciterons pas. De même pour les limites projectives et inductives finies (i.e. relatives à une catégorie I finie).

Corollaire 2.3.2. Désignons par $\underline{U}$-Ens la catégorie des $\underline{U}$-ensembles et par $\underline{U}$-Ab la catégorie des objets groupes abéliens de $\underline{U}$-Ens. Les $\underline{U}$-limites projectives et inductives dans $\underline{U}$-Ens et dans $\underline{U}$-Ab sont représentables.

Proposition 2.3.3. Soient I une petite catégorie, $F : I \longrightarrow \underline{U}$-Ens un foncteur et $G \in \mathrm{ob}\, I$ un petit ensemble d'objets de I tel que pour tout objet X de I il existe un objet $Y \in G$ et un morphisme $Y \longrightarrow X$ (resp. $X \longrightarrow Y$). Alors $\varprojlim\limits_{I} F$ (resp. $\varinjlim\limits_{I} F$) est représentable et on a $\mathrm{card}(\varprojlim\limits_{I} F) \leq \prod\limits_{Y \in G} \mathrm{card}(F(Y))$ (resp. $\mathrm{card}(\varinjlim\limits_{I} F) \leq \sum\limits_{Y \in G} \mathrm{card}(F(Y))$).

Preuve. On vérifie immédiatement que $\varprojlim\limits_{I} F'$ (resp. $\varinjlim\limits_{I} F'$) est isomorphe à un sous-objet (resp. un quotient de $\prod\limits_{Y \in G} F(Y)$ (resp. $\coprod\limits_{Y \in G} F(Y)$) ; d'où la proposition.

Définition 2.4.1. Soient C une catégorie où les limites projectives (resp. inductives) finies soient représentables et $u : C \longrightarrow C'$ un foncteur. On dit que u est exact à gauche (resp. à droite) s'il "commute" aux limites projectives (resp. inductives) finies. Un foncteur exact à gauche et à droite est appelé un foncteur exact.

2.4.2. Il résulte de 2.3 que, pour qu'un foncteur soit exact, il faut et il suffit qu'il transforme l'objet final (= produit vide) en l'objet final, le produit de deux objets en le produit des deux objets images, et le noyaux des couples de deux flèches en le noyau des couples images où encore qu'il transforme l'objet final en l'objet final et les produits fibrés en produits fibrés. (On suppose que dans C les $\varprojlim$ finies sont représentables.

2.5.0. Soient I,J et C trois catégories, $G : I \times J \longrightarrow C$ un foncteur (i.e. un foncteur de I à valeur dans la catégorie des foncteurs de J dans C). Supposons que les limites projectives des foncteurs

$$\begin{aligned} G_i : J &\longrightarrow C \qquad\qquad i \in \mathrm{ob}\,(I) \\ j &\longmapsto G(i \times j) \end{aligned}$$

soient représentables, et que le foncteur :

$$i \longmapsto \varprojlim G_i$$

admette une limite projective représentable. Il est clair qu'alors le foncteur G admet une limite projective représentable et qu'on a un isomorphisme canonique :

$$\varprojlim_{I \times J} G \xrightarrow{\ \sim\ } \varprojlim_{I} \ \varprojlim_{J} G_i \quad ,$$

et que par suite on a un isomorphisme canonique

$$\varprojlim_{I} \ \varprojlim_{J} G_i \xrightarrow{\ \sim\ } \varprojlim_{J} \ \varprojlim_{I} G_j \quad .$$

Nous dirons par la suite plus brièvement que les limites projectives commutent aux limites projectives. On voit de même que les limites inductives commutent aux limites inductives. Mais il n'est pas vrai en général que les limites inductives commutent aux limites projectives.

Définition 2.5. Soient C une catégorie à produits fibrés représentables, I une catégorie, $G : I \longrightarrow C$ un foncteur, $g : G \longrightarrow X$ un morphisme de G dans un objet de C (i.e. un morphisme de G dans le foncteur constant associé à X), $m : Y \longrightarrow X$ un morphisme de C.

Soit $G \times_X Y : I \longrightarrow C$ le foncteur

$$i \longmapsto G(i) \times_X Y \quad .$$

On dit que la limite inductive de G est universelle si pour tout objet X, tout morphisme $g : G \longrightarrow X$, tout morphisme $m : Y \longrightarrow X$,

a) la limite inductive du foncteur $G \times_X Y$ est représentable,

b) le morphisme canonique $\varinjlim (G \times_X Y) \longrightarrow (\varinjlim G) \times_X Y$ est un isomorphisme.

Proposition 2.6. Soit $\underline{U}$ un univers. Les limites inductives dans $\underline{U}$-Ens qui sont représentables (en particulier, les $\underline{U}$-limites inductives (2.2.1) dans $\underline{U}$-Ens) sont universelles.

Nous utiliserons aussi un autre résultat de commutation entre limites projectives et inductives que nous allons présenter maintenant.

Définition 2.7. Une catégorie I est pseudo-filtrante lorsqu'elle possède les propriétés suivantes :

PS 1) Tout diagramme de la forme :

$$\begin{tikzcd} & j \\ i \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & j' \end{tikzcd}$$

peut être inséré dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & j \arrow[dr] & \\ i \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \\ & j' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

PS 2) Tout diagramme de la forme :

$$i \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} j$$

peut être inséré dans un diagramme :

$$i \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} j \xrightarrow{w} k$$

tel que

$$w \circ u = w \circ v \quad .$$

Une catégorie I est dite filtrante si elle est pseudo-filtrante, non vide et connexe, i.e. si deux objets quelconques de I peuvent être reliés par une suite de flèches (on n'impose aucune condition sur le sens des flèches) ; cela signifie aussi, en présence de PS 2, que $I \neq \emptyset$ et que pour deux objets a,b de I, il existe toujours un objet c de I et des flèches a c et b c. On dit aussi qu'une catégorie I est cofiltrante si I° est filtrante.

Exemple 2.7.1. Si dans I les sommes amalgamées (resp. les sommes de deux objets) et les conoyaux de doubles flèches sont représentables, alors I est pseudo-filtrante (resp. filtrante).

Proposition 2.8. Soit $\underline{U}$ un univers. Les $\underline{U}$-limites inductives filtrantes dans $\underline{U}$-Ens commutent aux limites projectives finies.

On se ramène immédiatement à démontrer que les $\underline{U}$-limites filtrantes commutent aux produits fibrés. La démonstration est laissée au lecteur. On pourra utiliser la description de la limite donnée par le

Lemme 2.8.1. Soient I une petite catégorie filtrante, $i \longmapsto X_i$ un foncteur de I dans $\underline{U}$-Ens. Sur l'ensemble somme $\coprod_{i \in \mathrm{ob}\, I} X_i$, soit R la relation :

(R) Deux éléments $x_i \in X_i$ et $x_j \in X_j$ sont reliés s'il existe un objet $k \in \mathrm{ob}\, I$ et deux morphismes $u: i \longrightarrow k$ et $v : j \longrightarrow k$ tels que les images dans X_k de x_i et de x_j par les applications de transition u et v respectivement soient égales.

Alors :

1) R est une relation d'équivalence.

2) Le quotient $\coprod_{i \in \mathrm{ob}\, I} X_i/R$ est canoniquement isomorphe à $\varinjlim_{I} X_i$.

3) Deux éléments $x_i \in X_i$ et $x_j \in X_j$ sont respectivement équivalents suivant R à deux éléments d'un même X_k.

4) Pour tout $i \in \mathrm{ob}\, I$, deux éléments α et β de X_i sont équivalents suivant R si et seulement s'il existe un morphisme $u : i \longrightarrow j$ tel que $u(\alpha) = u(\beta)$.

L'assertion 1) résulte de (PS 1) (2.7). Pour démontrer 2), on vérifie que $\coprod_{i \in \mathrm{ob}\, I} X_i/R$ possède la propriété universelle de la limite inductive (on n'utilise que (PS 1)). L'assertion 3) résulte du fait que I est connexe. L'assertion 4) résulte de (PS 2).

Corollaire 2.9. Soit γ une espèce de structure algébrique "définie par limites projectives finies". (Le lecteur est prié de donner un sens mathématique à la phrase précédente. Notons seulement que les structures de groupes, groupes abéliens, anneaux, modules, etc... sont de telles structures). Désignons par $\underline{U}$-γ la catégorie des γ-objets de $\underline{U}$-Ens. Le foncteur qui à chaque objet de $\underline{U}$-γ associe l'ensemble sous-jacent, commute aux $\underline{U}$-limites filtrantes. Par suite les $\underline{U}$-limites filtrantes dans $\underline{U}$-γ commutent aux limites projectives finies.

Corollaire 2.10. Les $\underline{U}$-limites pseudo-filtrantes dans $\underline{U}$-Ab commutent aux limites projectives finies.

(On se ramène aux limites filtrantes en décomposant la catégorie d'indices en composantes connexes).

Notons maintenant un résultat que nous utiliserons constamment : Soient C et C' deux $\underline{U}$-catégories, u et v deux foncteurs $C \underset{u}{\overset{v}{\rightleftarrows}} C'$, u adjoint à gauche de v. Rappelons que ceci veut dire qu'il existe un isomorphisme entre les bifoncteurs à valeur dans $\underline{U}$-Ens :

$$\mathrm{Hom}_{C'}(u(X),X') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_C(X,v(X')) \quad .$$

Proposition 2.11. Le foncteur u commute aux limites inductives représentables ; le foncteur v commute aux limites projectives représentables.

Cette assertion signifie que pour toute catégorie I et tout foncteur $G : I \longrightarrow C'$ tel que la limite projective de G soit représentable, le foncteur $v_\circ G$ admet une limite projective représentable et que l'on a un isomorphisme canonique :

$$v\,(\varprojlim G) \longrightarrow \varprojlim\,(v\circ G) \quad .$$

Le lecteur explicitera de lui-même l'assertion coucernant le foncteur u.

Signalons enfin un calcul de limites projectives dans le cas où la catégorie d'indices admet des produits.

Proposition 2.12. Soient I et C deux catégories, V un univers. On suppose que les V-limites projectives dans C sont représentables et qu'il existe dans I une famille d'objets $(i_\alpha)_{\alpha\in A}$, où A est un élément de V, telle que :
1) les produits $i_\alpha \times i_\beta$ soient représentables pour tout couple $(\alpha,\beta)\in A\times A$,
2) tout objet de I s'envoie dans un au moins des i_α.
Alors pour tout contra foncteur F de I dans C

$$F : I^\circ \longrightarrow C,$$

la limite projective de F existe et il existe un isomorphisme fonctoriel en F :

$$\varprojlim F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\,\Big(\prod_{\alpha\in A} F(i_\alpha) \rightrightarrows \prod_{(\alpha,\beta)\in A\times A} F(i_\alpha \times i_\beta)\Big) \quad ,$$

les deux flèches étant définies par les projections des produits $i_\alpha \times i_\beta$ sur les facteurs.

3. Propriétés d'exactitude de la catégorie des préfaisceaux

Soient C une U-catégorie, $C^\frown$ la catégorie des préfaisceaux sur C. Les propriétés d'exactitude de $C^\frown$ se déduisent toutes de la proposition suivante :

Proposition 3.1. Les U-limites projectives et inductives dans $C^\frown$ sont représentables. Pour tout objet X de C, le foncteur sur $C^\frown$:

$$F \longmapsto F(X) \qquad\qquad F \in C^\frown$$

commute aux limites inductives et projectives.

En d'autres termes, "les limites inductives et projectives dans $C^\frown$ se calculent argument par argument". Citons quelques corollaires.

Corollaire 3.2. Soit γ une structure algébrique définie par limites projectives finies. La catégorie des foncteurs contravariants à valeurs dans U-γ est équivalente à la catégorie des γ-objets de $C^\frown$.

Corollaire 3.3. Un morphisme de $C^\frown$ qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme est un isomorphisme. Un morphisme de $C^\frown$ se factorise de manière unique en un épimorphisme suivi d'un monomorphisme. Les limites inductives dans $C^\frown$ qui sont représentables, sont universelles. Les U-limites inductives filtrantes dans $C^\frown$ commutent aux limites projectives finies. Le foncteur canonique $C \longrightarrow C^\frown$ commute aux limites projectives représentables.

Plus généralement on peut dire que la catégorie $C^\wedge$ hérite de toutes les propriétés de la catégorie des $\underline{U}$-ensembles faisant intervenir des limites inductives et projectives.

3.4.0. Soit F un objet de $C^\wedge$. On désigne par C/F la catégorie suivante : Les objets de C/F sont les couples formés d'un objet X de C et d'un morphisme u de X dans F. Soient (X,u) et (Y,v) deux objets. Un morphisme de (X,u) dans (Y,v) est un morphisme g de X dans Y tel que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "u"'] & & Y \arrow[dl, "v"] \\ & F & \end{tikzcd} \quad .$$

Proposition 3.4. *Avec les notations de* (3.4.0), *le foncteur source* $C/F \longrightarrow C^\wedge$ *admet une limite inductive représentable dans* $C^\wedge$. *Le morphisme canonique* :

$$\varinjlim_{C/F} \text{source}\,(.) \longrightarrow F$$

est un isomorphisme.

Corollaire 3.5. *Soient* F *et* H *deux objets de* $C^\wedge$. *Il existe un isomorphisme canonique* :

$$\mathrm{Hom}\,(F,H) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{(X,u)\in \mathrm{ob}\,(C/F)} H(X) \quad .$$

Preuve. Le corollaire se déduit immédiatement de 3.4 et de 1.2.

Proposition 3.6. Soient C une $\underline{U}$-catégorie, $\underline{V}$ un univers contenant $\underline{U}$ et $i : C^{\wedge}_{\underline{U}} \longrightarrow C^{\wedge}_{\underline{V}}$ le foncteur d'injection naturel des catégories de préfaisceaux correspondantes (1.3). Le foncteur i commute aux limites inductives et projectives. De plus, pour tout objet F de $C^{\wedge}_{\underline{U}}$, tout sous-objet de i(F) est isomorphe à l'image par i d'un unique sous-objet de F (de sorte qu'on obtient une bijection de l'ensemble des sous-objets de F avec l'ensemble des sous-objets de i(F)).

4. Cribles

Définition 4.1. Soit C une catégorie. On appelle crible de la catégorie C une sous-catégorie pleine D de C possédant la propriété suivante : tout objet de C tel qu'il existe un morphisme de cet objet dans un objet de D est dans D. Soit X un objet de C ; on appelle (par abus de langage) cribles de X les cribles de la catégorie C/X.

Soit $\underline{U}$ un univers tel que C soit une $\underline{U}$-catégorie. Soit $C^{\wedge}$ la catégorie de préfaisceaux correspondante. A tout crible de X on associe un sous-objet de X dans $C^{\wedge}$ de la manière suivante : A tout objet Y de C, on fait correspondre l'ensemble des morphismes $f : Y \longrightarrow X$ tels que l'objet (Y,f) appartienne au crible.

Proposition 4.2. L'application définie ci-dessus, établit une bijection entre l'ensemble des cribles de X et l'ensemble des sous-objets de X dans $C^{\wedge}$.

Preuve. Montrons seulement qu'elle est l'application inverse. A tout sous-foncteur R de X on associe la catégorie C/R des objets de C au-dessus de R (3.4). On vérifie immédiatement que C/R est un crible de X.

<u>Remarque</u> 4.2.1. On voit de même que les cribles de C sont en correspondance biunivoque canonique avec l'ensemble des sous-foncteurs du "foncteur final" sur C (objet "final" de $C^\wedge$).

4.3. Soit C une <u>U</u>-catégorie. Par abus de langage nous appellerons aussi cribles de X, les sous-objets de X dans la catégorie $C^\wedge$. Cet abus de langage nous permet pour tout préfaisceau F et tout crible R de X de définir $\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R,F)$ comme étant l'ensemble des morphismes du foncteur R dans F. On a d'ailleurs un isomorphisme canonique fonctoriel en F (3.5) :

$$\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R,F) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{C/R} F(.) \quad ,$$

ce qui permet d'en donner une définition directe. De même, la proposition 4.2 nous permet de transposer aux cribles les opérations usuelles sur les foncteurs. Citons :

4.3.1. <u>Changement de base</u>. Soit R un crible de X et $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme d'objets de C. Le produit fibré $R \times_X Y$ est un crible de Y qu'on appelle <u>crible déduit de</u> R <u>par changement de base</u>. La sous-catégorie correspondante de C/Y est l'image inverse de la sous-catégorie de C/X définie par R par le foncteur canonique $C/Y \longrightarrow C/X$ défini par f.

4.3.2. <u>Relation d'ordre</u>, <u>intersection</u>, <u>réunion</u>. La relation d'inclusion sur les sous-foncteurs de X est une relation d'ordre. On peut définir la réunion et l'intersection d'une famille de cribles indexés par un ensemble quelconque comme étant la borne supérieure et la borne inférieure de la famille de sous-préfaisceaux correspondante.

4.3.3. Image, crible engendré. Soient $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de préfaisceaux et pour chaque $\alpha \in A$, un morphisme $f_\alpha : F_\alpha \longrightarrow X$ où X est un objet de C. On appelle image de cette famille de morphismes la réunion des images des f_α . L'image de cette famille est donc un crible de X. En particulier si tous les F_α sont des objets de C, le crible image sera appelé le crible engendré par les morphismes f_α . La catégorie C/R est la sous-catégorie pleine de C/X formée des objets $X' \longrightarrow X$ au-dessus de X tels qu'il existe un X-morphisme de X' dans un des F_α .

Le lecteur pourra, à titre d'exercice, traduire en termes des catégories C/R les relations et opérations définies ici sur les sous-foncteurs. Il constatera alors que ces relations et opérations ne dépendent pas de l'univers $\underline{U}$ tel que C soit une $\underline{U}$-catégorie, et qu'elles sont par suite définies pour toute catégorie, sans que l'on soit obligé de préciser l'univers auquel les ensembles de morphismes appartiennent ; ce qu'on pouvait d'ailleurs prévoir a priori grâce à 3.6.

5. Fonctorialité des catégories de préfaisceaux

5.0. Soient C, C', D trois catégories et $u : C \longrightarrow C'$ un foncteur. On désignera par u^* le foncteur :

$$u^* : \underline{\mathrm{Hom}}(C'^\circ, D) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C^\circ, D)\ , \quad G \longmapsto G \circ u \quad ,$$

obtenu en composant avec le foncteur u. Le foncteur u^* commute aux limites inductives et projectives.

Proposition 5.1. *Supposons que* C *soit petite, et que, dans* D, *les* U-*limites inductives* (*resp. projectives*) *soient représentables. Le foncteur* u^* *admet un adjoint à gauche* $u_!$ (*resp. à droite* u_*). *On a donc un isomorphisme* :

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Hom}}(C^\circ,D)}(F,u^*G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Hom}}(C'^\circ,D)}(u_!F,G)$$

$$(\textit{resp.}\ \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Hom}}(C^\circ,D)}(u^*G,F) \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Hom}}(C'^\circ,D)}(G,u_*F) \quad .$$

Preuve. Nous n'indiquerons que la démonstration de l'existence du foncteur adjoint à gauche. La partie resp. de la proposition s'en déduira alors formellement grâce aux isomorphismes :

$$\underline{\mathrm{Hom}}\ (C^\circ,D) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}\ (C,D^\circ)^\circ \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}\ ((C^\circ)^\circ,D^\circ)^\circ \quad .$$

Soit Y un objet de C'. Désignons par I_u^Y la catégorie suivante : Les objets de I_u^Y sont les couples (X,m) où X est un objet de C et m un morphisme $Y \longrightarrow u(X)$. Soient (X,m) et (X',m') deux objets de I_u^Y . Un morphisme de (X,m) dans (X',m') est un morphisme $\xi : X \longrightarrow X'$ tel que $m'=u(\xi)m$. La composition des morphismes se définit de la manière évidente.

Soit $f : Y \longrightarrow Y'$ un morphisme de C'. Le morphisme f définit par composition un foncteur $I_u^f : I_u^Y \longrightarrow I_u^{Y'}$.

On a de plus un foncteur $pr_Y : I_u^Y \longrightarrow C$ qui, à l'objet (X,m) associe l'objet X. Notons qu'alors le diagramme :

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} I_u^Y \arrow[r] \arrow[dr, "pr_Y"'] & I_u^f \arrow[r] & I_u^{Y'} \arrow[dl, "pr_{Y'}"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Soit maintenant F un préfaisceau sur C et posons :

(5.1.1) $$u_!F(Y) = \varinjlim_{I_u^Y} F\,pr_Y(.)\qquad .$$

La commutativité du diagramme (*) et la fonctorialité de la limite inductive font de $u_!F$ un préfaisceau sur C'. Montrons que le foncteur $u_!$ est un adjoint à gauche du foncteur u^*. Pour cela montrons que pour tout préfaisceau G sur C', il existe un isomorphisme fonctoriel $\mathrm{Hom}(u_!F,G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(F,u^*G)$. Soit $\xi \in \mathrm{Hom}(u_!F,G)$. Pour tout objet X de C, on a donc un morphisme :

$$\xi_X \;:\; u_!(u(X)) \longrightarrow G(u(X))\qquad .$$

Mais $(u(X),\mathrm{id}_{u(X)})$ est un objet de $I_u^{u(X)}$, et par définition de la limite inductive, on a un morphisme canonique :

$$F(X) \longrightarrow u_!F(u(X)).$$

On en déduit pour tout objet X de C un morphisme :

$$\eta_X \;:\; F(X) \longrightarrow G(u(X))$$

qui est visiblement fonctoriel en X. D'où un morphisme

$$\eta : F \longrightarrow u^*G\qquad .$$

Réciproquement, soit $\eta \in \mathrm{Hom}(F,u^*G)$. On en déduit, pour tout objet Y de C, un morphisme de foncteur :

$$\eta_Y \;:\; F pr_Y \longrightarrow (u^*G)pr_Y\qquad ,$$

d'où, en composant avec le morphisme évident du foncteur $(u^*G)pr_Y$ dans le foncteur constant G(Y), un morphisme :

$$\xi_Y \;:\; u_!F(Y) \longrightarrow G(Y)$$

qui est fonctoriel en Y . D'où un morphisme :

$$\xi : u_! F \longrightarrow G \quad .$$

Le lecteur vérifiera que les deux applications ainsi définies sont inverses l'une de l'autre, et achèvera ainsi la démonstration.

Proposition 5.2. *Supposons que dans* D, *les* U*-limites inductives soient représentables, les limites projectives finies soient représentables et que les* U*-limites inductives filtrantes commutent aux limites projectives finies. Supposons de plus que dans* C *les limites projectives finies soient représentables et que le foncteur* u *soit exact à gauche* (2.3.2). *Alors les limites projectives finies sont représentables dans* Hom(C°,D) *et dans* Hom(C'°,D), *et le foncteur* $u_!$ *est exact à gauche*.

Preuve. La première assertion est triviale. Démontrons la seconde. D'après la démonstration de 5.1, pour tout préfaisceau F sur C et tout objet Y de C' on a :

$$u_! F(Y) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{I_u^Y} F\mathrm{pr}_Y \quad .$$

Il suffit donc de montrer que la catégorie $(I_u^Y)^\circ$ vérifie les axiomes (PS 1) et (PS 2) (2.7) et que cette catégorie est connexe. La vérification est laissée au lecteur.

5.3. En particularisant ces résultats au cas où D est la catégorie des U-ensembles, on obtient une suite de trois foncteurs :

$$u_! \ , \quad u^* \ , \quad u_* \qquad ,$$

qui est une "suite de foncteurs adjoints" dans le sens que pour deux foncteurs consécutifs de la suite celui de droite est adjoint à droite de l'autre.

Leurs propriétés essentielles sont résumées dans la :

Proposition 5.4. *Soient* C *une petite catégorie*, C' *une* $\mathcal{U}$-*catégorie, et* $u : C \longrightarrow C'$ *un foncteur*.

1) *Le foncteur* $u^* : C'^{\wedge} \longrightarrow C^{\wedge}$ *commute aux limites inductives et projectives*

2) *Le foncteur* $u_* : C^{\wedge} \longrightarrow C'^{\wedge}$ *commute aux limites projectives. Pour tout préfaisceau* F *sur* C *et tout objet* Y *de* C', *on a* :

$$u_*F(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{C^{\wedge}}(u^*(Y),F) \quad .$$

3) *Le foncteur* $u_! : C^{\wedge} \longrightarrow C'^{\wedge}$ *commute aux limites inductives. Le foncteur* $u_!$ *n'est défini qu'à isomorphisme près, mais on peut toujours le choisir tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h"'] & C' \arrow[d, "h'"] \\ C^{\wedge} \arrow[r, "u_!"] & C'^{\wedge} \end{tikzcd}$$

(h *et* h' *sont les foncteurs d'inclusion canonique*) *soit commutatif*.

Pour tout préfaisceau F *sur* C, *on a* :

$$u_!F \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{C/F} h'u \quad .$$

4) *Si les limites projectives finies sont représentables dans* C *et si* u *est exact à gauche* (2.3.2), *le foncteur* $u_!$ *est exact à gauche*.

Preuve. L'assertion (1) est triviale. L'assertion (2) se déduit du fait que u_* est un foncteur adjoint à droite par (2.11) et (1.4). Il en est de même pour l'assertion (3) mais on applique en plus (3.4). Enfin l'assertion (4) n'est autre que 5.2 qu'on peut appliquer grâce à (2.7).

<u>Proposition</u> 5.5. <u>Soient</u> C <u>et</u> C' <u>deux petites catégories et</u> $C \underset{u}{\overset{v}{\rightleftarrows}} C'$ <u>un couple de foncteurs</u>, <u>où</u> v <u>est adjoint à gauche de</u> u. <u>Il existe alors des isomorphismes</u>, <u>compatibles avec les isomorphismes d'adjonction</u> :

$$v^* \xrightarrow{\sim} u_!$$

$$v_* \xrightarrow{\sim} u^* \quad .$$

<u>Preuve</u>. Il suffit d'exhiber un isomorphisme $v^* \xrightarrow{\sim} u_!$; l'autre isomorphisme s'en déduira par adjonction. Soient F un préfaisceau sur C et Y un objet de C'. On a alors :

$$v^*F(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(v(Y),F) \quad .$$

Puis en utilisant (3.4) :

$$\mathrm{Hom}(v(Y),F) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{C/F} \mathrm{Hom}(v(Y),.) \quad .$$

Mais v est adjoint à gauche de u et par suite :

$$\varinjlim_{C/F} \mathrm{Hom}(v(Y),.) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{C/F} \mathrm{Hom}(Y,u(\ .\ )) \quad .$$

Utilisant alors 5.4 3), il vient :

$$\varinjlim_{C/F} \mathrm{Hom}(Y,u(\ .\ )) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Y,u_!F) \xrightarrow{\sim} u_!F(Y) \quad .$$

On a donc déterminé, pour tout objet Y de C', un isomorphisme $v^*F(Y) \xrightarrow{\sim} u_!F(Y)$ qui est visiblement fonctoriel en Y et en F, cqfd.

<u>Corollaire</u> 5.5.1. <u>Soit</u> $u : C \longrightarrow C'$ <u>un foncteur qui admet un adjoint à gauche</u>. <u>Le foncteur</u> $u_! : C^\wedge \longrightarrow C'^\wedge$ <u>commute aux limites projectives</u> (<u>rappelons qu'il commute aux limites inductives par</u> (1.4, 3)).

Remarque 5.5.2. On trouve ainsi une "suite de quatre foncteurs adjoints " (cf. 5.3) :

$$v_! \ , \quad v^* = u_! \ , \quad v_* = u^* \ , \quad u_* \quad ,$$

dont les trois premiers (resp. derniers) commutent donc aux $\varinjlim$ (resp. $\varprojlim$).

Proposition 5.6. Les hypothèses sont celles de 5.4. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) *Le foncteur u est pleinement fidèle.*

ii) *Le foncteur $u_!$ est pleinement fidèle.*

iii) *Le morphisme d'adjonction $\mathrm{id}_{C^\wedge} \longrightarrow u^*u_!$ est un isomorphisme.*

iv) *Le foncteur u_* est pleinement fidèle.*

v) *Le morphisme d'adjonction $u^*u_* \longrightarrow \mathrm{id}_{C^\wedge}$ est un isomorphisme.*

Preuve. Il est clair que ii) $\Longleftrightarrow$ iii) et iv $\Longleftrightarrow$ v) (propriétés générales des foncteurs adjoints) et que ii) $\Longrightarrow$ i) (5.4 3)). Montrons que i) $\Longrightarrow$ iii). Les foncteurs $\mathrm{id}_{C^\wedge}$, u^* et $u_!$ commutent aux limites inductives. D'après (3.4), il suffit donc de démontrer que $H \longrightarrow u^*u_!H$ est un isomorphisme lorsque H est représentable ce qui est évident. Montrons que iii) est équivalent à v). Pour tout objet H (resp. K) de $C^\wedge$ désignons par $\Phi(H) : H \longrightarrow u^*u_!H$ (resp. par $\Psi(K) : u^*u_* \longrightarrow K$) le morphisme d'adjonction. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(H, u^*u_*K) \arrow[rr, "\mathrm{Hom}(H,\Psi(K))"] \arrow[d, phantom, "\wr|"] & & \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(H,K) \\
\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(u_!H, u_*K) \arrow[d, phantom, "\wr|"] & & \\
\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(u^*u_!H, K) \arrow[uurr, "\mathrm{Hom}(\Phi(H),K)"'] & &
\end{tikzcd}$$

.

Par suite $\Phi(H)$ est un isomorphisme pour tout H si et seulement si $\Psi(\underline{K})$ est un isomorphisme pour tout K, cqfd.

Remarque 5.7. a) Les équivalences ii) $\Longleftrightarrow$ iii) $\Longleftrightarrow$ iv) $\Longleftrightarrow$ v) sont des résultats généraux sur les foncteurs adjoints.

b) La forme explicite de $u_!$ resp. u_* donnée dans la démonstration de 1.4 montre aussitôt que, sous les hypothèses générales de 1.1, si u est pleinement fidèle, alors le morphisme d'adjonction id $\longrightarrow u^*u_!$ (resp. $u^*u_* \longrightarrow$ id) est un isomorphisme, i.e. que $u_!$ (resp. u_*) est pleinement fidèle.

5.8.0. Soient γ une espèce de structure algébrique définie par limites projectivesfinies $\underline{U}$-γ-Ens la catégorie des γ-objets de $\underline{U}$-Ens, esj : $\underline{U}$-γ-Ens $\longrightarrow$ $\underline{U}$-Ens le foncteur ensemble sous-jacent (pour simplifier nous supposons que l'espèce de structure envisagée a un seul ensemble de base). Soit C une catégorie. La composition avec esj fournit un foncteur noté

$$\text{esj}^{\wedge} \ : \ \underline{\text{Hom}}(C^{o},\underline{U}\text{-}\gamma\text{-Ens}) \longrightarrow C^{\wedge}.$$

Comme dans $C^{\wedge}$, les limites projectives se calculent argument par argument, le foncteur $\text{esj}^{\wedge}$ se factorise en une équivalence.

$$(5.8.1) \qquad \underline{\text{Hom}}(C^{o},\underline{U}\text{-}\gamma\text{-Ens}) \xrightarrow{\approx} C^{\wedge}_{\gamma} \quad ,$$

où $C^{\wedge}_{\gamma}$ est la catégorie des γ-objets de $C^{\wedge}$, et un foncteur encore noté

$$\text{esj}^{\wedge} \ : \ C^{\wedge}_{\gamma} \longrightarrow C^{\wedge} \quad ,$$

et appelé le foncteur "<u>préfaisceau d'ensembles sous-jacent</u>".

5.8.2. Supposons que le foncteur esj : $\underline{U}$-γ-Ens $\longrightarrow$ $\underline{U}$-Ens admette un adjoint à gauche Lib : $\underline{U}$-Ens $\longrightarrow$ $\underline{U}$-γ-Ens (*) (on peut montrer en fait que cette condition est toujours satisfaite). La composition avec Lib fournit un foncteur

$$\mathrm{Lib}^{\wedge} \ : \quad C^{\wedge} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C^{\circ}, \underline{U}\text{-}\gamma\text{-Ens})$$

et en composant avec l'équivalence (5.8.1), un foncteur encore noté

$$\mathrm{Lib}^{\wedge} : \ C^{\wedge} \longrightarrow C^{\wedge}_{\gamma}$$

et appelé le foncteur "préfaisceau de γ-objets libres engendré". Le foncteur Lib^ est adjoint à gauche au foncteur esj^.

Proposition 5.8.3. *Soient γ une espèce de structure algèbrique définie par limites projectives finies telle que dans la catégorie des γ-objets de $\underline{U}$-Ens, les $\underline{U}$-limites inductives soient représentables* (**), *C une catégorie appartenant à $\underline{U}$, C' une $\underline{U}$-catégorie, $u : C \longrightarrow C'$ un foncteur. Désignons par $C^{\wedge}_{\gamma}$ (resp. $C'^{\wedge}_{\gamma}$) la catégorie des γ-objets de $C^{\wedge}$ (resp. $C'^{\wedge}$) et par $u^{*\gamma}$ le foncteur sur les γ-objets déduit du foncteur u^{*}. Il résulte de 5.1 et de l'équivalence 5.8.1 qu'il existe un foncteur adjoint à gauche* (resp. *à droite*) *au foncteur $u^{*\gamma}$. Ce foncteur est noté $u_{!\gamma}$* (resp. $u_{*\gamma}$).

1) *Le foncteur $u^{*\gamma}$ commute aux limites inductives et projectives. Le diagramm*

(*)
$$\begin{tikzcd}
C'^{\wedge}_{\gamma} \arrow[r, "u^{*\gamma}"] \arrow[d, "\mathrm{esj}'^{\wedge}"'] & C^{\wedge}_{\gamma} \arrow[d, "\mathrm{esj}^{\wedge}"] \\
C'^{\wedge} \arrow[r, "u^{*}"] & C^{\wedge}
\end{tikzcd}$$

(*) Le foncteur Lib est le foncteur "γ-objets libre engendré". Exemple : groupe libre, groupe commutatif libre, A-module libre, etc... .

(**) On peut montrer que cette condition est toujours satisfaite.

est commutatif (esj'^ *et* esj^ *désignent les foncteurs "ensemble sous-jacent"*).

2) *Le foncteur* $u_{*\gamma}$ *commute aux limites projectives. Le diagramme*

$$(**)\qquad \begin{tikzcd} C^{\wedge}_{\gamma} \arrow[r, "u_{*\gamma}"] \arrow[d, "esj^{\wedge}"'] & C'^{\wedge}_{\gamma} \arrow[d, "esj'^{\wedge}"] \\ C^{\wedge} \arrow[r, "u_{*}"] & C'^{\wedge} \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près.

3) *Le foncteur* $u_{!\gamma}$ *commute aux limites inductives. Supposons que* esj^ (*resp.* esj'^) *admette un adjoint à gauche* Lib^ (*resp.* Lib'^) (5.8.2). *Le diagramme*

$$(***)\qquad \begin{tikzcd} C^{\wedge} \arrow[r, "u_{!}"] \arrow[d, "Lib^{\wedge}"'] & C'^{\wedge} \arrow[d, "Lib'^{\wedge}"] \\ C^{\wedge}_{\gamma} \arrow[r, "u_{!\gamma}"] & C'^{\wedge}_{\gamma} \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près.

Supposons que $u_!$ *commute aux limites projectives finies* (5.4 4) *et* 5.6). *Alors le diagramme*

$$(****)\qquad \begin{tikzcd} C^{\wedge}_{\gamma} \arrow[r, "u_{!\gamma}"] \arrow[d, "esj^{\wedge}"'] & C'^{\wedge}_{\gamma} \arrow[d, "esj'^{\wedge}"] \\ C^{\wedge} \arrow[r, "u_{!}"] & C'^{\wedge} \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près, et $u_{!\gamma}$ *commute aux limites projectives finies.*

Preuve. L'assertion (1) est évidente. L'assertion (2) aussi car u_* est un adjoint à droite et par suite (2.11) commute aux limites projectives et, en particulier, aux limites projectives finies ; d'où la commutativité du diagramme (**). La commutativité du diagramme (***) se déduit de l'unicité, à isomorphisme près du foncteur adjoint à gauche, et enfin la commutativité du diagramme (****) se déduit immédiatement du fait que $u_!$ commute aux limites projectives finies.

<u>Notation</u> 5.9. Par abus de notation, les foncteurs u^{*Y} et u_{*_Y} seront souvent notés u^* et u_*,ce qui ne risque pas d'apporter des confusions en vertu de la commutativité des diagrammes (*) et (**). En revanche, lorsque $u_!$ ne commute pas aux limites projectives finies, le diagramme (****) n'est pas commutatif à isomorphisme près, et les notations $u_!$ et $u_{!_Y}$ devront être employées pour éviter des confusions.

5.10. Soit C une petite catégorie. Pour tout objet X de $C^\wedge$, on désigne par C/X la catégorie des flèches de but X et de source un objet de C. Le foncteur source définit un foncteur $j_X : C/X \longrightarrow C$. Soit $m : Y \longrightarrow X$ un morphisme de $C^\wedge$. La composition des morphismes définit un foncteur $j_m : C/Y \longrightarrow C/X$. Le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
C/Y \arrow[rr, "j_m"] \arrow[dr, "j_Y"'] & & C/X \arrow[dl, "j_X"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Il résulte de 5.1 que pour tout objet F de $(C/X)^\wedge$ et tout objet Y de C, on a :

(5.10.1) $$j_{X!}F(Y) = \coprod_{u \in \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(Y,X)} F(u) \quad .$$

La formule (5.10.1) permet de définir $j_{X!}$ lorsque C est une <u>U</u>-catégorie,et on vérifie que le foncteur $j_{X!}$ ainsi défini est toujours adjoint à droite au foncteur $j_X^* : C^\wedge \longrightarrow (C/X)^\wedge$ (5.0).

Proposition 5.11. *Soit* C *une* *U-catégorie*, X *un préfaisceau sur* C.

1) *Le foncteur*

$$j_{X!} \; : \; (C/X)^\wedge \longrightarrow C^\wedge$$

se factorise par la catégorie $C^\wedge/X$:

$$(C/X)^\wedge \xrightarrow{e_X} C^\wedge/X \longrightarrow C^\wedge \, .$$

Le foncteur e_X *est une équivalence de catégories*.

2) *Le foncteur* $e_X \circ j_X^* \; : \; C^\wedge \longrightarrow C^\wedge/X$ *est canoniquement isomorphe au foncteur* $H \longmapsto (H \times X \xrightarrow{pr_2} X)$.

Preuve. 1) Soit f l'objet final de $(C/X)^\wedge$. On a un isomorphisme canonique $f \simeq \varinjlim_{Y \in \mathrm{ob} C/X} Y$ et par suite $j_{X!}(f) = \varinjlim_{Y \in \mathrm{ob} C/X} j_X(Y)$ (5.4). Or $j_{X!}(f) \simeq X$; d'où la factorisation. Pour montrer que e_X est une équivalence nous nous contenterons d'exhiber un foncteur quasi-inverse : A tout objet $H \longrightarrow X$ de $C^\wedge/X$ on associe le préfaisceau sur C/X :

$$(Y \longrightarrow X) \longmapsto \mathrm{Hom}_{C^\wedge/X}((Y \longrightarrow X), (H \longrightarrow X)) \quad .$$

2) Le foncteur $e_X \circ j_X^*$ est adjoint à droite au foncteur d'oubli et par suite le foncteur $e_X \circ j^*$ est canoniquement isomorphe au foncteur $H \longmapsto (H \times X \xrightarrow{pr_2} X)$.

5.12. Soit $m : Y \longrightarrow X$ un morphisme de $C^\wedge$. D'après (5.11), le morphisme m est canoniquement isomorphe à l'image par e_X d'un objet de $(C/X)^\wedge$ que nous noterons $[m]$. Le foncteur e_X définit, par restriction aux sous-catégories, une équivalence

$$(C/X)/[m] \xrightarrow{e_m} C/Y \quad .$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd} (C/X)/[m] \arrow[rr, "e_m"] \arrow[dr, "j_{[m]}"'] & & C/Y \arrow[dl, "j_m"] \\ & C/X & \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme canonique près.

5.13. Signalons un résultat qui nous sera utile dans Exp. VI. Soit $u : C \to C'$ un foncteur entre petites catégories. Pour tout objet H de $C^\wedge$ désignons par $u/H : C/H \to C'/u_!H$ le foncteur qui associe à tout morphisme $m : X \to H$ le morphisme $u_!X \xrightarrow{u_!m} u_!H$ (on sait (5.4) qu'on peut toujours poser $u_!X = uX$). Le diagramme ci-après est commutatif :

$$\text{(5.13.1)} \qquad \begin{tikzcd} C/H \arrow[r, "u/H"] \arrow[d, "J_H"'] & C'/u_!H \arrow[d, "j_{u_!H}"] \\ C \arrow[r, "u"] & C' \end{tikzcd} \; .$$

On a donc un diagramme commutatif à isomorphisme près :

$$\text{(5.13.2)} \qquad \begin{tikzcd} (C/H)^\wedge \arrow[r, "(u/H)_!"] \arrow[d, "(j_H)_!"'] & (C'/u_!H)^\wedge \arrow[d, "(j_{u_!H})_!"] \\ C^\wedge \arrow[r, "u_!"] & C'^\wedge \end{tikzcd} \; ,$$

et comme $(u/H)_!$ transforme l'objet final de $(C/H)^\wedge$ en l'objet final de $(C'/u_!H)^\wedge$, le diagramme :

$$(5.13.3)\qquad \begin{tikzcd} (C/H)^{\wedge} \arrow[r, "(u/H)_!"] \arrow[d, "e_H"'] & (C'/u_!H)^{\wedge} \arrow[d, "e_{u_!H}"] \\ C^{\wedge}/H \arrow[r, "u_!/H"] & C'^{\wedge}/u_!H \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près (6.1).

Proposition 5.14. *Soit* $u : C \longrightarrow C'$ *un foncteur entre petites catégories. On suppose que* u *possède la propriété suivante* :

(PPF) *Pour tout objet* X *de* C *le foncteur* $u/X : C/X \longrightarrow C'/uX$ *est pleinement fidèle*.

Alors :

1) *Soit* f *l'objet final de* $C^{\wedge}$. *Le foncteur* u *se factorise en*

$$C = C/f \xrightarrow{\ u/f\ } C'/u_!f \xrightarrow{\ j_{u_!f}\ } C' \quad .$$

Le foncteur u/f *est pleinement fidèle*.

2) *Le foncteur* $u_! : C^{\wedge} \longrightarrow C'^{\wedge}$ *se factorise en*

$$C^{\wedge}=(C/f)^{\wedge} \xrightarrow{\ (u/f)_!\ } (C'/u_!f)^{\wedge} \xrightarrow{\ e_{u_!f}\ } C'^{\wedge}/u_!f \longrightarrow C'^{\wedge} \ ,$$

où le foncteur $(u/f)_!$ *est pleinement fidèle, le foncteur* $e_{u_!f}$ *une équivalence, et le foncteur* $C'^{\wedge}/u_!f \longrightarrow C'^{\wedge}$ *le foncteur d'oubli*.

3) *En particulier le foncteur* $u_!$ *est fidèle et par suite le morphisme d'adjonction* $\mathrm{id} \xrightarrow{\ \Phi\ } u^*u_!$ *est un monomorphisme. De plus, pour tout morphisme* $\alpha : H \longrightarrow K$ *de* $C^{\wedge}$, *le diagramme* :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, hook, "\Phi(H)"] \arrow[d, "\alpha"'] & u^*u_!H \arrow[d, "u.u^{\cdot}(\alpha)"] \\ K \arrow[r, hook, "\Phi(K)"] & u^*u_!K \end{tikzcd}$$

est cartésien.

Preuve. 1) La factorisation provient du diagramme (5.13.1). Le foncteur u est fidèle. Donc u/f est fidèle. Montrons qu'il est pleinement fidèle. Soient X et Y deux objets de C, $\mathrm{can}_X : uX \longrightarrow u_! f$ (resp. $\mathrm{can}_Y : uY \to u_! f$) les morphismes canoniques et

$$\begin{tikzcd} uX \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "\mathrm{can}_X"'] & & uY \arrow[dl, "\mathrm{can}_Y"] \\ & u_! f & \end{tikzcd}$$

un morphisme de $C'/u_! f$. On a $u_! f = \varinjlim_{Z \in \mathrm{ob} C} uZ$ et par suite (3.1) :

$$\mathrm{Hom}_{C'^\wedge}(uX, u_! f) = \varinjlim_{Z \in \mathrm{ob} C} \mathrm{Hom}_{C'}(uX, uZ) \quad .$$

Par définition de la limite inductive, dire que $\mathrm{can}_Y\, m = \mathrm{can}_X$ équivaut à dire qu'il existe

a) une suite finie d'objets de C, X_i , $i \in [0,n]$, $X_o = X$, $X_n = Y$,

b) pour tout i, un morphisme $m_i : uX \longrightarrow uX_i$ ($m_o = id_X$, $m_n = m$),

c) pour tout couple (i,i+1) un morphisme $f_i : X_i \longrightarrow X_{i+1}$ ou bien $f_i : X_{i+1} \longrightarrow X_i$,

tels que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} & uX \arrow[dl, "m_i"'] \arrow[dr, "m_{i+1}"] & \\ uX_i \arrow[rr, "u(f_i)"] & & uX_{i+1} \end{tikzcd} \qquad \text{ou bien} \qquad \begin{tikzcd} & uX \arrow[dl, "m_i"'] \arrow[dr, "m_{i+1}"] & \\ uX_i & & uX_{i+1} \arrow[ll, "u(f_i)"'] \end{tikzcd} \quad ,$$

soient commutatifs.

On démontre alors immédiatement, par récurrence sur i et en utilisant la propriété (PPF), que m_i est de la forme $u(p_i)$. En particulier $m = u(p)$ et par suite u/f est pleinement fidèle.

2) La factorisation est immédiate. Le foncteur $(u/f)_!$ est pleinement fidèle en vertu de 5.6. Les autres assertions résultent de 5.11.

3) Le foncteur $u_!$ est composé du foncteur d'oubli qui est fidèle, et de foncteurs pleinement fidèles. Il est par suite fidèle. Il en résulte, d'après les propriétés générales des foncteurs adjoints, que le morphisme d'adjonction $id \longrightarrow u^*u_!$ est un monomorphisme. D'après 2) le foncteur $u_!$ apparaît comme le composé d'un foncteur pleinement fidèle $v : C^\wedge \longrightarrow C'^\wedge/u_!f$ et du foncteur d'oubli. Le foncteur u^*, adjoint à droite de $u_!$, est donc le composé du foncteur "produit par $u_!f$", adjoint à droite du foncteur d'oubli, et d'un foncteur w adjoint à droite de v. De plus, v étant pleinement fidèle, le morphisme d'adjonction $id \longrightarrow wv$ est un isomorphisme. La dernière assertion en résulte aisément.

6. Foncteurs fidèles et foncteurs conservatifs

Définition 6.1. Soient E une catégorie, $(\varphi_i : E \longrightarrow F_i)_{i\in I}$ une famille de foncteurs

$$\varphi_i : E \longrightarrow F_i \quad .$$

On dit que la famille de foncteurs (φ_i) est fidèle si pour tout couple d'objets X,Y, de E, et tout couple de flèches $u,v: X \rightrightarrows Y$, la relation $\varphi_i(u)=\varphi_i(v)$ pour tout $i \in I$ implique $u=v$ (en d'autres termes, si l'application $\mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(\varphi_i(X),\varphi_i(Y))$ définie par (φ_i) est injective). On dit que la famille de foncteurs (φ_i) est conservative si toute flèche u de E, telle que $\varphi_i(u)$ soit un isomorphisme pour tout $i \in I$, est un isomorphisme. On dit que (φ_i) est conservative pour les monomorphismes (resp. pour les épimorphismes, resp. ....) si la condition précédente est vérifiée chaque fois que u est un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. ....).

6.1.1. Si on introduit le foncteur unique

$$\varphi : E \longrightarrow F = \prod_{i\in I} F_i$$

défini par la famille de foncteurs (φ_i), il est clair que celle-ci est fidèle (resp. conservative, resp. conservative pour les monomorphismes, resp. ...) si et seulement si le foncteur φ est fidèle (resp. conservatif, resp. ...) (par quoi on entend que la famille réduite au seul objet φ est fidèle, resp. conservative, resp. ...). On pourrait donc sans inconvénient majeur nous borner par la suite au cas d'une famille réduite à un seul foncteur. Pour la commodité des futures références, nous donnerons néanmoins les énoncés suivants pour les familles.

Les notions de 6.1 sont surtout utiles lorsque les φ_i satisfont à des propriétés d'exactitude convenables, et dans ce cas ont une tendance à coïncider :

Proposition 6.2. Les notations sont celles de 5.1.

(i) Si les noyaux de doubles flèches, ou les conoyaux de doubles flèches, sont représentables dans E, et si les φ_i y commutent, alors on a l'implication

$$(\varphi_i) \text{ conservative} \Longrightarrow (\varphi_i) \text{ fidèle} \quad .$$

(ii) Supposons que les produits fibrés (resp. les sommes amalgamées) soient représentables dans E, et que les φ_i y commutent. Supposons (φ_i) fidèle ou conservative ; alors pour toute flèche u de E, u est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si pour tout $i \in I$, il en est ainsi pour $\varphi_i(u)$.

(iii) Supposons que dans E les produits fibrés et les sommes amalgamées sont représentables et que les φ_i y commutent, et que toute flèche dans E qui est un bimorphisme (i.e. un monomorphisme et un épimorphisme) soit un isomorphisme. Alors on a l'implication

$$(\varphi_i) \text{ fidèle} \Longrightarrow (\varphi_i) \text{ conservative} \quad .$$

(iv) Supposons que dans E les produits fibrés (resp. les sommes amalgamées) soient représentables, et que les φ_i y commutent. Alors, si (φ_i) est conservative pour les monomorphismes (resp. pour les épimorphismes) alors (φ_i) est même conservative.

(v) Soit D un type de diagramme, $F: d \longmapsto F(d)$ un diagramme de type D dans E, X un objet de E et $u=(u_d)_{d\in D}$ une famille de flèches

$$X \longrightarrow F(d) \qquad (\text{resp. } F(d) \longrightarrow X) \quad .$$

Supposons que (φ_i) soit conservative, que les limites projectives (resp. inductives) de type D soient représentables dans E, et que les φ_i y commutent. Alors, pour que u fasse de X une limite projective (resp. inductive) de F dans E, il faut et il suffit que pour tout $i \in I$, $\varphi_i(u)$ fasse de $\varphi_i(X)$ une limite projective (resp. inductive) de $\varphi_i(D)$ dans E_i .

Démonstration. (i) Pour l'énoncé non respé, il suffit, pour une double flèche donnée $u,v: X \rightrightarrows Y$, d'exprimer l'égalité $u=v$ par la condition que l'inclusion $\mathrm{Ker}(u,v) \longrightarrow X$ est un isomorphisme. Ici et par la suite, on se dispense de répéter l'argument dual pour l'énoncé dual.

(ii) Si (φ_i) est fidèle, on exprime la condition que $u:X \to Y$ soit un monomorphisme par l'égalité $pr_1=pr_2$ pour le produit fibré $X\times_Y X$. Si (φ_i) est conservatif, on l'exprime par la condition que le morphisme diagonal $\delta:X \longrightarrow X\times_Y X$ soit un isomorphisme.

(iv) Comme dans ce dernier argument, le morphisme δ est un monomorphisme, on voit qu'il suffisait en fait de supposer (φ_i) conservative pour les monomorphismes. Mais ceci implique alors que (φ_i) est conservative tout court. En effet, si $u \in \mathrm{fl}\, E$ est telle que les $\varphi_i(u)$ soient des isomorphismes, on en conclut que ce sont des monomorphismes d'après ce qui précède, donc des isomorphismes d'après l'hypothèse sur (φ_i).

(iii) Est une conséquence triviale de (ii).

(v) Est une conséquence triviale des définitions.

Notons la conséquence suivante de (i) (ii) (iv) :

Corollaire 6.3. Supposons que dans E les produits fibrés et les sommes amalgamées soient représentables et que les φ_i y commutent, et que les noyaux de double flèches ou les conoyaux de double flèches soient représentables et que les φ_i y commutent. (Il suffit par exemple que les limites projectives finies et les limites inductives finies soient représentables dans E, et que les φ_i soient des foncteurs exacts.) Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) (φ_i) est fidèle.

b) (φ_i) est conservative.

c) (φ_i) est conservative pour les monomorphismes.

c') (φ_i) est conservative pour les épimorphismes.

Signalons aussi pour mémoire :

Proposition 6.4. Soient $\varphi : E \longrightarrow F$ un foncteur admettant un adjoint à droite ψ (donc $\mathrm{Hom}(\varphi(X),Y) \simeq \mathrm{Hom}(X,\psi(Y))$). Pour que φ (resp. ψ) soit fidèle, il faut et il suffit que pour tout élément X de E (resp. tout élément Y de F), le morphisme d'adjonction $X \longrightarrow \psi\,\varphi(X)$ soit un monomorphisme. Pour que φ (resp. ψ) soit pleinement fidèle, il faut et il suffit que le morphisme d'adjonction précédent soit un isomorphisme.

En effet, si X', X sont deux objets de E, l'application

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}(X',X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\varphi(X'),\varphi(X))$$

s'identifie à l'application déduite de

$$(**) \qquad X \longrightarrow \psi\,\varphi\,(X)$$

par application du foncteur Hom(X',-). Donc pour que (*) soit un monomorphisme (resp. un isomorphisme) pour tout X', X étant fixé, il faut et il suffit que le morphisme d'adjonction (**) soit un monomorphisme (resp. un isomorphisme).

Proposition 6.5. Soit $p : E' \longrightarrow E$ un foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) p est fidèle, conservatif et fibrant (SGA 1 VI 6.1).

(ii) p est un foncteur fibrant à fibres des catégories discrètes.

(iii) Pour tout $X' \in \mathrm{ob}\, E'$, le foncteur $E'_{/X'} \longrightarrow E_{/p(X)}$ induit par p est une équivalence de catégories, surjective sur les objets.

(iv) (Lorsque E est une U-catégorie). Il existe un élément $F \in \mathrm{ob}\, \hat{C}$ et une équivalence de catégories sur E (SGA 1 VI 4.3) $E' \xrightarrow{\approx} E_{/F}$ (où $E_{/F}$ est la sous-catégorie pleine de $\hat{E}_{/F}$ formée des flèches $X \longrightarrow F$ dont la source est dans E).

6.5.1. Rappelons qu'une catégorie C dite est discrète si c'est un groupoïde (i.e. toute flèche y est inversible) et si elle est rigide (i.e. le groupe des automorphismes de tout objet est réduit au groupe unité) ; il revient au même de dire que la catégorie est équivalente à la catégorie C' définie par un ensemble I (avec ob C' = I, et comme seules flèches les flèches identiques). Quand on suppose déjà que C est un groupoïde, alors dire que C est discrète revient à dire que pour deux objets X,Y de C, il existe au plus une flèche de X dans Y, i.e. que C est isomorphe à la catégorie définie par un ensemble préordonné.

L'équivalence des conditions (i) et (ii) de 6.5 est une conséquence immédiate des rappels précédents et du

Lemme 6.5.2. *Soit* $p: E' \longrightarrow E$ *un foncteur fibrant. Alors :*

(i) *Pour que* p *soit conservatif, il faut et il suffit que ses catégories fibres soient des groupoïdes.*

(ii) *Pour que* p *soit fidèle, il faut et il suffit que ses catégories fibres soient des catégories ordonnées.*

Démonstration de 6.5.2. (i) Supposons p conservatif. Pour toute flèche u d'une fibre E'_X , $p(u) = id_X$ est un isomorphisme, donc u est un isomorphisme dans E', donc aussi dans E'_X (car un inverse de u dans E' sera évidemment un inverse dans E'_X). Donc E'_X est un groupoïde. Inversement, supposons les E'_X des groupoïdes, et soit u' une flèche de E' telle que $p(u')$ soit un isomorphisme, prouvons que u est un isomorphisme. Pour ceci on note que, p étant fibrant, on peut factoriser $u': X' \longrightarrow Y'$ en un composé $X' \longrightarrow u^*(Y') \longrightarrow Y'$, où la première flèche est un X-morphisme (NB $X=p(X')$, $u=p(u')$) et la deuxième est un morphisme cartésien au-dessus de u. La première flèche est un isomorphisme puisque E'_X est un groupoïde, et la deuxième l'est, car un morphisme *cartésien* d'une catégorie fibrée est évidemment un isomorphisme dès que sa projection l'est.

(ii) Supposons p fidèle, et soient X', Y' deux objets d'une catégorie fibre E_X . Alors deux flèches de X' dans Y' sont au-dessus de la même flèche id_X de E, donc sont identiques, donc E_X est ordonnée.

Inversement, supposons les catégories fibres ordonnées, et prouvons que p est fidèle. Soient donc $u', v' : X' \rightrightarrows Y'$ des flèches de E' au-dessus d'une même flèche $u: X \longrightarrow Y$ de E. Elles se factorisent alors en $X' \rightrightarrows u^*(Y) \longrightarrow Y'$, où les deux flèches $X' \rightrightarrows u^*(Y')$ sont des flèches de E'_X de même source et même but ; celles-ci sont donc égales, donc $u'=v'$, cqfd.

Revenons à la démonstration de 6.5. On a prouvé (i)$\Longleftrightarrow$(ii). D'autre part (ii)$\Longleftrightarrow$(iv) est assez claire : en effet, d'une part la catégorie $E_{/F}$ est fibrée sur E à catégories fibres les catégories discrètes définies par les ensembles F(X), comme il résulte aussitôt des définitions ; d'autre part, si p est comme dans (ii), alors en vertu du sorite SGA 1 VI 8 la catégorie fibrée E' sur E est E-équivalente à la catégorie scindée sur E définie par le foncteur $E \longrightarrow$ (Cat) définie par le foncteur $F: E \longrightarrow$ (Ens), associant à tout $X \in$ ob E l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de E'_X . Or cette catégorie scindée est E-isomorphe à la catégorie $E_{/F}$. Comme (iv)$\Longrightarrow$(iii) est claire, il reste à prouver (iii)$\Longrightarrow$(i). Or il est clair que pour que p soit fidèle (resp. conservatif) il faut et il suffit que les foncteurs induits $E'_{/X'} \longrightarrow E_{/p(X)}$ le soient, a fortiori il suffit que ceux-ci soient pleinement fidèles ; donc il reste à prouver seulement que (iii) implique que p est fibrant. Mais on voit encore qu'un foncteur p est fibrant si et seulement si les foncteurs induits $E'_{/X'} \longrightarrow E_{/p(X')}$ le sont. Il en est en particulier ainsi si ce sont des équivalences de catégories surjectives sur les objets.

7. Sous-catégories génératrices et cogénératrices

Définition 7.1. Soient E une catégorie, C une sous-catégorie pleine de E. On dit que C est une sous-catégorie de E génératrice par épimorphismes stricts (resp. par épimorphismes) si pour tout objet X de E, la famille des flèches de E de but X, de source $X' \in \mathrm{ob}\, C$, est épimorphique (resp. épimorphique stricte) (1.3) . On dit que C est une sous-catégorie de E génératrice (resp. génératrice pour les monomorphismes, resp. génératrice pour les monomorphismes stricts) si pour toute flèche $u: Y \longrightarrow X$ (resp. tout monomorphisme de E, resp. tout monomorphisme strict de E (10.5)) , telle que pour tout $X' \in \mathrm{ob}\, C$, l'application correspondante $\mathrm{Hom}(X',Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X',X)$ soit bijective, u est un isomorphisme. Enfin, on dit qu'une famille (X_i) d'objets de E est génératrice par épimorphismes stricts (resp. .....) si la sous-catégorie pleine C de E engendrée par cette famille est génératrice par épimorphismes stricts (resp. .....).

7.1.1. Notons qu'en termes de la famille $(h_{X'})_{X' \in \mathrm{ob}\, C}$ des foncteurs

$$h_{X'} : E \longrightarrow (\mathrm{Ens}) \quad (X' \in \mathrm{ob}\, C)$$

représentés par les $X' \in \mathrm{ob}\, C$, on peut exprimer la condition que C soit génératrice (resp. génératrice pour les monomorphismes, resp. génératrice pour les monomorphismes stricts) par celle que la famille $(h_{X'})$ soit conservative (resp. conservative pour les monomorphismes, resp. conservative pour les monomorphismes stricts) (6.1). Il résulte également immédiatement des définitions que C est génératrice par épimorphismes si et seulement si la famille $(h_{X'})_{X' \in \mathrm{ob}\, C}$ est <u>fidèle</u> (6.1). On donnera aussi ci-dessous (7.2 (i)) une interprétation analogue pour la condition sur C d'être génératrice par épimorphismes stricts.

7.1.2. Comme pour les notions introduites dans 6.1, les notions de 7.1 sont surtout utiles lorsque E possède des propriétés d'exactitude convenables, auquel cas les diverses notions introduites ont une nette tendance à être toutes équivalentes (7.3). C'est pourquoi la question de savoir laquelle de ces notions 7.1 doit être considérée comme la plus importante ne se pose guère ; dans les cas les plus importants, ces notions coïncident et le terme "sous-catégorie génératrice" peut donc être interprété indifféremment comme se rapportant à n'importe laquelle des propriétés envisagées dans 7.1 (par exemple la première, qui est la plus forte de toute comme nous allons voir (7.2 (ii))).

7.1.3. Supposons que E soit une $\underline{U}$-catégorie, et considérons le foncteur canonique

(7.1.3.1) $$\varphi : E \longrightarrow \hat{C} = \underline{\mathrm{Hom}}(C, \underline{U}\text{-}\mathrm{Ens})$$

composé des foncteurs $E \longrightarrow \hat{E} \longrightarrow \hat{C}$, où le premier foncteur est le foncteur canonique (1.3.3) , et le deuxième le foncteur restriction à C. Notons qu'il est évident qu'il revient au même de dire que le foncteur précédent φ est conservatif (resp. fidèle), ou de dire que la famille des foncteurs $h_{X'} : X \longrightarrow \mathrm{Hom}(X',X) = \varphi(X)(X')$, pour $X' \in \mathrm{ob}\, C$ variable, est une famille conservative (resp. fidèle), c'est-à-dire aussi (7.1.2) que C est génératrice (resp. génératrice par épimorphisme). De même φ

est conservative pour les monomorphismes (resp. pour les monomorphismes stricts) si et seulement la famille des $h_{X'}$ ($X' \in \mathrm{ob}\, C$) est conservative pour les monomorphismes (resp. pour les monomorphismes stricts), i.e. si et seulement si la sous-catégorie C de E est génératrice pour les monomorphismes (resp. pour les monomorphismes stricts).

Proposition 7.2. *Soient* E *une* U-*catégorie*, C *une sous-catégorie pleine*.

(i) *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) C *est une sous-catégorie génératrice par épimorphismes stricts*.

b) *Pour tout* $X \in \mathrm{ob}\, E$, *désignant par* $C_{/X}$ *la sous-catégorie pleine de* $E_{/X}$ *formée des flèches* $X' \longrightarrow X$ *de source* $X' \in \mathrm{ob}\, C$, *la flèche naturelle du foncteur d'inclusion* $j : C_{/X} \longrightarrow E$ *dans le foncteur constant sur* $C_{/X}$ *de valeur* X *fait de* X *une limite inductive de* j :

$$X \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{C_{/X}} X' \quad .$$

c) *Le foncteur canonique* φ *de* (7.1.3.1) *est pleinement fidèle*.

(ii) *On a entre les notions de* 7.1 *les implications suivantes* :

1) C *génératrice par épim. stricts*
(φ pleinement fidèle)

$\Longrightarrow$ 3) C *génératrice*
(φ conservatif)

2) C *génératrice par épimorphismes*
(φ fidèle)

3) $\Downarrow$

4) C *génératrice pour monomorphismes*
(φ conservatif pour mon.)

$\Downarrow$

5) C *génératrice pour mon. stricts*)
(φ conservatif pour mon. stricts) .

(iii) On a les implications conditionnelles suivantes :

a) Si dans E les familles épimorphiques de flèches sont épimorphiques strictes, on a 2) $\Longrightarrow$ 1). Si dans E les monomorphismes sont stricts, on a 5) $\Longrightarrow$ 4).

b) Si dans E les noyaux de couples de flèches (resp. les produits fibrés) sont représentables, alors on a 3) $\Longrightarrow$ 2) (resp. 4) $\Longrightarrow$ 3)).

c) Si dans E toute famille de morphismes $X_i \longrightarrow X$ de même but X se factorise en une famille épimorphique stricte (resp. épimorphique) $X_i \longrightarrow Y$ suivie d'une monomorphisme (resp. d'une monomorphisme strict) $Y \longrightarrow X$, alors on a 4) $\Longrightarrow$ 1) (resp. 5) $\Longrightarrow$ 2)).

Signalons tout de suite le

Corollaire 7.3. Toutes les notions envisagées dans 6.1 (et reprises dans le diagramme d'implications de (ii) ci-dessus) sont équivalentes dans chacun des deux cas suivants :

(i) Dans E, les noyaux de doubles flèches et les produits fibrés sont représentables, les monomorphismes sont stricts et les familles épimorphiques de flèches sont épimorphiques strictes.

(ii) Dans E, toute famille $(X_i \longrightarrow X)_{i \in I}$ de flèches de même but X se factorise en une famille épimorphique $(X_i \longrightarrow Y)$ suivie d'un monomorphisme $Y \longrightarrow X$, tout monomorphisme de E est strict, et toute famille épimorphique de flèches de E est stricte.

En effet, dans le cas (i) on a 4) $\Longrightarrow$ 3) et 3) $\Longrightarrow$ 2) grâce à b), et 5) $\Longrightarrow$ 4) et 2) $\Longrightarrow$ 1) grâce à a). Dans le cas (ii) on a grâce à c), les implications 4) $\Longrightarrow$ 1) et 5) $\Longrightarrow$ 2). On conclut donc grâce au diagramme d'implications 6.2 (ii).

<u>Démonstration de</u> 7.2. (i) L'implication b) $\Longrightarrow$ a) résulte aussitôt des définitions. Prouvons a) $\Longrightarrow$ b). Donc sous l'hypothèse a), il faut prouver que pour tout $X, Y \in \mathrm{ob}\, E$, tout système de flèches

$$u_{X'} : X' \longrightarrow Y$$

indexé par les $X' \in \mathrm{ob}\, C_{/X}$, telle que l'on ait $u_{X'}f = u_{X''}$ pour toute flèche $f : X'' \longrightarrow X'$ dans $C_{/X}$, se factorise par une flèche (nécessairement unique par l'hypothèse a)) $X \longrightarrow Y$. D'après l'hypothèse a), il suffit de vérifier que pour tout objet Z de $E_{/X}$ et tout couple de morphismes $v' : Z \longrightarrow X'$, $v'' : Z \longrightarrow X''$ dans $E_{/X}$, avec X' et X'' dans $C_{/X}$, on a $u_{X'}v' = u_{X''}v''$. Or, grâce à l'hypothèse a), la famille des flèches $w : X''' \longrightarrow Z$, avec $X''' \in \mathrm{ob}\, C$, est épimorphique, et il suffit donc de vérifier que pour toute telle w, on a $(u_{X'}v')w = (u_{X''}v'')w$, ce qui s'écrit aussi $u_{X'}(v'w) = u_{X''}(v''w)$ et résulte aussitôt de l'hypothèse faite sur la famille des u .

Prouvons maintenant l'équivalence des conditions b) et c). Pour ceci notons que pour tout $X \in \mathrm{ob}\, E$, l'objet $\varphi(X)$ de $\hat{C}$ est limite inductive dans $\hat{C}$ du foncteur canonique $\hat{C}_{/\varphi(X)} \longrightarrow \hat{C}$ (3.4) ; or $\hat{C}_{/\varphi(X)}$ est canoniquement isomorphe à $C_{/X}$, de sorte qu'on a dans $\hat{C}$

$$\varphi(X) = \varinjlim_{C_{/X}} X' \quad ,$$

où on identifie l'objet X' de C avec le foncteur $\in \hat{C}$ qu'il représente. On a par suite, pour un deuxième objet Y de E, un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\varphi(X),\varphi(Y)) &\simeq \varprojlim_{C_{/X}} \mathrm{Hom}(X',\varphi(Y)) \simeq \varprojlim_{C_{/X}} \varphi(Y)(X') \quad (1.4) \\ (*) \qquad &\simeq \varprojlim_{C_{/C}} \mathrm{Hom}(X',Y) \quad . \end{aligned}$$

Ceci posé, l'application

$$\mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\varphi(X),\varphi(Y))$$

définie par φ n'est autre, via l'isomorphisme entre les membres extrêmes de (*), que l'application

$$\mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \varprojlim_{C_{/X}} \mathrm{Hom}(X',Y)$$

déduite du système inductif de flèches $X' \longrightarrow X$ indexé par $C_{/X}$ envisagé dans 7.2 (i) b). Donc la première application est bijective pour tout Y (X étant fixé) si et seulement si X est une limite inductive du foncteur d'inclusion $j: C_{/X} \longrightarrow E$, ce qui prouve l'équivalence de b) et c).

(ii) Les implications 1) $\Longrightarrow$ 2) et 3) $\Longrightarrow$ 4) $\Longrightarrow$ 5) sont triviales en vertu des définitions. L'implication 1) $\Longrightarrow$ 3) s'obtient en interprétant la propriété 1) par la pleine fidélité de φ grâce à (i), et en observant qu'un foncteur pleinement fidèle est conservatif. Or on a déjà observé (7.1.1) que 3) signifie que φ est conservatif.

(iii) L'assertion a) est une tautologie. L'assertion b) résulte de 6.2 (i) (resp. 6.2 (iv)) appliqué au foncteur φ, compte tenu que ce dernier est exact à gauche. Prouvons enfin c). Considérons, pour un $X \in \mathrm{ob}\, E$, la famille de tous les morphismes $X_i \longrightarrow X$, avec $X_i \in \mathrm{ob}\, C$; par hypothèse sur E elle se factorise en une famille $X_i \longrightarrow Y$ épimorphique effective (resp. épimorphique) suivie d'un monomorphisme (resp. d'un monomorphisme strict) $Y \longrightarrow X$. Alors l'hypothèse 4) (resp. 5)) implique que $Y \longrightarrow X$ est un isomorphisme, donc la famille envisagée est épimorphique stricte (resp. épimorphique), cqfd.

Proposition 7.4. *Soient* E *une catégorie,* C *une sous-catégorie pleine de* E, X *un objet de* E. *On suppose* C *génératrice dans* E (resp. C *génératrice pour les monomorphismes, et que le produit fibré de deux sous-objets de* X *sur* X *est représentable dans* E). *Alors un sous-objet strict* (10.11) (resp. *un sous-objet*) X' *de* X *est connu quand on connaît, pour tout* $T \in \mathrm{ob}\, C$, *la partie de* $\mathrm{Hom}(T,X)$ *image de* $\mathrm{Hom}(T,X')$. *Par suite, le cardinal de l'ensemble des sous-objets stricts* (resp. *de l'ensemble des sous-objets*) *de* X *est majoré par* $\prod_{T \in \mathrm{ob}\, C} 2^{\mathrm{card}\, \mathrm{Hom}(T,X)}$, *et si* $X \in \mathrm{ob}\, C$, *il est majoré par* $2^{\mathrm{card}\, F\ell\, C}$.

Prouvons d'abord l'assertion respée. Soient X',X" deux sous-objets de X tels que pour tout $T \in \mathrm{ob}\, C$, les images de $\mathrm{Hom}(T,X')$ et $\mathrm{Hom}(T,X")$ dans $\mathrm{Hom}(T,X)$ soient égales. Elles sont donc aussi égales à l'image de $\mathrm{Hom}(T,X''')$, où X''' est le produit fibré fibré de X' et X" sur X. Comme C est génératrice pour les monomorphismes, il s'ensuit que les monomorphismes $X''' \longrightarrow X'$ et $X''' \longrightarrow X''$ sont des isomorphismes, donc X' et X'' sont égaux, étant séparément égaux au sous-objet X''' de X .

Prouvons l'assertion non respée. Par définition de la notion de sous-objet strict, il suffit de vérifier que la connaissance de la partie $\mathrm{Hom}(T,X')$ de $\mathrm{Hom}(T,X)$ pour tout $T \in \mathrm{ob}\, C$ implique la connaissance de celles des doubles flèches $X \overset{u,v}{\rightrightarrows} T$ telles que $ui = vi$, où $i: X' \longrightarrow X$ est l'injection canonique. Or comme C est génératrice, la relation $ui = vi$ équivaut à la relation $(ui)f = (vi)f$ pour tout $f \in \mathrm{Hom}(T,X')$, i.e. à $ug = vg$ pour tout $g \in \mathrm{Hom}(T,X)$ provenant de $\mathrm{Hom}(T,X')$ (i.e. de la forme if, avec $f \in \mathrm{Hom}(T,X')$), ce qui prouve notre assertion.

Corollaire 7.5. *Soient* E *une catégorie*, C *une sous-catégorie pleine génératrice*, X *un objet de* C. *Alors un quotient strict* (10.8) X' *de* X *est connu quand on connaît*, *pour tout* $T \in \mathrm{ob}\, C$, *la partie de* $\mathrm{Hom}(T,X)^2$ *formée des couples* (u,v) *tels que* $qu = qv$, *où* $q: X \longrightarrow X'$ *est le morphisme canonique*. *Donc le cardinal de l'ensemble des quotients stricts de* X *est majoré par* $\prod_{T \in \mathrm{ob}\, C} 2^{\mathrm{card}\, \mathrm{Hom}(T,X)^2}$.

En effet, par définitions, un quotient strict X' de X est connu quand on connaît, pour tout objet Y de E, la partie de $\mathrm{Hom}(Y,X) \times \mathrm{Hom}(Y,X)$ formée des couples (u,v) tels que $qu = qv$, où $q: X \longrightarrow X'$ est le morphisme canonique. Or la relation $qu = qv$ équivaut à la relation $(qu)f = (qv)f$ pour tout morphisme $f: T \longrightarrow Y$ de source T dans C, puisque C est génératrice. Cette relation s'écrit encore $q(uf)=q(vf)$, ce qui prouve la première assertion de 7.5. La seconde en résulte aussitôt.

7.5.1. On peut généraliser 7.5, en introduisant, pour une famille d'objets $(X_i)_{i \in I}$ de E, la notion de quotient strict dans E de la famille, par quoi on entend une famille épimorphique stricte $(p_i : X_i \longrightarrow X')_{i \in I}$ de morphismes de E, - étant entendu, comme pour les quotients ordinaires, qu'on identifie deux telles familles $(p_i : X_i \longrightarrow X')$ et $(q_i : X_i \longrightarrow X'')$ si on peut trouver un isomorphisme $v : X' \longrightarrow X''$ (nécessairement unique) tel que l'on ait $fp_i = q_i$ pour tout $i \in I$. Avec cette terminologie, la démonstration de 7.5 s'applique ne varietur pour donner la

Variante 7.5.2. Soient E,C comme dans 7.5, et $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de E. Alors un quotient strict X' de $(X_i)_{i\in I}$ dans E (7.5.1) est connu quand on connaît, pour tout $T \in \text{ob } C$, et tout couple $(i,j) \in I\times I$, la partie de $\text{Hom}(T,X_i)\times\text{Hom}(T,X_j)$ formée des couples (u,v) tels que $p_i u = p_j v$, où pour tout $i\in I$, $p_i : X_i \longrightarrow X'$ désigne le morphisme canonique. Par suite, le cardinal de l'ensemble des quotients stricts de $(X_i)_{i\in I}$ dans E est majoré par $\prod_{T \in \text{ob } C} \prod_{i,j\in I} 2^{\text{card Hom}(T,X_i)\times\text{card Hom}(T,X_j)}$.

7.5.3. On voit tout de suite que la conclusion analogue est vraie si on suppose seulement que C est génératrice pour les monomorphismes stricts, pourvu que l'on suppose que les produits $X_i \times X_j$ sont représentables et que l'on se borne aux quotients effectifs de la famille $(X_i)_{i\in I}$, i.e. aux quotients stricts X' tels que les produits fibrés $X_i \times_{X'} X_j$ soient représentables dans E (ce qui n'est pas une restriction si E est stable par produits fibrés).

Proposition 7.6. *Soient* E *une catégorie,* C *une sous-catégorie pleine de* E *génératrice par épimorphismes* (7.1), π_o = *un cardinal infini* $\geq$ card Fl C, $\pi \geq \pi_o$ *un cardinal,* $(u_i : X_i \longrightarrow X)_{i \in I}$ *une famille épimorphique universelle* (10.3) *dans* E *formée de morphismes* quarrables (10.7) *à sources* $X_i \in$ ob C, *et telle que* card $I \leq \pi$. *Alors* card Fl $C_{/X} \leq \pi^{\pi_o}$.

Soit $T \in$ ob C, il suffira de prouver qu'on a

(7.6.1) $$\text{card Hom}(T,X) \leq \pi^{\pi_o} \quad ,$$

car on en conclura successivement

card ob $C_{/X} \leq (\pi^{\pi_o}) \times$ card ob $C_{/X} \leq (\pi^{\pi_o}) \times \pi_o = \pi^{\pi_o}$, enfin

card Fl $C_{/X} \leq ((\pi^{\pi_o})^2) \times \pi_o = \pi^{\pi_o}$, puisque pour deux objets S,T de $C_{/X}$, on a card $\text{Hom}_{C_{/X}}(S,T) \leq$ car $\text{Hom}_C(S,T) \leq \pi_o$. Pour prouver 7.6.1, notons d'abord le

Lemme 7.6.2. *Soit* J *un ensemble tel que* card J = π_o . *Pour tout objet* T *de* C, *et tout homomorphisme* $f : T \longrightarrow X$, *il existe une famille* $(v_j : S_j \longrightarrow T)_{j \in J}$ *épimorphique, à sources* $S_j \in$ ob C, *et pour tout* $j \in J$ *un* $i(j) \in I$ *et un* $g_j : S_j \longrightarrow X_{i(j)}$ *tels que l'on ait* $u_{i(j)} g_j = f v_j$.

En effet, la famille des $X_i \times_X T \longrightarrow$ est épimorphique par hypothèse, d'autre part, comme C est génératrice par épimorphismes stricts, pour tout i, la famille des flèches $S \longrightarrow X_i \times_X T$ de source $S \in$ ob C est épimorphique, donc par transitivité la famille des flèches $v: S \longrightarrow T$ de source dans ob C qui se factorisent par un des $X_i \times_X T$ est épimorphique. Or ce sont les flèches $v: S \longrightarrow T$ de source dans C pour lesquelles il existe un $i \in I$ et un $g : S \longrightarrow X_i$ tel que $u_i g = fv$. Comme l'ensemble de ces flèches $v: S \longrightarrow T$ est contenu dans Fl C, donc de cardinal $\leq \pi_o$, il peut s'indexer par l'ensemble d'indices J, d'où le lemme.

Notons maintenant qu'un morphisme $f: T \longrightarrow X$ est connu quand on connaît les fv_j, qui sont connus quand on connaît les g_j. Donc card Hom(T,X) est majoré par le cardinal de l'ensemble des familles $(i(j), S_j, v_j, g_j)_{j\in J}$; comme le cardinal de l'ensemble des applications $j \longrightarrow I$ est $\leq \pi^{\pi_o}$, et comme pour une telle application $j \longmapsto i(j)$ fixée, le cardinal de l'ensemble des familles correspondantes S_j, f_j, v_j est majoré par celui de l'ensemble des applications de J dans Fl C $\times$ Fl C, qui est $\leq \pi_o^{\pi_o}$ puisque card(Fl C $\times$ Fl C) $= \pi_o^2 = \pi_o$, on trouve que le premier membre de (7.6.1) est majoré par $\pi^{\pi_o} \times \pi_o^{\pi_o} = \pi^{\pi_o}$, ce qui achève la démonstration de 7.6.

Proposition 7.7. *Soient* E *une catégorie où les produits fibrés sont représentables,* $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ *une famille d'objets de* E *génératrice,* $(\varphi_i)_{i\in I}$ *une famille de foncteurs* $\varphi_i : E \longrightarrow E_i$ *commutant aux produits fibrés. Pour que* (φ_i) *soit conservative* (5.1), *il faut et il suffit que pour tout* $\alpha \in A$ *et pour tout sous-objet* X' *de* X_α *distinct de* X_α, *il existe un* $i \in I$ *tel que* $\varphi_i(X') \longrightarrow \varphi_i(X_\alpha)$ *ne soit pas un isomorphisme. Dans ce cas, si* E *est une* U*-catégorie et si* A *est* U*-petit, il existe une partie* U*-petite* J *de* I *telle que* $(\varphi_j)_{j\in J}$ *soit déjà une famille conservative de foncteurs.*

La nécessité de la condition envisagée de conservativité étant évidente, prouvons sa suffisance. En vertu de 6.1 (iv), il suffit de prouver que (φ_i) est conservative pour les monomorphismes. Soit

$u : Y' \longrightarrow Y$ un monomorphisme dans E qui n'est pas un isomorphisme, il faut prouver qu'il existe $i \in I$ tel que $\varphi_i(u)$ n'est pas un isomorphisme. Par hypothèse sur (X_α), il existe un α et un morphisme $X_\alpha \longrightarrow Y$ qui ne se factorise pas par Y', en d'autres termes, tel que l'image inverse X' de Y' soit un sous-objet de X_α distinct de X_α. Par hypothèse, il existe un $i \in I$ tel que $\varphi_i(X') \longrightarrow \varphi(X)$ ne soit pas un isomorphisme. Comme $\varphi_i(X') \simeq \varphi_i(X_\alpha) \times_{\varphi_i(Y)} \varphi_i(Y')$, il s'ensuit bien que $\varphi_i(Y') \to \varphi_i(Y)$ n'est pas un isomorphisme.

La deuxième assertion de 7.7 résulte aussitôt de la première, compte tenu de 7.4.

Corollaire 7.7.1. Soient E une U-catégorie où les produits fibrés sont représentables, et admettant une famille génératrice d'objets qui soit U-petite. Alors pour toute famille génératrice $(Y_i)_{i\in I}$ de E, il existe une sous-famille génératrice U-petite $(Y_j)_{j\in J}$ (card $J \in U$).

Il suffit en effet d'appliquer 7.7 à une U-petite famille génératrice $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ de E et à la famille des foncteurs φ_i $(i\in I)$ représentés par les Y_i.

Proposition 7.8. Soient E une catégorie, C une sous-catégorie pleine génératrice par épimorphismes stricts, D une catégorie, $\underline{\mathrm{Hom}}'(E,D)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}(E,D)$ formée des foncteurs qui commutent aux limites inductives du type $C_{/X}$, où X est un objet quelconque de E. Alors le foncteur $F \longrightarrow F|C$ induit un foncteur pleinement fidèle

$$\underline{\mathrm{Hom}}'(E,D) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C,D) \quad .$$

<u>Par suite, si Hom(C,D) est une U-catégorie</u> (1.1.), <u>par exemple</u> (1.1.1. b)) <u>si</u> C <u>est U-petite et</u> D <u>est une U-catégorie, alors Hom</u>(E,D) <u>est également une U-catégorie</u>.

Soient $F,G: E \longrightarrow D$ deux foncteurs dans le premier membre, et $u:F \longrightarrow G$ un homomorphisme. Si $X = \varinjlim X_i$ dans E et si F et G commutent à la limite inductive envisagée, alors $u(X): F(X) \longrightarrow G(X)$ s'identifie à la limite des morphismes $u(X_i): F(X_i) \longrightarrow G(X_i)$, et est donc connu quand on connaît les $u(X_i)$. Ceci montre que le foncteur envisagé dans 7.8 est fidèle, compte tenu de l'implication a) $\Longrightarrow$ b) dans 7.2 (i). Soit inversement $v : F|D \longrightarrow G|D$ un homomorphisme, prouvons qu'il provient d'un homomorphisme $u: F \longrightarrow G$. On définira, pour tout $X \in \operatorname{ob} E$,

$$u(X) \ : \ F(X) = \varinjlim_{C_{/X}} F(X_i) \longrightarrow G(X) = \varinjlim_{C_{/X}} G(X_i)$$

comme la limite inductive des $v(X_i)$. Il est immédiat que l'on obtient bien un homomorphisme fonctoriel en X, donc un $u: F \longrightarrow G$, en enfin que le morphisme induit par u de $F|C'$ dans $G|C'$ est v, ce qui achève la démonstration.

7.9. <u>Familles et sous-catégories cogénératrices</u>. Soient E une catégorie, C une sous-catégorie pleine de E. On dit que C est cogénératrice par monomorphismes stricts (resp. cogénératrice par monomorphismes, resp. cogénératrice, resp. cogénératrice pour les épimorphismes, resp. cogénératrice pour les épimorphismes stricts) si la sous-catégorie pleine C° de E° est génératrice par épimorphismes stricts (resp. .....). Terminologie analogue pour les familles. Tous les résultats du présent numéro concernant la notion de sous-catégorie génératrice et ses variantes (7.1), redonnent donc des résultats correspondants pour les notions duales, que nous laissons au lecteur le soin de formuler pour sa satisfaction personnelle.

Proposition 7.10. Soient E une catégorie, C une sous-catégorie pleine génératrice (7.1), D une sous-catégorie pleine de E . Pour que D soit cogénératrice (7.9), il faut et il suffit que pour toute double flèche $T \overset{u,v}{\rightrightarrows} X$ dans E de source $T \in \mathrm{ob}\, C$, avec $u \neq v$, il existe une flèche $w: X \longrightarrow I$ de but $I \in \mathrm{ob}\, D$, telle que $wu \neq wv$.

Par définition, dire que D est cogénératrice signifie que pour toute double flèche $Y \overset{u,v}{\rightrightarrows} X$ dans E telle que $u \neq v$, il existe une flèche $w: X \longrightarrow I$, avec $I \in \mathrm{ob}\, D$, telle que $wu \neq wv$. Donc 7.10 signifie simplement qu'il suffit de tester cette propriété lorsque $Y \in \mathrm{ob}\, C$. Or comme C est génératrice, l'hypothèse $u \neq v$ implique qu'il existe $f: T \longrightarrow Y$ telle que $uf \neq vf$, d'où par hypothèse l'existence d'une $w: X \longrightarrow I$ de but $I \in \mathrm{ob}\, D$ telle que $w(uf) \neq w(vf)$, d'où $wu = wv$, cqfd.

Corollaire 7.11. Les notations étant celles de 7.10, supposons que les objets I de D sont des objets **injectifs de** E, i.e. tels que pour tout monomorphisme $X \longrightarrow Y$ dans E, l'application $\mathrm{Hom}(Y,I) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,I)$ correspondante soit surjective. Supposons de plus que toute double flèche $T \overset{u,v}{\rightrightarrows} X$ dans E se factorise en une double flèche épimorphique (resp. épimorphique effective) $T \overset{u',v'}{\rightrightarrows} X'$ suivie d'un monomorphisme $i: X' \to X$. Alors dans le critère 7.10 pour que D soit cogénératrice, on peut se borner aux doubles flèches (u,v) qui sont épimorphiques (resp. épimorphiques effectives).

On en conclut :

Corollaire 7.12. Soit E une U-catégorie admettant une petite sous-catégorie génératrice C, et telle que tout objet de E soit source d'un monomorphisme dans un objet injectif de E. Supposons de plus que pour tout $T \in$ ob C, la somme $T \amalg T$ dans E soit représentable, et que tout morphisme de source $T \amalg T$ se factorise en un épimorphisme effectif suivi d'un monomorphisme. Alors E admet une petite sous-catégorie pleine D cogénératrice. De façon précise, on peut prendre D telle que card ob $D \leq \prod_{T,T' \in \text{ob } C} 2^{\text{card}(\text{Hom}(T', T \amalg T))^2}$.

En effet, en vertu de 7.11, il suffit pour tout $T \in$ ob C et pour tout quotient effectif X de $T \amalg T$, de choisir un plongement de X dans un objet injectif I de E, et de prendre pour D la sous-catégorie pleine de E engendrée par ces I. La conclusion résulte alors de 7.5.

Exemples 7.13. Pour construire de petites sous-catégories cogénératrice en termes de petites sous-catégories génératrices, on est donc amené à chercher des conditions pour qu'une U-catégorie E admette "suffisamment d'injectifs", i.e. que tout objet se plonge dans un objet injectif (par un monomorphisme). Il est bien connu [Tohoku] que cette condition est satisfaite dans une U-catégorie abélienne à (petites) limites inductives filtrantes exactes (axiome AB 5 de loc. cit.) admettant une petite famille génératrice. La construction de loc. cit. n'est d'ailleurs pas liée de façon essentielle aux catégories abéliennes, et marche également dans la catégorie des faisceaux de U-ensembles sur un espace topologique $X \in$ U. Nous n'énoncerons pas ici les propriétés d'exactitude qui font marcher la construction en question, et nous bornerons à signaler que dans le cas particulier de la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X, on se ramène immédiatement au cas de loc. cit. de la façon suivante. On note que si $\underline{O}_X$ est un Anneau sur X, alors tout objet injectif I de la catégorie des $\underline{O}_X$-Modules est aussi injectif en tant qu'objet de la catégorie des faisceaux d'ensembles. En effet, si F est un faisceaux d'ensembles, et $\underline{O}_X[F]$ le "$\underline{O}_X$-Module libre engendré par F ", on a par définition un homomorphisme de faisceaux d'ensembles

(*) $$F \longrightarrow \underline{O}_X[F]$$

donnant lieu à un isomorphisme, fonctoriel en F

$$\mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(\underline{O}_X[F], I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(F,I) \quad .$$

Comme le foncteur $F \longmapsto \underline{O}_X[F]$ transforme manifestement monomorphisme en monomorphisme, il s'ensuit aussitôt que si I est un $\underline{O}_X$-Module injectif, c'est aussi un faisceau d'ensembles injectif. Il s'ensuit que si le morphisme (*) est un monomorphisme (ce qui est le cas si on prend pour $\underline{O}_X$ un Anneau constant de valeur un anneau $A \neq 0$), alors un plongement de $\underline{O}_X[F^*]$dans un $\underline{O}_X$-Module injectif I donne un plongement de F dans le faisceau d'ensembles injectif sous-jacent à I .

Le même argument s'applique, sans changement, au cas de la catégorie des faisceaux de $\underline{U}$-ensembles sur un $\underline{U}$-site, qui sera introduite dans l'exposé suivant.

L'intérêt de l'existence d'une petite sous-catégorie cogénératrice réside surtout dans le critère de représentabilité 8.12.7 plus bas.

8. Ind-objets et pro-objets

8.1. Foncteurs cofinaux et sous-catégories cofinales

Définition 8.1.1. *Soit*

(8.1.1.1) $$\varphi : I \longrightarrow I'$$

un foncteur. On dit que φ *est un* foncteur cofinal *si pour toute catégorie* C *et pour tout foncteur* $u : I' \longrightarrow C$, *considérant* $\varinjlim u$ *et* $\varinjlim u\circ\varphi$ *comme des objets de* $\underline{\mathrm{Hom}}(G(\underline{V}\text{-}\mathrm{Ens}))^{\circ}$ (2.1, 2.3.1) (*où* $\underline{V}$ *est un univers tel que* $I, I' \in \underline{V}$, *et que* C *soit une* $\underline{V}$-*catégorie*), *le morphisme canonique*

(8.1.1.2) $$\varinjlim u\circ\varphi \longrightarrow \varinjlim u$$

est un isomorphisme. Lorsque φ *est le foncteur d'inclusion d'une sous-catégorie de* I', *on dit que* I *est une* sous-catégorie cofinale *si* φ *est cofinal.*

8.1.2. Remarquons que pour φ,u données, la bijectivité de (8.1.1.2) ne dépend pas du choix de l'univers $\underline{V}$.

Revenant à la définition des termes figurant dans (8.1.1.2) (2.1, 2.3.1), on voit que dire que φ est cofinal signifie aussi que pour tout univers $\underline{V}$ tel que I et I' soient $\underline{U}$-petits, et tout foncteur

$$v : I'^{\circ} \longrightarrow (\underline{V}\text{-}\mathrm{Ens}) \quad ,$$

l'homomorphisme canonique

(8.1.2.1) $$\varprojlim v \longrightarrow \varprojlim v\circ\varphi$$

est un isomorphisme i.e. une bijection. Pour voir que cette condition est bien nécessaire, on observera, posant $u = v^{\circ}$, qu'elle signifie aussi que la condition de la définition 8.1.1 est remplie quand on y fait $C = (\underline{V}\text{-}\mathrm{Ens})^{\circ}$

(ce qui implique que les limites inductives envisagées dans (8.1.1.2) sont représentables dans C).

8.1.2.2. Il est immédiat sur la définition que <u>le composé de deux foncteurs cofinaux est cofinal</u>.

<u>Proposition</u> 8.1.3. <u>Soit</u> $\varphi : I \longrightarrow I'$ <u>un foncteur</u>.

a) <u>Pour que</u> φ <u>soit cofinal</u>, <u>il</u> faut <u>que</u> φ <u>satisfasse la condition</u> :

F 1) <u>Pour tout objet</u> i' <u>de</u> I', <u>il existe un objet</u> i <u>de</u> I <u>tel que</u> $\varphi(i)$ majore i' (<u>i</u>.<u>e</u>. <u>tel que</u> $\mathrm{Hom}(i',\varphi(i)) \neq \emptyset$).

b) <u>Supposons</u> I <u>filtrante</u>. <u>Pour que</u> φ <u>soit cofinal</u>, <u>il faut et il suffit que</u> φ <u>satisfasse la condition</u> F 1) <u>ainsi que la condition suivante</u> :

F 2) <u>Pour tout objet</u> i <u>de</u> I <u>et toute double flèche</u> $i' \overset{f',g'}{\rightrightarrows} \varphi(i)$ <u>dans</u> I' <u>de but</u> $\varphi(i)$, <u>il existe une flèche</u> $h : i \longrightarrow j$ <u>dans</u> I <u>telle que</u> $\varphi(h)f' = \varphi(h)g'$.

<u>De plus</u>, <u>si</u> φ <u>est cofinal</u>, I' <u>est filtrante</u>.

c) <u>Supposons</u> I' <u>filtrante</u>, <u>et</u> φ <u>pleinement fidèle</u>. <u>Pour que</u> φ <u>soit cofinal</u>, <u>il faut et il suffit qu'il satisfasse la condition</u> F 1) <u>de</u> a). <u>Cela implique que</u> I <u>est filtrante</u>.

<u>Démonstration</u>. Pour la nécessité dans a) et b), on utilisera la définition 8.1.1 dans le seul cas où u est le foncteur d'inclusion canonique (1.3.3)

$$u : I' \hookrightarrow \hat{I}'$$

(un univers <u>U</u> tel que I,I' soient <u>U</u>-petits étant choisi). On peut alors interpréter (8.1.1.2) comme une flèche de $\hat{I}'$ (3.1), dont le but est le foncteur final sur I' (3.4). On voit immédiatement que la condition F 1) exprime que cette flèche est un épimorphisme de $\hat{I}'$, i.e. est surjective sur chaque argument (compte tenu que les limites inductives dans $\hat{I}'$ se calculent "argument par argument "). Cela prouve a). Supposons maintenant I filtrante et φ cofinal. Alors I est filtrante : en effet, la condition que deux objets de I' soient majorés par un troisième résulte aussitôt de la même condition sur I, et de F 1), et il faut seulement encore prouver la condition PS 2) de 2.7, i.e. que pour toute double flèche

$$f',g' : i' \rightrightarrows j'$$

dans I', il existe une flèche $h' : j' \longrightarrow k'$ de I' telle que $h'f'=h'g'$. Or en vertu de F 1) on peut supposer k' de la forme $\varphi(i)$. Mais comme par l'hypothèse φ cofinal, pour tout objet i' de I' $\varinjlim_i \mathrm{Hom}(i',\varphi(i))$ est l'ensemble réduit à un élément, il résulte de la description standard des limites inductives filtrantes dans (Ens) (2.8.1) que cela implique l'existence d'une flèche $h: i \longrightarrow j$ dans I telle que $\varphi(h)f' = \varphi(h)g'$. Cela achève donc de prouver que I' est filtrant, et prouve en même temps la condition F 2).

Pour prouver que les conditions énoncées dans b) sont suffisantes pour que φ soit cofinal, on utilise la forme 8.1.2 de la définition. On constate aussitôt que la condition F 1) implique que (8.1.2.1) est un monomorphisme i.e. est injectif sur chaque argument, tandis que la condition F 2) (jointe à F 1) assure qu'il est bijectif (compte tenu du calcul des limites projectives dans $\widehat{I'^{\circ}}$ argument par argument). Cela prouve donc b).

Enfin, si I' est filtrante et φ pleinement fidèle, alors il est immédiat que la condition F 1) implique que I est filtrante, et implique la condition F 2). Donc c) résulte de a) et de b).

8.1.4. Lorsque I' est une catégorie filtrante, I une sous-catégorie pleine de I', on voit donc par 8.1.3 c) que la condition que I soit cofinale dans I' ne dépend que de la partie Ob I de l'ensemble préordonné OB I' (pour la relation de préordre " $x \leq y$" $\Longleftrightarrow$" $\mathrm{Hom}(x,y) \neq \emptyset$ "). Si J' est un ensemble préordonné, J une partie de J', on dira parfois que J est une <u>partie cofinale de</u> J' lorsque tout élément de J' est majoré par un élément de J . Lorsque J' est filtrante, cela signifie donc que le foncteur d'inclusion $\underline{J} \hookrightarrow \underline{J}'$ pour les catégories associées est cofinal.

8.1.5. Dans la suite, nous n'utiliserons la notion de foncteur cofinal que dans les cas où les catégories I et I' sont filtrantes. Classiquement, on se bornait même à des catégories associées à des ensembles préordonnés (i.e. dans lesquelles il existe au plus une flèche de source et de but donnés). Il apparaît cependant que cette restriction est gênante dans les applications, les catégories filtrantes "naturelles" qui s'introduisent dans de nombreuses applications n'étant <u>pas</u> des catégories ordonnées. Le résultat suivant, dû à P. DELIGNE, montre cependant qu'il n'y a pas de différence essentielle entre les deux points de vue :

<u>Proposition</u> 8.1.6. <u>Soit</u> I <u>une petite catégorie filtrante. Alors il existe un petit ensemble ordonné</u> E, <u>et un foncteur cofinal</u> φ : $\underline{E} \longrightarrow$ I, <u>où</u> $\underline{E}$ <u>désigne la catégorie associée à</u> E.

Supposons d'abrod que l'ensemble préordonné Ob I n'ait pas de plus grand élément. Appelons sous-diagramme de I un couple $D = (\underline{O}, F)$ formé d'une partie F de $F\ell$ (I) et d'une partie $\underline{O}$ de Ob I, tel que pour toute $f \in F$, la source et le but de f appartiennent à $\underline{O}$. Un élément e de $\underline{O}$ est appelé <u>objet final</u> du sous-diagramme D si pour tout $x \in D'$, l'ensemble $\mathrm{Hom}(x,e) \cap F$ des flèches de D de source x et de but y a exactement un élément f_x , si pour toute flèche $g : x \longrightarrow y$ de D, on a $f_x = f_y \circ g$, et si $f_e = id_e$. Soit E l'ensemble des sous-diagrammes <u>finis</u> D de I ayant un élément final <u>unique</u> $\varphi(D)$, et ordonnons E par inclusion. Si D,D' sont deux éléments de E et $D \subset D'$, alors il existe une unique flèche $\varphi(D',D)$ de D' de source $\varphi(D)$, de but $\varphi(D')$, et si on a des inclusions $D \subset D' \subset D''$ dans E, on a évidemment $\varphi(D'',D) = \varphi(D'',D')\varphi(D',D)$; on a également $\varphi(D,D) = id_{\varphi(D)}$. On trouve donc un foncteur $\varphi : \underline{E} \longrightarrow I$, et tout revient à prouver que E est filtrant et que φ est cofinal. Compte tenu de 8.1.3 b), on doit faire trois vérifications :

1) Condition F 1) de 8.1.3 : pour tout $i \in I$, on prend pour D le sous-diagramme de I réduit à l'objet i et sa flèche identique, alors $i \leq \varphi(D) = i$. Cette condition F 1) montre en même temps que $E \neq \emptyset$.

2) Condition F 2) : Pour tout $i \in$ Ob I, tout $D \in E$ et toute double flèche $i \rightrightarrows \varphi(D)$, trouver un diagramme $D' \in E$, contenant D, tel que $\varphi(D',D) : \varphi(D) \longrightarrow \varphi(D')$ <u>égalise</u> la double flèche. Or comme I est filtrant,

il existe un objet j de I et une flèche $f: \varphi(D) \longrightarrow j$ qui égalise la double flèche. Comme I n'a pas de plus grand élément, on peut supposer que j est un majorant <u>strict</u> de $\varphi(D)$, ce qui implique qu'il est distinct de tous les autres objets de D . Soit alors D' le sous-diagramme de I dont l'ensemble d'objets est $\underline{O}\cup\{j\}$, et l'ensemble des flèches est formé des flèches de D,plus les composés $x \xrightarrow{f_x} \varphi(D) \xrightarrow{f} j$, où x est un objet de D et f_x est l'unique flèche de D de source x et de but $\varphi(D)$, et id_j . Il est clair alors que D' est un sous-diagramme fini de I , qu'il admet j comme unique objet final, donc $D' \in E$, et D' satisfait à la condition voulue.

3° Deux sous-diagrammes $D,D' \subset E$ sont contenus dans un même $D'' \in E$. On peut en effet trouver un majorant strict j de $\varphi(D)$ et de $\varphi(D')$,

$$\begin{tikzcd}
\varphi(D) \arrow[dr, "f"] & \\
& j \\
\varphi(D') \arrow[ur, "f'"'] &
\end{tikzcd} ,$$

et on prend pour D" le sous-diagramme dont l'ensemble des objets est la réunion de l'ensemble des objets de D, de D' et de $\{j\}$, et l'ensemble des flèches est la réunion de l'ensemble des flèches de D, de D', de l'ensemble des composés $f\circ f_x$ (x objet de D) et $f'\circ f'_{x'}$ (x' objet de D'), et $\{id_j\}$. On obtient bien ainsi un sous-diagramme fini de E, montrons que, quitte à remplacer j,f,f' par j',gf,gf' avec $g:j \longrightarrow j'$ convenable, on peut obtenir que j soit un objet final de D' . Il revient au même de dire que pour tout x qui est à la fois objet de D et de D', on a $ff_x = f'f'_{x'}$. Or c'est là d'un ensemble <u>fini</u> de doubles-flèches qu'il s'agit d'égaliser par un g: $j \longrightarrow j'$, ce qui est possible puisque I est filtrante.

Cela achève la démonstration dans le cas envisagé. On ramène le cas général à celui-ci, en introduisant la catégorie filtrante $\mathbb{N}$ associée à l'ensemble ordonné $\mathbb{N}$ des entiers naturels, et en notant que la catégorie $\mathbb{N} \times I$ est filtrante, qu'elle n'a pas de plus grand élément, et que la projection $\mathbb{N} \times I \longrightarrow I$ est un foncteur cofinal.

Corollaire 8.1.7. *Soit* I *une* *U-catégorie*. *Pour qu'il existe un petit ensemble ordonné filtrant* E , *et un foncteur cofinal* $E \longrightarrow I$, *il faut et il suffit que* I *soit filtrante et que* Ob I *admette une petite partie cofinale* I' (8. 1.4).

C'est nécessaire en vertu de 8.1.3 a), et suffisant en vertu de 8.1.6 appliqué à la sous-catégorie pleine de I définie par I' .

Définition 8.1.8. *Soit* I *une catégorie filtrante*. *On dit que* I *est* *essentiellement* **petite** *si* I *est une* *U-catégorie*, *et si elle satisfait aux conditions équivalentes de* 8.1.7.

8.2. *Ind-objets et foncteurs ind-représentables*.

8.2.1. Nous fixons dans la suite une *U*-catégorie C, que nous considérons toujours comme plongée dans la catégorie $\hat{C}$ des *U*-préfaisceaux à l'aide du foncteur canonique (1.3.1)

(8.2.1.1) $h: C \hookrightarrow \hat{C}$.

Nous appelerons *ind-objet de* C (ou *système inductif* de C), tout foncteur

(8.2.1.2) $\varphi : I \longrightarrow C$,

où I est une catégorie filtrante (2.7), appelée la catégorie d'indices du ind-objet. (I est par ailleurs quelconque, et nous n'exigeons pas, notamment, que I soit une $\underline{U}$-catégorie.) Il sera souvent commode de désigner un ind-objet φ par la notation indicielle $(X_i)_{i \in \mathrm{ob}\, I}$, ou même (par nouveau abus de notation) $(X_i)_{i \in I}$, ou $(X_i)_i$ ou (X_i), où $X_i = \varphi(i)$ pour $i \in \mathrm{ob}\, I$. Cette notation n'est ni plus ni moins abusive que la notation utilisée classiquement pour les systèmes inductifs indexés par les ensembles ordonnés filtrants (où la mention des morphismes de transition est également absente). Les X_i s'appellent les objets composants du ind-objet $\underline{X}$. On fera attention que dans le cas général envisagé ici, les "morphismes de transition" $\varphi(f)$ du système inductif sont indexés par l'ensemble Fl I des flèches de I, qui ne s'identifie pas en général à une partie de Ob I × Ob I ; en d'autres termes, pour i et j donnés, j majorant i, il peut exister plus d'un morphisme de transition de X_i dans X_j .

8.2.2. Les ind-objets $\underline{X} = (X_i)_{i \in I}$ de C les plus utiles sont ceux pour lesquels la catégorie d'indices I est essentiellement petite (8.1.8) ; un tel ind-objet est appelé essentiellement petit. Si $(X_i)_{i \in I}$ est ainsi, utilisant le fait que dans $\hat{C}$ les petites limites inductives sont représentables (3.1), on peut considérer

(8.2.2.1) $$L(\underline{X}) \overset{\mathrm{dfn}}{=\!=} \varinjlim h \circ \underline{X} = \varinjlim_{I} X_i \in \mathrm{ob}\, \hat{C} \quad ,$$

où la dernière limite est prise dans $\hat{C}$. Donc $L(\underline{X})$ est le préfaisceau

(8.2.2.2) $$L(\underline{X}) : \quad Y \longmapsto \varinjlim_{i} \mathrm{Hom}(Y, X_i)$$

sur C. On dit que ce préfaisceau est le <u>préfaisceau ind-représenté par le ind-objet</u> $\underline{X} = (X_i)_{i \in I}$ <u>de</u> C . Un préfaisceau F sur C est appelé un <u>préfaisceau ind-représentable</u> s'il est isomorphe à un préfaisceau $L(\underline{X})$ ind-représenté par un ind-objet essentiellement petit. Il résulte d'ailleurs de 8.1.6 que dans cette définition, on peut supposer que I est une petite catégorie, et même que I est associée à un ensemble ordonné $\in \underline{U}$.

8.2.3. Considérons un ind-objet $\underline{X} = (X_i)_{i \in I}$, donné par un foncteur $\varphi : I \longrightarrow C$, et soit

$$u : I' \longrightarrow I$$

un foncteur, où I est une deuxième catégorie filtrante. Alors le foncteur $\varphi \circ u$ est un ind-objet $\underline{X}'$ de C de catégorie d'indices I' , qui en notation indicielle s'écrit $(X_{u(i')})_{i' \in I'}$, qu'on appelle le ind-objet de C <u>déduit de</u> $(X_i)_{i \in I}$ par <u>changement de catégories d'indices</u> à l'aide du foncteur u . Si I et I' (i.e. $\underline{X}$ et $\underline{X}'$) sont essentiellement petits, on trouve un morphisme canonique

(8.2.3.1) $$L(\underline{X}') = \varinjlim_{i'} X_{u(i')} \longrightarrow L(\underline{X}) = \varinjlim_{i} X_i$$

entre les préfaisceaux ind-représentés par $\underline{X}'$ et $\underline{X}$ respectivement. Lorsque u est un foncteur cofinal (8.1.1), alors $\underline{X}$ est essentiellement petit si et seulement si $\underline{X}'$ l'est (8.1.7), et l'homomorphisme précédent (8.2.3.1) est un isomorphisme

(8.2.3.2) $$L(\underline{X}') \simeq L(\underline{X}) \quad .$$

8.2.4. Soient

(8.2.4.1) $$\underline{X} = (X_i)_{i\in I} \ , \ \underline{Y} = (Y_j)_{j\in I}$$

deux ind-objets de C essentiellement petits, indexés par des catégories (filtrantes et essentiellement petites) I et J . On appelle <u>morphisme</u> du ind-objet $\underline{X}$ dans le ind-objet $\underline{Y}$ tout morphisme

(8.2.4.2) $$L(\underline{X}) \longrightarrow L(\underline{Y})$$

entre les préfaisceaux qu'ils ind-représentent. On pose

(8.2.4.3) $$\mathrm{Hom}_{\text{ind-ob}}(\underline{X},\underline{Y}) = \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(L(\underline{X}),L(\underline{Y})) \quad .$$

(On supprime l'indice ind-ob au Hom si on ne craint pas de confusion). On définit la composition des ind-objets de $\underline{C}$ comme la composition des morphismes des préfaisceaux qu'ils ind-représentent. Si $\underline{V} \supset \underline{U}$ est un univers contenant $\underline{U}$, et si on se borne aux ind-objets essentiellement petits qui sont $\in \underline{V}$, ceux-ci forment donc l'ensemble d'objets d'une catégorie, dont l'ensemble des flèches est formé des triples $(\underline{X},\underline{Y}, u)$, où $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ sont des ind-objets essentiellement petits $\in \underline{V}$ et où $u: \underline{X} \to \underline{Y}$ est un morphisme de ind-objets, i.e. un morphisme $L(\underline{X}) \longrightarrow L(\underline{Y})$. La catégorie ainsi obtenu est notée

(8.2.4.4) $$\mathrm{Ind}_{\underline{V}}(C,\underline{U}) \quad .$$

Lorsque $\underline{V} = \underline{U}$, on la note simplement

(8.2.4.5) $$\mathrm{Ind}_{\underline{U}}(C) \quad \text{ou} \quad \mathrm{Ind}(C) \quad ,$$

et on l'appelle <u>catégorie des ind-objets de</u> C relativement à $\underline{U}$, en supprimant la mention de $\underline{U}$ quand aucune confusion n'est à craindre.

Evidemment, si $\underline{V} \subset \underline{V}'$ sont deux univers contenant $\underline{U}$, $\mathrm{Ind}_{\underline{V}}(C,\underline{U})$ est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ind}_{\underline{V}'}(,\underline{U})$; il résulte alors de 8.2.3 que le foncteur d'inclusion est une <u>équivalence de catégories</u> :

(8.2.4.6) $$\mathrm{Ind}_{\underline{V}}(C,\underline{U}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ind}_{\underline{V}'}(C,\underline{U}) \quad .$$

Cela montre en particulier que <u>tout ind-objet essentiellement petit de</u> C <u>définit un élément de</u> Ind(C), <u>à isomorphisme unique près</u>. Cette constation justifie l'abus de langage, assez courant en pratique, consistant à identifier tout ind-objet essentiellement petit de C à un objet de Ind(C).

Il résulte aussitôt des définitions que pour tout univers $\underline{V}$, nous avons un foncteur canonique

(8.2.4.7) $$L : \mathrm{Ind}_{\underline{V}}(C,\underline{U}) \longrightarrow \hat{C}$$

qui est pleinement fidèle. Ces foncteurs sont évidemment connus à isomorphisme unique près, grâce à (8.2.4.6), lorsqu'on connaît l'un d'eux, et en particulier lorsqu'on connaît le foncteur canonique

(8.2.4.8) $$L : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \hat{C} \quad .$$

Comme ce foncteur est pleinement fidèle, on l'utilise fréquemment pour identifier un objet du premier membre avec le foncteur qu'il pro-représente, voire pour identifier Ind(C) avec son image essentielle dans $\hat{C}$, formée des préfaisceaux ind-représentables. On fera attention cependant que cette identification présente nettement plus d'inconvénients que l'identification analogue de C à une sous-catégorie pleine de $\hat{C}$ par le foncteur h (8.2.1.1), car contrairement à ce dernier, le foncteur (8.2.4.8) n'est pas en général injectif sur les objets.

8.2.5. Explicitons la définition (8.2.4.3) en termes des expressions indicielles (8.2.4.1) des ind-objets considérés. On trouve, compte tenu de la définition (8.2.2.1) :

$$\mathrm{Hom}(\underline{X},\underline{Y}) \simeq \varprojlim_i \mathrm{Hom}(X_i,\underline{Y}) \overset{\text{dfn}}{=} \varprojlim_i \mathrm{Hom}(X_i,L(\underline{Y})) = \varprojlim_i \varinjlim_j \mathrm{Hom}_C(X_i,Y_j),$$

la dernière égalité provenant de (8.2.2.2) appliqué à $\underline{Y}$. On trouve donc une bijection canonique

$$(8.2.5.1) \qquad \mathrm{Hom}((X_i)_{i\in I},(Y_j)_{j\in J}) \simeq \varprojlim_{i\in I} \varinjlim_{j\in J} \mathrm{Hom}_C(X_i,Y_j) \quad .$$

Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter la composition des morphismes de ind-objets sur cette formule. Notons qu'il résulte aussitôt de cette formule que l'ensemble Hom $(\underline{X},\underline{Y})$ d'homomorphismes de ind-objets est $\underline{U}$-petit, i.e. que les catégories (8.2.4.4) sont des $\underline{U}$-catégories. Il revient au même de dire (en vertu de (8.2.4.6)) que la catégorie Ind(C) est une $\underline{U}$-catégorie, i.e. que le deuxième membre de (8.2.5.1) est petit lorsque $I,J\in\underline{U}$, ce qui résulte aussitôt du fait que C est une $\underline{U}$-catégorie donc les $\mathrm{Hom}_C(X_i,Y_j)$ sont petits.

8.2.6. Soit I une catégorie filtrante essentiellement petite. Alors on voit sur (8.2.5.1), ou sur la fonctorialité de la limite inductive d'un foncteur $I \longrightarrow \hat{C}$ par rapport au dit foncteur, qu'on a un foncteur canonique

$$(8.2.6.1) \qquad \underline{\mathrm{Hom}}(I,C) \longrightarrow \mathrm{Ind}(C) \quad .$$

On fera attention que ce foncteur n'est pas en général pleinement fidèle, ni même fidèle.

Remarque 8.2.7. Les définitions de 8.2.4 rendent claire la notion d'isomorphie de deux ind-objets (essentiellement petits), qui signifie aussi l'isomorphie des préfaisceaux qu'ils ind-représentent. On fera attention que c'est une notion d'isomorphie très faible, si on la compare à la notion d'isomorphie dans des catégories de la forme Hom(I,C). Ainsi, un grand nombre de relations assez naturelles qu'on peut imposer à un ind-objet (tel que celle d'avoir ses composantes dans une sous-catégorie strictement pleine donnée, ou celle d'être strict (8.12 ci-dessous)) ne sont pas stables par isomorphisme. Il faudra donc, si on tient à travailler avec des notions stables par isomorphisme de ind-objets, "saturer" les notions envisagées en passant à la sous-catégorie strictement pleine de Ind(C) engendrée par la sous-catégorie de Ind(C) formée des objets satisfaisant à la condition envisagée. Voir par exemple la notion de ind-objet essentiellement constant, introduite plus bas (8.4).

Exercice 8.2.8. Soient $\underline{U} \subset \underline{V}$ deux univers et C un $\underline{U}$-catégorie qui appartienne à $\underline{V}$. On désigne par SysInd(C) la catégorie suivante :

a) Les objets de SysInd(C) sont les foncteurs $\varphi : I \longrightarrow C$ où I est une catégorie filtrante essentiellement $\underline{U}$-petite appartenant à $\underline{V}$.

b) Soient (I,φ) et (J,ψ) deux objets de SysInd(C). Un morphisme de SysInd(C) de (I,φ) dans (J,ψ) est un couple (m,u), où $m : I \longrightarrow J$ est un foncteur et où $u : \varphi \longrightarrow \psi \circ m$ est un morphisme de foncteurs. La composition des morphismes dans SysInd(C) se définit de manière évidente.

Notons S l'ensemble des morphismes $(m,u):(I,\varphi) \longrightarrow (J,\psi)$ de SysInd(C) tel que m soit cofiral et u un isomorphisme. Soit (I,φ) un objet de SysInd(C). La catégorie Fl(I) des flèches de I s'envoie par deux foncteurs naturels dans I : la source et le but. De plus ces deux foncteurs sont liés par le morphisme canonique de foncteurs v : source $\longrightarrow$ but. D'où deux morphismes dans SysInd(C) de$(\mathrm{Fl}(I),\varphi\circ\mathrm{source})$ dans (I,φ) : $p_1(I,\varphi) = (\mathrm{source}, \mathrm{id})$, $p_2(I,\varphi)=(\mathrm{but},\varphi * v : \varphi\circ\mathrm{source} \rightarrow \varphi\circ\mathrm{but})$. Notons p : SysInd(C) $\longrightarrow$ Ind(C) le foncteur évident. Soit B une catégorie. Montrer que le foncteur $F \longmapsto F\circ p$:

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Ind}(C),B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{SysInd}(C),B)$$

est pleinement fidèle, et qu'un foncteur G : SysInd(C) $\longrightarrow$ B appartient à l'image essentielle si et seulement s'il possède les deux propriétés suivantes :

1) Pour tout $s \in S$, F(s) est un isomorphisme de B .
2) Pour tout objet (I,φ) de SysInd(C), $F(p_1(I,\varphi)) = F(p_2(I,\varphi))$.

8.3. Caractérisation des foncteurs ind-représentables

Proposition 8.3.1. *Soit F un préfaisceau ind-représentable sur C. Alors F est exact à gauche, i.e. (2.3.2) pour toute catégorie finie J et tout foncteur $\varphi : J \longrightarrow C$ tel que $\varinjlim \varphi$ soit représentable (i.e. $\varprojlim \varphi^{\circ}$ soit représentable), l'application canonique*

$$F(\varinjlim \varphi) \longrightarrow \varprojlim F\circ\varphi$$

est bijective.

En effet, les préfaisceaux représentables étant évidemment exacts à gauche, il résulte aussitôt de 2.8 qu'il en est de même de toute limite inductive filtrante de tels foncteurs, cqfd.

8.3.2. F étant un préfaisceau sur C, nous aurons à travailler souvent avec la catégorie

(8.3.2.1) $$C_{/F} \hookrightarrow \hat{C}_{/F} \quad ,$$

qui désigne la sous-catégorie pleine du deuxième membre formée des flèches $X \longrightarrow F$ <u>de source dans</u> C . Il résulte de 1.4 que les objets de cette catégorie s'identifient aux couples (X,u), où X est un objet de C et $u \in F(X)$. Un morphisme de (X,u) dans (X',u') s'interprète alors comme une flèche $f: X \longrightarrow X'$ dans C telle que l'on ait $F(f)(u') = u$. Le foncteur "oubli du but" de $\hat{C}_{/F}$ dans $\hat{C}$ induit un foncteur (qualifié de <u>canonique</u>).

(8.3.2.2) $$C_{/F} \longrightarrow C \quad ,$$

déjà considéré dans 3.4, où on prouve que la limite inductive de ce foncteur existe dans $\hat{C}$ (sans condition de petitesse sur $C_{/F}$!) et est isomorphe canoniquement à F .

8.3.2.3. Notons que si dans C les limites inductives finies sont représentables, et si F est exact à gauche (i.e. les transforme en limites projectives finies de (Ens)), alors il en est de même dans $C_{/F}$, et fortiori (2.7.1) $C_{/F}$ est filtrante. Si, plus généralement, dans C les sommes de deux objets et les conoyaux de doubles flèches sont représentables, et si F les transforme en produits resp. en noyaux, alors $C_{/F}$ est stable sous les mêmes types de limites inductives finies, donc elle est filtrante si et seulement si elle est non vide, i.e. si et seulement si le foncteur F n'est pas le foncteur constant de valeurs $\emptyset$.

Théorème 8.3.3. *Soient* C *une* U-*catégorie*, *et* $F \in \mathrm{ob}\, \hat{C}$, $F : C^{\circ} \longrightarrow$ (U-Ens) *un* U-*préfaisceau sur* C . *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) F *est ind-représentable* (8.2.2).

(ii) *La catégorie* $C_{/F}$ (8.3.2) *est filtrante et essentiellement petite*.

(iii) (*Si dans* C *les limites inductives finies sont représentables*.) *Le foncteur* F *est exact à gauche*, *et* ob $C_{/F}$ *admet une petite partie cofinale* (8.1.4).

(iii bis) (*Si dans* C *les sommes de deux objets et les conoyaux de doubles flèches sont représentables*.) *Le foncteur* F *transforme somme de deux objets de* C *en produits*, *conoyaux de doubles flèches de* C *en noyaux*, *la catégorie* $C_{/F}$ *est non vide* *i.e. le foncteur* F *n'est pas le foncteur constant de valeur* $\emptyset$, *enfin il existe une* petite *famille d'objets de* $C_{/F}$ *telle que tout objet* X *de* $C_{/F}$ *soit majoré par un objet* X_i , *i.e. admette un* F-*morphisme* $X_i \longrightarrow X$.

(iv) (*Si la catégorie* C *est équivalente à une petite catégorie*.) *La catégorie* $C_{/F}$ *est filtrante*.

(v) (*Si la catégorie* C *est équivalente à une petite catégorie, et si les limites inductives filtrantes y sont représentables*.) *Le foncteur* F *est exact à gauche*.

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$(ii) . Supposons F ind-représenté par $(X_i)_{i\in I}$, avec I petit. Prouvons que $C_{/F}$ est filtrante. Soient X,X' deux objets de $C_{/F}$, i.e. des objets de C munis de morphismes $X \longrightarrow F$, $X' \longrightarrow F$, prouvons qu'ils sont majorés par un troisième objet de $C_{/F}$. Or les morphismes $X \longrightarrow F$, $X' \longrightarrow F$ proviennent de morphismes $X \longrightarrow X_i$, $X' \longrightarrow X_i'$, et quitte à remplacer i,i' par un majorant commun dans Ob I, on peut supposer i=i', et on prend comme majorant commun de X,X' l'objet X_i muni du morphisme canonique $X_i \longrightarrow F$. Soit maintenant $X \overset{f,g}{\rightrightarrows} X' \xrightarrow{h} F$ une double flèche dans $C_{/F}$, prouvons qu'elle est égalisée par une flèche $X' \longrightarrow X''$ de $C_{/F}$. Or $h: X' \longrightarrow F$ est donné par un morphisme $h_i : X' \longrightarrow X_i$, et la condition hf=hg signifie qu'il existe $\alpha : i \longrightarrow j$ dans I tel que $\varphi(\alpha)h_i f) = \varphi(\alpha)(h_i g)$, i.e. quitte à remplacer h_i par $\varphi(\alpha)h_i$, on égalise f et g . Cela prouve que $C_{/F}$ est filtrante. Il est alors immédiat qu'elle est essentiellement petite puisque les objets $(X_i \longrightarrow F)_{i\in \mathrm{Ob}\, I}$ forment une petite famille dans Ob $C_{/F}$ qui est cofinale.

(ii) $\Longrightarrow$(i). Posons $I = C_{/F}$, et considérons le foncteur canonique (8.3.2.1)

$$\varphi : I = C_{/F} \longrightarrow F \quad .$$

On sait que le préfaisceau représenté par cet ind-objet de C est F (3.4), donc F est ind-représentable par définition (8.2.2).

(ii)$\Longleftrightarrow$(iii). En effet, (ii) $\Longrightarrow$(iii) car un foncteur ind-représentable est exact à gauche (8.3.1), et (iii) $\Longrightarrow$(ii) car on a signalé (8.3.1), que F exact à gauche implique que $C_{/F}$ est filtrante, et on applique la définition 8.1.8 pour conclure que cette catégorie est essentiellement petite.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii bis) se prouve de même que (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii).

Les équivalences (ii) $\Longleftrightarrow$ (iv) et (iii) $\Longleftrightarrow$ (v) sont triviales, puisque pour C équivalente à une petite catégorie, $C_{/F}$ est évidemment équivalente également à une petite catégorie et a fortiori elle est automatiquement essentiellement petite dès qu'elle est filtrante. Cela achève la démonstration de 8.3.3.

Remarque 8.3.4. Soit $F: C' \longrightarrow C''$ un foncteur entre $\underline{U}$-catégories. Il apparaît que la notion d'exactitude à gauche (2.3.2) ne présente guère d'intérêt en pratique que si dans C' les limites projectives finies sont représentables. Dans le cas où $C'' = (\underline{U}\text{-Ens})$, et où C' est $\underline{U}$-petit, écrivant C' sous la forme C° (donc $C = C'^{\circ}$), il convient de considérer que la "bonne notion" qui remplace, dans le cas général, celle d'exactitude à gauche est celle de ind-représentabilité de F (considéré comme préfaisceau sur C° ; i.e. celle de pro-représentabilité de F, considéré comme foncteur sur C', cf. 8.10). Cette notion coïncide bien avec celle d'exactitude à gauche lorsque dans C' les limites projectives finies sont représentables i.e. dans C les limites inductives finies sont représentables (8.3.3). Lorsque l'on ne suppose plus C' $\underline{U}$-petit ou tout au moins équivalente à une catégorie $\underline{U}$-petite, alors les deux notions pour un foncteur F, d'exactitude à gauche et de pro-représentabilité, ne coïncident plus nécessairement, même si dans C' les limites projectives finies sont représentables (cf. 8.12.9). En fait, il semble que dans ce cas, les foncteurs exacts à gauche non ind-représentables doivent être considérés comme étant de nature pathologique, les "bons" objets restant les foncteurs ind-représentables ; comparer 8.13.3 . Pour le cas des foncteurs $F : C' \longrightarrow C''$, avec C' et C'' à nouveau des $\underline{U}$-catégories quelconques, nous développerons plus bas (8.11.5), plus généralement, une notion qui "améliore" celle d'exactitude à gauche, (savoir celle d'un foncteur admettant un foncteur pro-adjoint).

8.4. Ind-objets constants, essentiellement constants

Choisissons une catégorie finale $\underline{e}$, i.e. telle que Ob $\underline{e}$ et Fl $\underline{e}$ soient réduits à un élément (par exemple, on peut prendre pour $\underline{e}$ la sous-catégorie pleine de (Ens) formée par l'ensemble vide, si on veut un choix canonique). C'est évidemment une catégorie filtrante et petite. Si X est un objet de C, on lui associe le ind-objet constant indexé par $\underline{e}$, de valeur X, soit c(X). Il est clair que pour X variable, on trouve ainsi un foncteur pleinement fidèle

(8.4.1) $$c : C \longrightarrow \mathrm{Ind}(C) \quad ,$$

d'ailleurs injectif sur les objets, et par lequel nous identifierons C à une sous-catégorie pleine de Ind(C). On notera que le foncteur composé

(8.4.2) $$C \xrightarrow{c} \mathrm{Ind}(C) \xrightarrow{L} \hat{C}$$

est le foncteur canonique h (8.2.1.1).

8.4.3. Plus généralement, soit I une catégorie filtrante. Le foncteur constant sur I de valeur sur un objet X de C est aussi appelé le ind-objet constant de valeur X indexé par I . Il est clair, si I est essentiellement petit, que cet ind-objet ind-représente le foncteur h(X) représenté par X, donc cet ind-objet est isomorphe à c(X).

8.4.4. Un ind-objet $\underline{X}$ de C est dit essentiellement constant s'il est isomorphe (dans une catégorie $\mathrm{Ind}_{\underline{V}}(C,\underline{V}')$, pour $\underline{V},\underline{V}'$ convenables) à un ind-objet de la forme c(X), $X \in \mathrm{ob}\, C$. L'objet X, qui est alors déterminé à isomorphisme canonique près, est appelé la valeur du ind-objet essentiellement constant envisagé. Donc par définition, le foncteur c de (8.4.1) induit une équivalence de C avec la sous-catégorie pleine de Ind(C) formée des ind-objets qui sont essentiellement constants, cette sous-catégorie étant l'image essentielle du foncteur c .

Evidemment un ind-objet constant est essentiellement constant, l'inverse n'étant vrai que dans le seul cas, trivial, où C est vide ou une catégorie ponctuelle.

8.5. Limites inductives filtrantes dans Ind(C)

Proposition 8.5.1. Soit C une $\underline{U}$-catégorie. Dans Ind(C), les petites limites inductives filtrantes sont représentables, et le foncteur canonique (8.2.4.8)

$$L : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \hat{C}$$

y commute.

Compte tenu du fait que L est pleinement fidèle, les assertions de la proposition équivalent à la suivante :

Corollaire 8.5.2. Toute petite limite inductive filtrante (dans $\hat{C}$) de préfaisceaux ind-représentables est ind-représentable.

Cela résulte facilement du critère 8.3.3 (ii). Le détail de la vérification est laissée au lecteur.

8.5.3. Le cas "tautologique" de limites inductives filtrantes dans Ind(C) est celui où on part d'un ind-objet essentiellement petit $\underline{X} = (X_i)_{i \in I}$ de C . On a alors, dans $\hat{C}$ donc aussi dans Ind(C) (ou dans $\hat{C}$) :

(8.5.3.1) $$\underline{X} = \varinjlim_{I} X_i \quad .$$

On fera attention, en écrivant cette formule, qu'il ne s'agit pas d'une limite inductive dans C, et que même lorsque cette dernière existe, elle n'est pas isomorphe dans Ind(C) à $\underline{X}$: en effet, le foncteur canonique (8.4.1) $c : C \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$ ne commute pas en général aux limites inductives filtrantes. (Cf. 8.5.5 ci-dessous.)

Pour obvier à cette possibilité de confusion dans l'écriture de (8.5.3.1), "certains auteurs" (= P. Deligne) préfèrent l'écrire

(8.5.3.2) $$\underline{X} = \text{"}\varinjlim_{I}\text{"}\ X_i \quad ,$$

le rôle des guillemets étant d'indiquer que la limite inductive est prise dans une catégorie de Ind-objets Ind(C). Par extension, il y aurait lieu alors de dénoter par "lim" toute opération de limite inductive dans Ind(C) (sans que les composants du système inductif envisagé dans Ind(C) soient nécessairement dans l'image, ou l'image essentielle, de $c : C \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$).

8.5.4. Pour calculer la limite inductive ou projective d'un foncteur

(8.5.4.1) $$\varphi : J \longrightarrow \mathrm{Ind}(C) \quad ,$$

où J est maintenant une catégorie quelconque, il est souvent commode d'expliciter φ à l'aide d'un foncteur

(8.5.4.2) $$\Phi : J\times I \longrightarrow C \quad ,$$

où I est une catégorie filtrante essentiellement petite, ou de préférence petite. Un tel Φ définit en effet un foncteur

$$j \longmapsto (i \longmapsto \Phi(j,i)) \ : \ J \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(I,C) \quad ,$$

d'où, en composant avec la flèche canonique (8.2.6.1) $\underline{\mathrm{Hom}}(I,C) \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$, un foncteur

(8.5.4.3) $$j \longmapsto (i \longmapsto \Phi(j,i)) \ : J \longrightarrow \mathrm{Ind}(C) \quad .$$

On pourra dire que Φ est une <u>expression indicielle de</u> φ , <u>indexée par la catégorie</u> (<u>filtrante</u>) I , si le foncteur correspondant (8.5.4.3) est isomorphe à φ . Nous étudierons plus bas (8.8) des conditions générales d'existence d'une expression indicielle pour un foncteur φ donné, et nous bornerons ici à partir d'un foncteur φ donné sous forme indicielle (8.5.4.3), dans le cas où J est une petite catégorie filtrante, pour indiquer dans ce cas le calcul de $"\varinjlim" \varphi = "\varinjlim_{j}" \varphi(j)$. La formule (8.5.3.2), et la formule d'associativité des limites inductives (2.5.0) donne alors immédiatement le "<u>calcul tautologique</u>" de $"\varinjlim" \varphi$:

(8.5.4.4) $$"\varinjlim_{J}" \varphi \ = \ "\varinjlim_{J\times I}" \Phi \quad ,$$

i.e.

(8.5.4.5) $$\text{"}\varinjlim_{j}\text{"}\ (i \longmapsto \Phi(j,i)) = \text{"}\varinjlim_{j,i}\text{"}\ \Phi(j,i) \quad .$$

Ainsi, le système inductif cherché n'est autre que Φ lui-même (la catégorie d'indices étant $J \times I$, qui est bien filtrante puisque J et I le sont).

Exercice 8.5.5. Soit C une U-catégorie

a) Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Dans C les petites limites inductives sont représentables, et le foncteur $c : C \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$ y commute.

(iii) Le foncteur c est une équivalence de catégories.

(ii) Dans C les petites limites inductives sont représentables, et pour tout $X \in \mathrm{Ob}\, C$, le foncteur $Y \longmapsto \mathrm{Hom}(X,Y)$ commute aux dites limites.

(iv) Les petites limites inductives filtrantes sont représentables dans C, et le foncteur $\varinjlim\ c : \mathrm{Ind}\, C \longrightarrow C$ (cf. 8.7.1.5) est pleinement fidèle (ou encore, une équivalence).

b) Si C est une catégorie finie, prouver que les conditions précédentes équivalent à la suivante : pour tout projecteur dans C (10. 6), l'image est représentable dans C .

8.6. Extension d'un foncteur aux ind-objets

8.6.1. Soit

(8.6.1.1) $$f : C \longrightarrow C'$$

un foncteur entre U-catégories. Pour tout ind-objet

$$\varphi : I \longrightarrow C$$

de C (I une catégorie filtrante), le foncteur composé $f\circ\varphi$ est un ind-objet de C', noté aussi Ind(f)(φ). En notations indicielles, si φ est écrit sous la forme $\underline{X} = (X_i)_{i\in I}$, on obtient

(8.6.1.2) $$\mathrm{Ind}(f)(X_i)_{i\in I} = (f(X_i))_{i\in I} \quad .$$

Soit $\underline{Y}=(Y_j)_{j\in J}$ un deuxième système inductif de C . On trouve **alors** une application évidente, également notée $u \longrightarrow \mathrm{Ind}(f)(u)$:

(8.6.1.3) $$\mathrm{Hom}(\underline{X},\underline{Y}) = \varprojlim_i \varinjlim_j \mathrm{Hom}(X_i,Y_j) \longrightarrow$$

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}(f)(\underline{X}), \mathrm{Ind}(f)(\underline{Y})) \simeq \varprojlim_i \varinjlim_j \mathrm{Hom}(f(X_i),f(Y_j)) \quad .$$

On constate immédiatement que ces applications sont compatibles avec la composition des morphismes de ind-objets, en se référant à la formule non écrite de composition des morphismes de ind-objets (8.2.5). On a ainsi obtenu, pour tout univers $\underline{V}$, un foncteur

(8.6.1.4) $$\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}_{\underline{V}}(C,\underline{U}) \longrightarrow \mathrm{Ind}_{\underline{V}}(C',\underline{U})$$

(notations de (8.2.4.5)), et en particulier un foncteur

(8.6.1.5) $$\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \mathrm{Ind}(C') \quad .$$

Si on a un deuxième foncteur

$$g : C' \longrightarrow C'' \quad ,$$

on a évidemment une identité de foncteurs entre catégories Ind (ou $\mathrm{Ind}_{\underline{V}}$, au choix) :

(8.6.1.6) $$\mathrm{Ind}(gf) = \mathrm{Ind}(g)\circ\mathrm{Ind}(f) \quad ,$$

et pour C' = C, on a la sempiternelle formule

(8.6.1.7) $$\mathrm{Ind}(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{\mathrm{Ind}(C)} \quad .$$

De façon imagée, on peut donc dire que la catégorie Ind(C) dépend fonctoriellement de C (de façon covariante) (*). Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter même une dépendance **2**-fonctorielle, en définissant, pour tout couple de U-catégories C,C' , un foncteur canonique

(8.6.1.8) $$\underline{\mathrm{Ind}}(f) : \underline{\mathrm{Hom}}(C,C') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Ind}(C), \mathrm{Ind}(C')) \quad ,$$

et en précisant la nature fonctorielle des isomorphismes identiques (8.6.1.6) et (8.6.1.7).

8.6.2. Reprenons le foncteur (8.6.1.1), et considérons le foncteur correspondant (5.1)

(8.6.2.1) $$f_! : \hat{C} \longrightarrow \hat{C}' \quad ,$$

et le diagramme de foncteurs

(8.6.2.2) $$\begin{tikzcd} \mathrm{Ind}(C) \arrow[r, "\mathrm{ind}(f)"] \arrow[d, "L_C"'] & \mathrm{Ind}(C') \arrow[d, "L_{C'}"] \\ \hat{C} \arrow[r, "f_!"] & \hat{C}' \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales désignent les foncteurs canoniques L de (8.2.4.8). Comme le foncteur $f_!$ "prolonge f " et commute aux limites inductives (5.4.3), et que les foncteurs L_C et $L_{C'}$ commutent aux petites limites inductives filtrantes (8.5.1), il résulte de (8.5.3.2) que pour tout ind-objet $(X_i)_{i\in I}$ de C, on a dans $\hat{C}'$ un isomorphisme canonique

(*) Pour une dépendance contravariante, sous certaines conditions, cf. 8.11.

$$f_!(L_C((X_i)_{i\in I})) \simeq \varinjlim_i f_! L_C(X_i) \simeq \varinjlim_i L_{C'} f(X_i) = L_{C'}(f(X_i)_{i\in I})$$

i.e. un isomorphisme canonique

$$f_!\, L_C(\underline{X}) \simeq L_{C'}(\mathrm{Ind}(f)(\underline{X})) \quad .$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que ce dernier est fonctoriel, i.e. qu'il correspond à un isomorphisme canonique

(8.6.2.3) $$f_! L_C \simeq L_{C'} \circ \mathrm{Ind}(f) \quad .$$

En d'autres termes, le carré (8.6.2.2) est commutatif à isomorphisme canonique près. Compte tenu du fait que $f_!$ commute aux petites limites inductives, et de 8.5.1, on conclut de ceci :

Proposition 8.6.3. *Soit $f\colon C \longrightarrow C'$ un foncteur entre U-catégories. Alors le foncteur*

$$\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \mathrm{Ind}(C')$$

commute aux limites inductives filtrantes. De plus, il rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c_C"'] & C' \arrow[d, "c_{C'}"] \\ \mathrm{Ind}(C) \arrow[r, "\mathrm{Ind}(f)"] & \mathrm{Ind}(C') \end{tikzcd} ,$$

où les flèches verticales c_C, $c_{C'}$ sont les foncteurs canoniques (8.4.1).

La dernière assertion est triviale sur les définitions, et a été mis pour la commodité des références. Noter d'ailleurs que les propriétés énoncées dans 8.6.3 caractérisent le foncteur Ind(f) à isomorphisme unique près, comme étant induit par le foncteur $f_!$ (8.6.2.1), comme il résulte de la démonstration qu'on vient de donner de (8.6.2.3).

Proposition 8.6.4. Les notations sont celles de 8.6.3.

a) Pour que Ind(f) soit fidèle (resp. pleinement fidèle), il faut et il suffit que f le soit.

b) Pour que Ind(f) soit une équivalence de catégories, il faut et il suffit que f soit pleinement fidèle, et que tout objet de C' soit isomorphe à un facteur direct (10.6) d'un objet dans l'image de f .

Démonstration. a) La nécessité résulte évidemment du fait que f est induit par Ind(f). Pour la suffisance, il suffit d'utiliser la forme (8.6.1.3) de Ind(f) sur des ensembles Hom($\underline{X}$,$\underline{Y}$), en se rappelant que les limites inductives filtrantes d'ensembles, et les limites projectives quelconques, transforment monomorphismes en monomorphismes, isomorphismes en isomorphismes.

b) On peut supposer déjà g donc Ind(f) pleinement fidèle. Comme tout objet de Ind(C') est une petite limite inductive filtrante d'objets de C', la pleine fidèlité de Ind(f) implique que pour ce foncteur soit essentiellement surjectif, il revient au même que tout objet X' de C' soit dans l'image essentielle. Or si on a un isomorphisme

$$X' \xrightarrow{\sim} \text{"}\varinjlim\text{"} f(X_i) \quad ,$$

cet isomorphisme se factorise par un des $f(X_i)$, ce qui montre que X' est un facteur direct de $f(X_i)$, ce qui prouve la nécessité dans b). Pour la suffisance, utilisant la pleine fidèlité de Ind(f), elle résulte aussitôt du

Corollaire 8.6.5. Dans Ind(E) les images de projecteurs (10.6) sont représentables, et le foncteur Ind(f) : Ind(C) $\longrightarrow$ Ind(C') commute à la formation desdites images.

Cela résulte en effet du fait que dans Ind(C) les petites limites inductives filtrantes sont représentables (8.5.1) et que Ind(f) y commute (8.6.3), compte tenu que l'image d'un projecteur $p: X \to X$ s'interprète comme la limite inductive d'un système inductif filtrant indexé par $\mathbb{N}$

$$X \xrightarrow{p} X \xrightarrow{p} X \longrightarrow \cdots\cdots$$

ou au choix, comme limite inductive du foncteur qu'on devine sur la catégorie filtrante P ayant un seul objet, et une flèche non identique π telle que $\pi^2 = \pi$.

8.7. Le foncteur $\varinjlim_C$: Ind(C) $\longrightarrow$ C . Caractérisations universelles de la catégorie Ind(C).

8.7.1. Reprenons une $\underline{U}$-catégorie C, et le foncteur canonique

(8.7.1.1) $$c: C \longrightarrow \mathrm{Ind}(C) \quad .$$

Soit $\underline{X} = (X_i)_{i \in I}$ un objet de Ind(C). Il résulte immédiatement de la définition des limites inductives représentables (2.1, 2.1.1) que $\varinjlim_i X_i$ est représentable dans C si et seulement si l'adjoint à gauche de c est défini en $\underline{X}$, et que dans le cas $\varinjlim_i X_i$ (calculé dans C) n'est autre que la valeur en $\underline{X}$ dudit afjoint à gauche :

(8.7.1.2) $$\mathrm{Hom}_C(\varinjlim_i X_i \, , Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(C)}((X_i)_{i\in I} \, , c(Y)) \quad .$$

Si on désigne par

$$\mathrm{Ind}(C)' \subset \mathrm{Ind}(C) \tag{8.7.1.3}$$

la sous-catégorie pleine de Ind(C) formée des ind-objets de C qui admettent une limite inductive <u>dans</u> C, il résulte de l'observation précédente que cette sous-catégorie est <u>strictement pleine</u>, et que l'on a un foncteur canonique

$$\varinjlim_C : \mathrm{Ind}(C)' \longrightarrow C \quad , \tag{8.7.1.4}$$

dont la valeur en chaque objet $(X_i)_{i\in I}$ de Ind(C)' est sa limite inductive dans C . Dans le cas particulier où dans C les petites limites inductives filtrantes sont représentables, on obtient donc un foncteur naturel

$$\varinjlim_C : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow C \; . \tag{8.7.1.5}$$

8.7.1.6. Bien entendu, on peut définir les foncteurs précédents également sur des catégories du type $\mathrm{Ind}_{\underline{V}}(C,\underline{U})'$, $\mathrm{Ind}_{\underline{V}}(C,\underline{U})$, mais, compte tenu de (8.2.4.6), ils sont déjà déterminés (à isomorphisme unique près) par la connaissance des foncteurs précédents, correspondants au cas $\underline{V} = \underline{U}$.

8.7.1.7. De la construction précédente de $\varinjlim_C$ comme un foncteur adjoint à gauche, il résulte immédiatement que ce foncteur <u>commute aux limites inductives quelconques</u>, et en particulier aux petites limites inductives filtrantes (ces dernières étant représentables dans Ind(C) (8.5.1)). Notons aussi que Ind(C)' contient toujours l'image essentielle de c (formée des ind-objets essentiellement constants), et que l'on a un isomorphisme canonique fonctoriel en $X \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Ind}(C)'$:

(8.7.1.8) $\varinjlim_C c(X) \simeq X$,

i.e., dans le cas favorable où C est stable par petites limites inductives, on a un isomorphisme canonique

(8.7.1.9) $\varinjlim_C \circ c \simeq \mathrm{id}_C$.

8.7.2. Considérons maintenant un foncteur

(8.7.2.1) $f : C \longrightarrow E$,

où E est une $\underline{U}$-catégorie où les petites limites inductives sont représentables, de sorte qu'on a un foncteur

$$\varinjlim_E : \mathrm{Ind}(E) \longrightarrow E \quad .$$

Comme on a défini également (8.6)

$$\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \mathrm{Ind}(E) \quad ,$$

on peut considérer le composé

(8.7.2.2) $\overline{f} = \varinjlim_E \circ \mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow E$,

qu'on appelle parfois le <u>prolongement canonique de</u> f <u>aux ind-objets</u> (mais qu'on se gardera de confondre avec Ind(f) !). Comme composé de deux foncteurs commutant aux petites limites inductives filtrantes (8.6.3, 8.7.1.7), ce foncteur lui-même commute aux petites limites inductives filtrantes. De plus, il résulte de l'isomorphisme (8.7.1.9) appliqué à E, et de (8.6.2.3), que $\overline{f}$ <u>prolonge</u> f à isomorphisme près, i.e. qu'on a un isomorphisme canonique

(8.7.2.3) $\overline{f} \circ c_C \simeq f$.

Il est assez clair d'ailleurs, compte tenu du fait que tout objet de Ind(C) est petite limite inductive filtrante d'objets de C, que les deux propriétés précédentes caractérisent encore $\overline{f}$, à isomorphisme unique près. On peut préciser ce point pour obtenir en même temps une caractérisation universelle, à équivalence près, de Ind(C) parmi les $\underline{U}$-catégories E où les petites limites inductives filtrantes sont représentables. Si E et F sont deux telles $\underline{U}$-catégories, désignons par

(8.7.2.4) $$\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)' \subset \underline{\mathrm{Hom}}(E,F)$$

la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)$ formée des foncteurs qui commutent aux petites limites inductives filtrantes. On a alors :

Proposition 8.7.3. *Soit C une $\underline{U}$-catégorie, et utilisons la notation ci-dessus (8.7.2.4). Alors le foncteur canonique*

$$c_C : C \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$$

est 2-universel parmi les foncteurs de source C et de but une $\underline{U}$-catégorie à petites limites inductives filtrantes représentables. En d'autres termes, Ind(C) est une telle catégorie (8.2.5, 8.5.1), et si E est une telle catégorie, le foncteur

(8.7.3.1) $$g \longmapsto g \circ c_C : \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Ind}(C),E)' \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C,E)$$

est une équivalence de catégories.

Pour prouver ce dernier point, il suffit de vérifier que l'application $f \longmapsto \overline{f}$ définie par (8.7.2.2) peut se préciser par un foncteur

(8.7.3.2) $\quad f \longmapsto \overline{f} = \varinjlim_{E} \circ \mathrm{Ind}(f) : \underline{\mathrm{Hom}}(C,E) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Ind}(C),E)'$,

et que ce dernier est ausi-inverse de (8.7.3.1). Le détail de la vérification, essentiellement triviale, est laissé au lecteur. On peut aussi invoquer 7.8 pour conclure d'abord que (8.7.3.1) est pleinement fidèle, et (8.7.2.3) pour conclure qu'il est essentiellement surjectif.

8.7.4. Reprenons un foncteur entre $\underline{U}$-catégories

(8.7.4.1) $\quad f : C \longrightarrow E$,

où E est une $\underline{U}$-catégorie où les petites limites inductives filtrantes sont représentables, d'où un foncteur

(8.7.4.2) $\quad \overline{f} : (X_i)_{i\in I} \longmapsto \lim_{i} f(X_i) : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow E$.

Nous nous proposons d'étudier des conditions sur f qui assurent que $\overline{f}$ est pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégories. Comme f est isomorphe au composé $\overline{f}\circ c_C$, et que $c_C : C \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$ est pleinement fidèle, on voit que pour que $\overline{f}$ soit pleinement fidèle, il <u>faut</u> que f le soit. Quitte à remplacer C par son image essentielle dans E, on voit donc qu'on ne perd pas en généralité, essentiellement, en supposant que f est le foncteur d'inclusion d'une sous-catégorie **C** de E, ce que nous supposerons par la suite, pour simplifier les notations.

<u>Proposition</u> 8.7.5. <u>Les notations sont celles de</u> 8.7.4.

a) <u>Pour que le foncteur</u> $\overline{f}$ <u>soit pleinement fidèle</u>, <u>il faut et il suffit que l'on ait</u> :

(i) <u>Tout objet</u> X <u>de</u> C <u>satisfait à la condition suivante</u> :

(PF) <u>Pour tout petit système inductif filtrant</u> $(Y_i)_{i\in I}$ <u>dans</u> C, de limite inductive $\varinjlim_{i} Y_i$ dans E, l'application canonique

$$\varinjlim_{i} \mathrm{Hom}(X,Y_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, \varinjlim_{i} Y_i) \tag{8.7.5.1}$$

est bijective.

b) Pour que le foncteur $\overline{f}$ soit une équivalente de catégories, il faut et il suffit que C satisfasse la condition (i), et les deux conditions suivantes :

(ii) C est une sous-catégorie de E génératrice par épimorphismes stricts (7.1).

(iii) Pour tout objet X de E, la sous-catégorie pleine $C_{/X}$ de $E_{/X}$, formée des objets X' au-dessus de X de source dans Ob C, est filtrante et essentiellement petite.

La condition (iii) est vérifiée en particulier si C est équivalente à une petite catégorie, et si les limites inductives finies dans C sont représentables et le foncteur d'inclusion $f: C \longrightarrow E$ y commute (i.e. pour toute catégorie finie J et tout foncteur $\varphi : J \longrightarrow C$ la limite inductive de $f\varphi$ est représentable et est isomorphe dans E à un objet de C).

Démonstration. a) Avec les notations de la condition (i), si $\underline{Y}$ désigne le ind-objet (Y_i), $\underline{X}$ le ind-objet constant défini par X, alors (8.7.5.1) n'est autre que l'application canonique

$$\mathrm{Hom}(\underline{X},\underline{Y}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\overline{f}(\underline{X}),\overline{f}(\underline{Y})) \quad ,$$

donc si $\overline{f}$ est pleinement fidèle cette application est bien bijective. Réciproquement, si $\underline{X} = (X_j)_{j\in J}$ et $\underline{Y} = (Y_i)_{i\in I}$ sont deux ind-objets quelconques de E, alors l'application $u : \mathrm{Hom}(\underline{X},\underline{Y}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\overline{f}(\underline{X}),\overline{f}(\underline{Y}))$

est la limite projective sur j des applications
$u_j : \mathrm{Hom}(\underline{X}_j,\underline{Y}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\overline{f}(\underline{X}_j),\underline{Y})$, où $\underline{X}_j$ est le ind-objet constant de valeur X_j ; donc u est bijective si les u_j le sont, et (i) implique donc que $\overline{f}$ est pleinement fidèle.

b) Supposons (i), (ii), (iii) vérifiées, et prouvons que $\overline{f}$ est une équivalence. Il reste à prouver qu'il est essentiellement surjectif, donc que tout $X \in \mathrm{ob}\, E$ est dans l'image essentielle. Or l'hypothèse (ii) signifie que $\varinjlim_{C_{/X}} Z \longrightarrow X$ est un isomorphisme, et (iii) que la catégorie $C_{/X}$ est filtrante et essentiellement petite, donc X est l'image du ind-objet de E défini par le foncteur naturel $C_{/X} \longrightarrow E$. Inversement, supposons que $\overline{f}$ est une équivalence, donc en vertu de a), il reste à vérifier (ii) et (iii). On peut supposer que $E = \mathrm{Ind}(C)$, C étant identifiée à la sous-catégorie c(C) de E . Mais on sait (8.3.3 (ii)) que pour tout $X \in \mathrm{Ind}(C)$, identifié si on le désire au foncteur F sur C° qu'il ind-représente, $C_{/X} = C_{/F}$ est une catégorie filtrante essentiellement petite (ce qui prouve (iii)) et que la limite inductive dans $\hat{C}$ du foncteur $C_{/F} \longrightarrow \hat{C}$ est F . A fortiori, il en est ainsi dans la sous-catégorie pleine E de $\hat{C}$, puisque F=X est dans E, ce qui prouve (ii). Reste à prouver la dernière assertion de b). Or l'hypothèse faite sur C implique évidemment que dans la catégorie $C_{/X}$, les limites inductives finies sont représentables, a fortiori la catégorie $C_{/X}$ est filtrante.

Remarque 8.7.5.2. Le raisonnement qu'on vient de faire montre plus généralement que lorsque la condition (i) est vérifiée, alors l'image essentielle du foncteur pleinement fidèle $\overline{f}$ (8.7.4.2) est formée des $X \in \mathrm{ob}\, E$ tels que la catégorie $C_{/X}$ soit filtrante et essentiellement petite (condition automatiquement satisfaite si C satisfait les conditions énoncées à la fin de b)), et que la limite inductive du foncteur canonique $C_{/X} \longrightarrow E$ soit X .

Corollaire 8.7.6. Soit E_{PF} la sous-catégorie pleine de E formée des objets satisfaisant la condition (PF) de 8.7.5 a). Alors pour tout foncteur $J \longrightarrow E_{PF}$, J une catégorie finie, qui admet une limite inductive X dans E, on a $X \in \mathrm{ob}\, E_{PF}$. Le foncteur canonique $(X_i)_{i \in I} \longrightarrow \varinjlim_{i}{}_E X_i$ déduit de l'inclusion $g : E_{PF} \hookrightarrow E$

$$\overline{g} : \mathrm{Ind}(E_{PF}) \longrightarrow E \tag{8.7.6.1}$$

est pleinement fidèle, et si dans E les limites inductives finies sont rerpésentables et si E_{PF} est équivalente à une petite catégorie, alors l'image essentielle du foncteur $\overline{f}$ est formée des objets X de E tels que le morphisme canonique $\varinjlim_{(E_{PF})_{/X}} Y \longrightarrow X$ soit un isomorphisme. Si on suppose de plus que la sous-catégorie E_{PF} de E est génératrice par épimorphismes stricts (7.1), alors le foncteur (8.7.6.1) est une équivalence de catégories.

Tous les faits sont évidents, dans l'ordre où ils sont donnés, compte tenu de 8.7.5, en utilisant 2.8 pour la première assertion.

Corollaire 8.7.7. *Supposons que dans* E *les limites inductives finies soient représentables. Soit* C *une sous-catégorie pleine de* E, *équivalente à une petite catégorie, et considérons le foncteur* $(X_i)_{i \in I} \longrightarrow \varinjlim_{i} {}_E X_i$:

(8.7.7.1) $$\overline{f} : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow E \quad .$$

Soit E_{PF} *comme dans* 8.7.6. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *Le foncteur* $\overline{f} : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow E$ *est une équivalence.*

(ii) *La catégorie* C *dans* E *est génératrice par épimorphismes stricts, contenue dans* E_{PF} , *et tout objet de* E_{PF} *est isomorphe dans* E (*ou dans* E_{PF} , *cela revient au même* (8.7.6)) *à un facteur direct d'un objet de* C .

Lorsque la sous-catégorie C *de* E *est stable par facteurs directs* (10. 6), *les conditions précédentes équivalent encore aux suivantes* :

(ii bis) $C = E_{PF}$, *et* C *est génératrice dans* E *par épimorphisme stricts.*

(iii) *La sous-catégorie* C *de* E *est génératrice par épimorphismes stricts, contenue dans* E_{PF} , *et les limites inductives finies y sont représentables.*

Lorsque de plus dans E *les limites inductives finies sont représentables, ces conditions équivalent aussi à*

(iii bis) *La sous-catégorie* C *de* E *est génératrice par épimorphismes stricts, contenue dans* E_{PF} , *et stable dans* E *par limites inductives finies* (*ou ce qui revient au même, par sommes finies, et par conoyaux de doubles flèches*).

On sait déjà (8.7.5) que la condition (i) implique que $C \subset E_{PF}$, et que C est génératrice par épimorphismes stricts ; prouvons aussi qu'alors tout objet X de E_{PF} est isomorphe à un facteur direct d'un objet de C . En effet on sait que X est une limite inductive filtrante $\varinjlim_i X_i$ dans E d'objets de C, et par définition de E_{PF}, on voit que pour i convenable l'homomorphisme canonique $X_i \longrightarrow X$ admet un inverse à gauche, de sorte que X est bien facteur direct de l'objet X_i de C . Cela prouve que (i) $\Longrightarrow$(ii) (sans hypothèse sur C ni E, d'ailleurs). Prouvons (ii) $\Longrightarrow$(i). Comme C est équivalente à une petite catégorie et tout objet de E_{PF} est facteur direct d'un objet de C, on voit que E_{PF} est également équivalente à une petite catégorie, donc en vertu de 8.7.6 le foncteur (8.7.6.1) est une équivalence de catégories, et on conclut grâce à 8.6.4 b) appliqué à l'inclusion $E \hookrightarrow E_{PF}$.

Lorsque tout facteur direct dans E d'un objet de C est dans C, il est clair que (ii)$\Longleftrightarrow$(ii bis). D'autre part (ii bis) implique (iii) resp. (iii bis) en vertu de 8.7.6. Enfin, (iii) (et a fortiori (iii bis)) implique (i) en vertu de 8.7.5. Cela achève la démonstration.

<u>Exercice</u> 8.7.8. (<u>Enveloppes de Karoubi</u>). Soient C une <u>U</u>-catégorie, E = Ind(C), et $E_{PF} \supset C$ la sous-catégorie pleine de E définie dans 8.7.6.

a) Prouver que dans E_{PF} les images de projecteurs sont représentables, et que tout objet de E_{PF} est facteur direct d'un objet de C .

b) Appelons <u>karoubienne</u> une catégorie F dans laquelle les images de projecteurs sont représentables. Soit alors

$$\varphi : C \longrightarrow K$$

un foncteur pleinement fidèle, tel que K soit karoubienne et que tout objet de K soit facteur direct d'un objet de l'image de C . Prouver que φ est 2-<u>universel</u> parmi les foncteurs de C à valeurs dans des catégories karoubiennes, de façon précise : pour toute catégorie karoubienne F, le foncteur

$$g \longmapsto g\circ\varphi : \underline{\mathrm{Hom}}(K,F) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(K,F)$$

est une équivalence de catégories. (On utilisera le fait que tout foncteur commute aux images de projecteurs.) La catégorie K munie de φ, déterminée à équivalence près (elle-même déterminée à isomorphisme unique près) par les propriétés précédentes, s'appelle l'<u>enveloppe de Karoubi</u> $\widetilde{C}$ de C . (Comparer aussi IV 7.5.)

c) Déduire de a) et b) que $\mathrm{Ind}(C)_{PF}$, munie du foncteur $C \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)_{PF}$ induit par $c: C \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$, fait de $\mathrm{Ind}(C)_{PF}$ une enveloppe de Karoubi de C .

d) Montrer que tout foncteur $f: C \longrightarrow C'$ se prolonge de façon essentiellement unique en un foncteur $\widetilde{f}: \widetilde{C} \longrightarrow \widetilde{C}'$ des enveloppes de Karoubi, et que si on prend ces enveloppes de Karoubi comme dans c), $\widetilde{f}$ est le foncteur induit par $\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \mathrm{Ind}(C')$. Montrer que les conditions de 8.5.4 b) équivalent encore à la suivante : $\widetilde{f}$ est une équivalence de catégories.

<u>Exercice</u> 8.7.9. Soit E une $\underline{U}$-catégorie.

a) Montrer que les conditions sont équivalentes :

(i) E est équivalente à une catégorie de la forme Ind(C), avec C une $\underline{U}$-catégorie.

(i bis) Comme (i), avec de plus C karoubienne (8.7.8 b)).

(ii) La sous-catégorie E_{PF} de E (8.7.6) est génératrice par épimorphismes stricts, et pour tout objet X de E, $(E_{PF})_{/X}$ est une catégorie filtrante essentiellement petite.

Montrer que si C est une $\underline{U}$-catégorie karoubienne telle que E soit équivalente à Ind(C), alors C est équivalente à E_{PF} (par une équivalence déterminée à isomorphisme unique près). Etablir une 2-équivalence entre la 2-catégorie formée des catégories E satisfaisant aux conditions précédentes et les foncteurs entre icelles commutant aux petites limites inductives filtrantes, et la 2-catégorie formée des $\underline{U}$-catégories karoubiennes et les foncteurs quelconques entre icelles.

b) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) E est équivalente à une catégorie de la forme Ind(C), où C est une $\underline{U}$-catégorie où les limites inductives finies sont représentables.

(i bis) Comme (i), mais avec de plus C karoubienne.

(ii) Les limites inductives finies dans E sont représentables, la sous-catégorie E_{PF} de E est génératrice par épimorphismes stricts, et pour tout objet X de E, il existe une petite partie I de Ob $E_{PF\ /X}$ telle que tout objet de $E_{PF\ /X}$ soit majoré par un objet de I . (Utiliser 8.9.5 b.)

8.8. Représentation indicielle d'un foncteur $J \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$

8.8.1. Soit

$$\varphi : J \longrightarrow \mathrm{Ind}(C) \qquad \text{i.e. } \varphi \in \mathrm{Ob}\, \underline{\mathrm{Hom}}(J,\mathrm{Ind}(C))$$

un foncteur, C étant une $\underline{U}$-catégorie. Rappelons (8.5.4) qu'une représentation indicielle de φ est par définition un ind-objet de $\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)$

$$\psi : I \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(J,C) \quad ,$$

I catégorie filtrante essentiellement petite, dont la limite inductive dans $\underline{\mathrm{Hom}}(J,\mathrm{Ind}(C))$ soit isomorphe à φ par un isomorphisme donné. Donc φ admet une représentation indicielle si et seulement si il est isomorphe à une limite inductive filtrante essentiellement petite dans $\underline{\mathrm{Hom}}(J,\mathrm{Ind}(C))$ d'objets de la sous-catégorie pleine $\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)$. Nous dirons que la catégorie J est admissible pour C si tout foncteur $\varphi : J \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$ admet une représentation indicielle.

Comme dans Ind(C) les petites limites inductives filtrantes sont représentables (8.5.1), il en est de même dans $\underline{\mathrm{Hom}}(J,\mathrm{Ind}(C))$, et elles se calculent "argument par argument". Par suite, le foncteur d'inclusion

(8.8.1.1) $$\underline{\mathrm{Hom}}(J,C) \hookrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(J,\mathrm{Ind}(C))$$

se prolonge canoniquement en un foncteur

(8.8.1.2) $$\mathrm{Ind}(\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(J,\mathrm{Ind}(C))$$

(8.7.2). Les éléments de l'image essentielle de ce foncteur sont alors précisément les φ admettant une représentation indicielle ; donc dire que J est admissible pour C signifie aussi que le foncteur (8.8.1.2) est essentiellement surjectif. Signalons à ce propos :

<u>Proposition</u> 8.8.2. <u>Si la catégorie</u> J <u>est équivalente à une catégorie finie, le foncteur canonique</u> (8.8.1.2) <u>est pleinement fidèle</u> ; <u>donc</u> J <u>est admissible pour</u> C <u>si et seulement si c'est une équivalence de catégories</u>.

En vertu de 8.7.5 a) tout revient à prouver que pour tout petit système inductif filtrant $(\varphi_i)_{i\in I}$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)$ et tout objet φ de $\underline{\mathrm{Hom}}(C,J)$, l'application canonique

$$\varinjlim_i \mathrm{Hom}(\varphi,\varphi_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\varphi, \varinjlim_i \varphi_i) \tag{8.8.2.1}$$

est bijective, où $\varinjlim_i \varphi_i$ désigne la limite inductive prise dans $\mathrm{Hom}(J,\mathrm{Ind}(C))$. Or, si φ,ψ sont deux foncteurs $J \longrightarrow C$, on a un diagramme exact d'ensembles, fonctoriel en φ et ψ :

$$\mathrm{Hom}(\varphi,\psi) \longrightarrow \prod_{X\in \mathrm{Ob}\, J} \mathrm{Hom}(\varphi(X),\psi(X)) \rightrightarrows \prod_{\substack{f\in \mathrm{F}\ell\, J\\ f:X\to Y}} \mathrm{Hom}(\varphi(X),\psi(Y)).$$

Comme les limites inductives filtrantes commutent aux noyaux de doubles flèches et aux produits finis, la bijectivité de (8.8.2.1) s'ensuit quand J est finie. Le cas où J est équivalente à une catégorie finie se ramène aussitôt au cas précédent.

<u>Proposition</u> 8.8.3. <u>Soit</u> $\varphi : J \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$ <u>un foncteur</u>, <u>avec</u> J <u>équivalente à une petite catégorie</u>. <u>Pour que</u> φ <u>admette une représentation indicielle</u>, <u>il suffit qu'il satisfasse aux deux conditions suivantes</u>, <u>et cela est également nécessaire lorsque</u> J <u>est équivalente à une catégorie finie</u> :

a) <u>La catégorie</u> $\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)_{/\varphi}$ <u>(formée des flèches de</u> $\underline{\mathrm{Hom}}(J,\mathrm{Ind}(C))$ <u>de but</u> φ <u>et de source dans</u> $\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)$) <u>est filtrante</u>.

b) Pour tout objet j de J, le foncteur

$$\psi \longmapsto \psi(j) \quad : \quad \underline{\mathrm{Hom}}(J,C)_{/\varphi} \longrightarrow C_{/\varphi(j)} \tag{8.8.3.1}$$

est cofinal, i.e. satisfaisant aux conditions F 1), F 2) de 8.1.3.

Démonstration. Supposons a) et b) vérifiées, prouvons que φ admet une représentation indicielle. On peut supposer évidemment J petite. Soit

$$I = \underline{\mathrm{Hom}}(J,C)_{/\varphi} \quad , \tag{8.8.3.2}$$

qui est une catégorie filtrante par hypothèse, et supposons d'abord I essentiellement petite, de sorte que "l'inclusion" de I dans $\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)$ définit un ind-objet de $\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)$, $i \longmapsto \psi_i$. De plus, on a un homomorphisme canonique

$$\varinjlim_i \psi_i \longrightarrow \varphi \quad , \tag{8.8.3.3}$$

donné argument par argument par l'homomorphisme

$$\varinjlim_I \psi_i(j) \longrightarrow \varphi(j) = \varinjlim_{C_{/\varphi(j)}} X$$

déduit du foncteur (8.8.3.1). Comme de dernier est cofinal, on en conclut que (8.8.3.3) est un isomorphisme, d'où la conclusion. Dans le cas où on ne suppose pas I essentiellement petite, il suffit de construire une sous-catégorie pleine essentiellement petite I', telle que (8.8.3.3) reste un isomorphisme en prenant $\varinjlim_{I'}$ au lieu de $\varinjlim_I$. Pour ceci, il suffit que les foncteurs composés

$$I' \longrightarrow I \longrightarrow C_{/\varphi(j)}$$

induits par les foncteurs (8.8.3.1) soient tous cofinaux. On conclut alors par le lemme suivant, dont la démonstration est immédiate grâce au critère (8.1.3 b)), et est laissée au lecteur :

Lemme 8.8.3.4. *Soient* I *une* $\mathcal{U}$*-catégorie filtrante, et*

$$f_j : I \longrightarrow I_j \qquad (j \in J)$$

une petite famille de foncteur cofinaux de I *dans des catégories filtrantes essentiellement petites. Alors il existe une sous-catégorie pleine* I' *de* I *qui est filtrante et essentiellement petite, et telle que les foncteurs induits par les* f_j *soient cofinaux.*

Prouvons enfin la nécessité dans 8.8.3 lorsqu'on suppose J équivalente à une catégorie finie. Une représentation indicielle de φ à l'aide d'une catégorie d'indices filtrante essentiellement petite I définit un foncteur ψ

(8.8.3.5)
$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, dashed, "\psi_j"'] & \underline{\mathrm{Hom}}(J,C)_{/\varphi} \arrow[d, dashed] \\ & C_{/\varphi(j)} \end{tikzcd} ,$$

et il suffit de prouver que ψ et chacun des foncteurs ψ_j qui s'en déduit sont cofinaux : en vertu de 8.1.3 b) il s'ensuivra bien que $\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)_{/\varphi}$ est filtrante, et par définition 8.1.1 que la flèche verticale de (8.8.3.5) est également cofinale. En vertu de 8.8.2 on peut identifier φ à un objet de $\mathrm{Ind}(E)$, où $E = \underline{\mathrm{Hom}}(J,C)$, et le fait que le foncteur

$$\psi : I \longrightarrow E_{/\varphi} \quad ,$$

déduit du ind-objet φ de E indexé par I, est cofinal est un fait général, qui se vérifie immédiatement à l'aide des critères F 1) et F 2) de 8.1.3. La même raison (où E,φ sont remplacés par C, $\varphi(j)$) montre que ψ_j est cofinal, ce qui achève la démonstration.

Remarques 8.8.4. a) Dans le cas où J est équivalente à une catégorie finie, si φ admet une représentation indicielle, on a vu que (8.8.3.5) est un foncteur cofinal, ce qui implique que la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)_{/\varphi}$ est elle-même essentiellement petite.

b) Supposons que dans C les limites inductives finies soient représentables. Alors il en est de même dans E = $\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)$, et celles-ci se calculent argument par argument, et ce sont également des limites inductives dans $\underline{\mathrm{Hom}}(J,\hat{C})$ et a fortiori dans $\underline{\mathrm{Hom}}(J,\mathrm{Ind}(C))$. Il s'ensuit aussitôt que la condition a) de 8.8.3 est alors automatiquement satisfaite, et tout revient à regarder la condition b). J'ignore si elle est automatiquement satisfaite lorsque de plus J est supposée petite.

Nous en arrivons au résultat principal du présent numéro :

Proposition 8.8.5. *Soit* J *une catégorie équivalente à une catégorie finie, et supposons de plus* J *rigide* *i.e.* *que pour tout* $j \in \mathrm{Ob}\, J$, *tout endomorphisme de* j *soit l'identité*. *Alors* J *est admissible pour* C (*quelle que soit la* *U-catégorie* C), *i.e.* *tout foncteur* $J \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$ *admet une représentation indicielle*.

Quitte à remplacer J par une catégorie équivalente, nous pouvons supposer que J est <u>réduite</u> i.e. que deux objets isomorphes de J sont identiques. Alors J est même finie. Nous procédons par récurrence sur card Ob J, le cas où ce nombre est ≤ 0 étant trivial ; nous le supposerons donc ≥ 1 . Soit j_o un objet <u>maximal</u> de J, i.e. tel que pour toute flèche $j_o \longrightarrow j$, il existe une flèche $j \longrightarrow j_o$; compte tenu du fait que J est rigide, cela implique que $j_o \longrightarrow j$ est un isomorphisme, et comme J est réduite, cela implique $j_o = j$. Soit donc J' la sous-catégorie pleine déduite de J en lui enlevant l'objet j_o , et J" la sous-catégorie pleine réduite à l'objet j_o . La proposition résulte alors du

<u>Lemme</u> 8.8.5.1. <u>Soient</u> J <u>une catégorie finie</u>, J' <u>et</u> J" <u>deux sous-catégories pleine telles que</u> Ob J = Ob J' $\cup$ Ob J" , <u>et que pour tout</u> j'$\in$ Ob J' <u>et</u> J" $\in$ Ob J", <u>on ait</u> Hom(j",j') = $\emptyset$. <u>Si</u> J' <u>et</u> J" <u>sont admissibles pour</u> C , <u>il en est de même de</u> J .

Tout revient à prouver les critères a) et b) de 8.8.3, ce qui revient à faire six vérifications élémentaires, savoir les deux dernières conditions des catégories filtrantes pour $\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)_{/\varphi}$, et les conditions F 1) et F 2) pour les foncteurs (8.8.3.1), dans le cas $j \in$ Ob J' et $j \in$ Ob J" successivement ; ces dernières conditions impliquant d'ailleurs que $\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)_{/\varphi}$ est non vide. La vérification assez fastidieuse n'offre pas de difficulté, et est laissée au lecteur. (Le rédacteur a vainement cherché une démonstration élégante qui court-circuiterait ces déplaisantes vérifications.)

Exercice 8.8.6. a) Soient J,J' deux catégories admissibles pour C, l'une d'elles étant finie. Prouver que $J \times J'$ est admissible pour C. (Utiliser 8.8.2.)

b) Prouver qu'une petite catégorie discrète est admissible pour toute catégorie C.

c) Soit J une catégorie satisfaisant les conditions suivantes : (i) J est rigide, (ii) $\mathrm{Ob}\, J$ est dénombrable, (iii) Pour deux objets quelconques j,j' de J, $\mathrm{Hom}(j,j')$ est fini, (iv) Pour tout objet j de J, l'ensemble des objets de J qui sont majorés par j i.e. qui sont source d'une flèche de but j, est fini. Montrer que J est admissible pour toute $\underline{U}$-catégorie C. (Montrer d'abord qu'on peut écrire J comme réunion filtrante de sous-catégories pleines finies J_n, telles que tout objet de J majoré par un objet de J_n soit dans J_n. Vérifier ensuite les critères a), b) de 8.8.3.)

Exercice 8.8.7. Nous identifions dans les notations un ensemble ordonné et la catégorie qu'il définit.

a) Soit C un ensemble ordonné. Soit $C^{\sim}$ l'ensemble des parties A de C qui sont filtrantes et telles que $x \in A$ et $y \leq x$ implique $y \in A$. Soit $L_o : C \longrightarrow C^{\sim}$ l'application qui associe à tout $x \in C$ l'ensemble $L_o(x)$ des $y \in A$ tels que $y \leq x$. Montrer que L est une application injective et que l'ordre de C est induit par celui de $C^{\sim}$. Pour tout $A \in C^{\sim}$, considérons l'inclusion $f(A) : A \longrightarrow C$, c'est un ind-objet de C ; pour tout ind-objet $\varphi : I \longrightarrow C$ de C, soit $g(\varphi) \in C^{\sim}$ la partie de C formée des éléments de C majorés par un élément de la forme $\varphi(i)$.

Montrer qu'on obtient ainsi deux équivalences quasi-inverses l'une de l'autre

$$\mathrm{Ind}(C) \overset{f,g}{\underset{\approx}{\longleftrightarrow}} C^{\sim} \quad ,$$

transformant le foncteur L_o en le foncteur canonique $L: C \to \mathrm{Ind}(C)$.

b) Supposons que pour tout $x \in C$, l'ensemble des éléments majorant (resp. minorant) x est fini. Montrer que tout ind-objet (resp. pro-objet) de C est essentiellement constant, et même que pour tout tel $\varphi : I \longrightarrow C$ (resp. $\varphi : I^o \longrightarrow C$) il existe un $i_o \in \mathrm{Ob}\, I$ tel que le foncteur induit sur $I_{/i_o}$ soit constant (i.e. transforme toute flèche en un isomorphisme).

c) Prenons $C \subset \mathbb{N}^o \times \mathbb{N}$ formé des couples d'entiers naturels (j,i) tels que $i \geq j$. Montrer que $\mathbb{N}^{\sim}$ est isomorphe à l'ensemble ordonné déduit de $\mathbb{N}$ (identifié à un sous-ensemble ordonné de $\mathbb{N}^{\sim}$ comme dans a)) en lui ajoutant un plus grand élément ∞ . Montrer que $C^{\sim}$ est isomorphe à $\mathbb{N}^o \times \mathbb{N}^{\sim}$. Considérons le foncteur

$$\varphi : \mathbb{N}^o \longrightarrow C^{\sim} \ , \quad \varphi(j) = (j,\infty) \quad .$$

Montrer que : 1) la limite projective de φ n'est pas représentable dans $C^{\sim}$, bien que les limites projectives filtrantes dans C soient représentables (et soient essentiellement constantes, en vertu de b)).
2) Pour tout foncteur $\psi : \mathbb{N}^o \longrightarrow C$, on a $\mathrm{Hom}(\psi,\varphi) = \emptyset$, et a fortiori le foncteur φ n'admet pas de représentation sous forme indicielle.

Exercice 8.8.8. Soient $X = \mathbb{N} \amalg \mathbb{N}$ l'ensemble somme de deux copies de $\mathbb{N}$, s la symétrie de X, et pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit X_i la partie $\Delta_{i+1} \amalg \Delta_i$ de $\mathbb{N}$ (où Δ_i désigne la partie de $\mathbb{N}$ formée des j tels que $j \leq i$). Soit C la sous-catégorie de la catégorie des sous-ensembles de X, dont les objets sont les X_i, et les flèches les applications entre des X_i qui sont induites par l'identité de X ou par sa symétrie s, et $C^{\sim}$ la catégorie définie de façon analogue, mais où on admet de plus l'objet X.

a) Montrer que Ind(C) est équivalente à $C^{\sim}$, le foncteur canonique $C \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$ correspondant à l'inclusion $C \longrightarrow C^{\sim}$. Montrer qu'il n'existe pas de couple (Y,f) d'un objet Y de C et d'un endomorphisme f de Y, et de morphisme d'objets à endomorphisme de Ind(C) de (Y,f) dans (X,s).

b) En conclure que si J est la catégorie ayant un seul objet, et en plus de la flèche identique une seule flèche d'ordre 2, alors le foncteur $J \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$ défini par (X,s) n'admet pas de représentation indicielle.

8.9. Propriétés d'exactitude de Ind(C)

Proposition 8.9.1. Soit C une U-catégorie.

a) Les foncteurs canoniques L (8.2.4.8) et c (8.4.1)

$$C \xrightarrow{c} \mathrm{Ind}(C) \xrightarrow{L} \hat{C}$$

commutent aux limites projectives.

b) Supposons que dans C les limites inductives finies soient représentables, et que C soit équivalente à une petite catégorie. Alors dans Ind(C) les petites limites projectives sont représentables.

c) Si dans C les petites limites projectives (resp. les limites projectives finies) sont représentables, alors il en est de même dans Ind(C). Soit J une catégorie qui est finie et rigide, ou discrète ; si les limites projectives de type J sont représentables dans C, ce même type de limites projectives est représentables dans Ind(C).

d) Les petites limites inductives filtrantes dans Ind(C) (elles sont représentables en vertu de 8.5.1) sont exacts à gauche, i.e commutent aux limites projectives finies.

Démonstration. a) Le fait que L commute aux limites projectives résulte du fait qu'il est pleinement fidèle et du calcul des limites projectives dans $\hat{C}$ "argument par argument", qui implique que pour vérifier qu'un système projectif de morphismes $F \longrightarrow F_i$ $(i \in I)$ dans $\hat{C}$ fait de F une limite projective des F_i , il suffit de vérifier que l'assertion analogue est vraie pour les système projectifs d'applications ensemblistes $\mathrm{Hom}(X,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,F_i)$, pour tout $X \in \mathrm{Ob}\, C$. Or $C \subset \mathrm{Ind}(C)$.

Le fait que c commute aux limites projectives résulte formellement du fait que L y commute, ainsi que le composé $L \circ c : C \longrightarrow \hat{C}$.

b) Compte tenu de a), l'assertion revient à dire que toute limite projective de préfaisceaux ind-représentables est ind-représentable, ce qui résulte aussitôt du critère 8.3.3 (v), compte tenu qu'une limite projective de foncteurs exacts à gauche est exact à gauche (ce qui résulte du fait que "les limites projectives commutent aux limites projectives"(2.5.0)).

c) Résulte formellement de la propriété analogue de $\hat{C}$ (3.3), et du fait que L est conservatif (étant pleinement fidèle) et commute aux limites du type envisagé (a) et 8.5.1).

d) Il est bien connu (cf. 2.3) que la représentabilité des limites projectives finies équivaut à celle des limites projectives des types

$$\text{vide}\ ,\ \cdot\ ,\quad \begin{tikzcd}[column sep=small] \cdot \arrow[dr] & & \cdot \arrow[dl] \\ & \cdot & \end{tikzcd}$$

(correspondants à des ensembles ordonnés finis particuliers), et celle des petites limites projectives revient à celle des produits et des limites projectives finies. Donc la deuxième assertion faite dans c) implique la première.

Supposons d'abord I *fini*. Utilisant le résultat 8.8.5 sur la représentabilité des foncteur $\varphi : J \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$ sous forme indicielle (8.5.4)

(8.9.1.1) $$\Phi \ :\ J\times I \longrightarrow C\quad ,$$

l'existence des $\varprojlim \varphi$ est donc un cas particulier du résultat plus précis et plus général :

Corollaire 8.8.2. *Considérons un foncteur* $\varphi : J \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$ *donné sous forme indicielle* Φ (8.9.1.1), J *étant une catégorie* finie. *Si pour tout* $i \in \mathrm{Ob}\, I$, *le foncteur partiel* $j \longrightarrow \Phi(j,i)$ *a une limite projective* (resp. *inductive*) *représentable dans* C, *alors* φ *a une limite projective* (resp. *inductive*) *représentable dans* Ind(C), *et on a un isomorphisme canonique*

(8.9.2.1) $$\varprojlim \varphi \simeq \text{"}\varinjlim_{i}\text{"}\ \varprojlim_{j} \Phi(j,i)$$

(resp.

(8.9.2.2) $$\varinjlim \varphi \simeq \text{"}\varinjlim_{i}\text{"} \ \varprojlim_{j} \Phi(j,i) \ ) \quad ,$$

où $\varprojlim_{j}$ (resp. $\varinjlim_{j}$) *est calculé dans* C.

Pour la première formule, on utilise simplement que dans Ind(C) les limites inductives filtrantes commutent à $\varprojlim_{J}$, et que c commute à $\varprojlim_{J}$ (8.9.1 d) et a)) :

$$\varprojlim \varphi = \varprojlim_{j} \text{"}\varinjlim_{i}\text{"} \Phi(j,i) \xleftarrow{\sim} \text{"}\varinjlim_{i}\text{"}\varprojlim_{j}{}^{\mathrm{Ind}(C)}\Phi(j,i) \simeq \text{"}\varinjlim_{i}\text{"}\varprojlim_{j}{}^{C}\Phi(j,i).$$

La seconde se prouve de même, en utilisant la commutation des limites inductives de type I aux limites inductives de type J (2.5.0) et le fait que c commute aux limites inductives de type J, prouvé dans 8.9.4 a) ci-dessous.

Cas J *discret*. Ce cas est contenu dans l'assertion plus précise suivante :

Corollaire 8.9.3. *Soient* I_α *des catégories filtrantes essentiellement petites indexées par un petit ensemble* A, *et pour tout* $\alpha\in A$, *soit* $X(\alpha) = (X(\alpha)_{i_\alpha})_{i_\alpha\in I_\alpha}$ *un ind-objet de* C *indexé par* I_α . *Soit* I *la catégorie produit des* I_α , *et supposons que pour tout* $\underline{i} = (i_\alpha)_{\alpha\in A}\in I$, *le produit* $\prod_{\alpha\in A} X(\alpha)_{i_\alpha}$ *soit représentable dans* C . *Alors le produit* $\prod_{\alpha\in A} X(\alpha)$ *est représentable dans* Ind(C), *et il est canoniquement isomorphe à l'ind-objet indexé par* I *donné par la formule*

(8.9.3.1) $$\prod_{\alpha\in A} \text{"}\varinjlim_{i_\alpha\in I_\alpha}\text{"} X(\alpha)_{i_\alpha} \simeq \text{"}\varinjlim_{\underline{i}=(i_\alpha)_{\alpha\in A}\in I}\text{"} \Big(\prod_{\alpha\in A} A(\alpha)_{i_\alpha}\Big) \quad ,$$

où le produit du deuxième membre est le produit calculé dans C . (On notera que I est filtrant et essentiellement petit, les I_α l'étant.)

En effet, il est bien connu (et immédiat par réduction au cas où on travaille dans la catégorie des ensembles) que la formule envisagée est valable quand on calcule les limites dans $\hat{C}$. La conclusion résulte alors du fait que L commute aux limites envisagées (8.9.1 a) et 8.5.1).

Remarques 8.9.4. La démonstration donnéede 8.9.2, 8.9.3 montre, plus généralement, que si pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, I$, $\varprojlim_j \Phi(j,i)$ (resp. $\varinjlim_j \Phi(j,i)$) calculé dans Ind(C) est représentable, alors il en est de même de $\varprojlim_i \varphi$ (resp. de $\varinjlim_j \varphi$). Ceci et l'argument de c) montre que pour une catégorie donnée J provenant d'un ensemble ordonné fini ou discret (ou plus généralement, qui est C-admissible (8.3.1)), les limites projectives (resp. inductives) de type J sont représentables dans Ind(C) si (et seulement si) pour tout foncteur $\varphi : J \longrightarrow C$, la limite projective (resp. inductive) de φ calculée dans Ind(C) est représentable. Dans le cas non respé, cela signifie aussi, en vertu de a), que toute limite projective de type J de préfaisceaux représentables sur C est ind-représentable.

Proposition 8.9.5. *Soit* **C** *une U-catégorie.*

a) *Le foncteur canonique*

$$c : C \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$$

est exact à droite (*donc* exact, *compte tenu de* 8.9.1 a)).

b) *Si les limites inductives finies* (resp. *les sommes finies*) *sont représentables dans* C, *alors les petites limites inductives* (resp. *les petites sommes*) *sont représentables dans* Ind(C). *Soit* J *un ensemble*

<u>préordonné fini ou discret</u> ; <u>si les limites inductives de type</u> J <u>sont représentables dans</u> C, <u>il en est de même dans</u> Ind(C).

<u>Démonstration</u>. a) Supposons que dans C on ait $X \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{J} X_j$, où J est une catégorie finie, X et les X_j dans C. On a alors, pour tout ind-objet $\underline{Y} = (Y_i)_{i\in I}$ de C :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(X,\underline{Y}) &\xleftarrow{\sim} \varinjlim_{i} \mathrm{Hom}(X,Y_i) \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{i} \varprojlim_{j} \mathrm{Hom}(X_j,Y_i) \\ &\overset{2.8}{\xleftarrow{\sim}} \varprojlim_{j} \varinjlim_{i} \mathrm{Hom}(X_j,Y_i) \xleftarrow{\sim} \varprojlim_{j} \mathrm{Hom}(X_j,\underline{Y}) \end{aligned} ,$$

et la conclusion voulue résulte de la comparaison des termes extrêmes.

b) On a déjà noté dans 8.8.4 que les assertions faites résultent de a) et de 8.9.2, du moins pour les limites inductives finies. Pour prouver les conclusions faites dans les cas infinis, on est ramené au cas des sommes, qui peut s'interpréter comme une limite inductive filtrante de sommes finies, et on conclut donc grâce à 8.5.1.

<u>Remarque</u> 8.9.6. On a déjà observé que le foncteur c ne commute pas en général aux limites inductives filtrantes, donc pas non plus aux sommes infinies, contrairement à ce qui a lieu pour L: $\mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \hat{C}$. Par contre, à l'exception de la commutation aux limites inductives <u>filtrantes</u> (8.5.1), L n'a pratiquement jamais de propriétés de commutation à quelque autre type de limites inductives (objet initial, somme de deux objets conoyaux de doubles flèches). Ainsi, si C admet un objet initial $\emptyset_C$, qui est donc objet initial de Ind(C) en vertu de a), $\emptyset_C$ n'est jamais objet initial de $\hat{C}$ (i.e. identique au préfaisceau constant de valeur $\emptyset$), puisque $\mathrm{Hom}(\emptyset_C,\emptyset_C) \neq \emptyset$!

Proposition 8.9.7. Soit

$$f : C \longrightarrow C'$$

un foncteur entre $\underline{U}$-catégories, et soit J une catégorie finie et rigide (8.8.5). Si les limites inductives (resp. projectives) de type J sont représentables dans C et si f y commute, alors $\mathrm{Ind}(f):\mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \mathrm{Ind}(C')$ commute également à ce type de limites.

Cela résulte aussitôt de 8.8.5 et du calcul 8.9.2 des limites finies dans une catégorie de ind-objets, pour un foncteur représenté sous forme indicielle.

Corollaire 8.9.8. Si dans C les limites inductives (resp. projectives) finies sont représentables, et si f est exact à droite (resp. à gauche) alors il en est de même de Ind(f) ; dans le cas non respé, Ind(f) commute même aux petites limites inductives quelconques.

La première assertion résulte de 8.9.7 . La deuxième résulte de la première, compte tenu que Ind(f) commute aux limites inductives filtrantes (8.6.3).

Exercice 8.9.9. Soit C une $\underline{U}$-catégorie.

a) Supposons que dans C les sommes finies sont représentables. Montrer que si dans C les sommes finies sont disjointes (resp. universelles) (cf. II 4.5), alors dans Ind(C) les petites sommes sont disjointes (resp. universelles).

b) Supposons que dans C tout morphisme se factorise en un épimorphisme suivi d'un monomorphisme (resp. en un épimorphisme effectif suivi d'un monomorphisme, resp. en un épimorphisme suivi d'un monomorphisme effectif, resp. un épimorphisme effectif suivi d'un monomorphisme effectif). Montrer que Ind(C) satisfait à la même propriété. Dans le dernier cas respé, on conclut donc que tout épimorphisme de Ind(C) est effectif, tout monomorphisme de Ind(C) est effectif, tout bimorphisme de Ind(C) est un isomorphisme ; montrer que dans ce cas tout épimorphisme (resp. monomorphisme) de Ind(C) peut se représenter par un système inductif d'épimorphismes (resp. de monomorphismes) de C. Si on suppose de plus que dans C tout épimorphisme (resp. tout monomorphisme) est <u>universel</u>, la même propriété est vraie dans Ind(C).

c) Supposons C additive (resp. abélienne), alors Ind(C) l'est également.

d) Soient $X = \text{"}\varinjlim_{I}\text{"}\, X_i$ un ind-objet de C, $R \rightrightarrows X$ une relation d'équivalence dans X. Pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, I$, soit $R_i \rightrightarrows X_i$ la relation d'équivalence dans X_i (considéré comme objet de Ind(C)) induite par R via $X_i \longrightarrow X$. (On suppose que le produit fibré $R_i = R \times_{X\times X} X_i \times X_i$ dans $\widehat{(\mathrm{Ind}(C))}$ est représentable par un objet de Ind(C), ce qui est le cas si dans C les limites projectives finies sont représentables.) Montrer que pour que R soit effective, il suffit que les R_i le soient.

e) Soient X un objet de C, R une relation d'équivalence dans c(X) i.e. dans X considéré comme objet de Ind(C). Supposons que dans C les produits fibrés soient représentables. Pour que R soit effective, il faut que R soit de la forme $\text{"}\varinjlim_{i}\text{"}\, R_i$, où les R_i sont des relations d'équivalence dans X (regardé comme un objet de C), et cette condition est suffisante si on suppose que dans C les relations d'équivalence sont effectives.

f) Supposons que dans C tout morphisme se factorise en un épimorphisme effectif suivi d'un monomorphisme effectif, et que les limites projectives finies soient représentables. Soit X un objet de C, et R un sous-objet de X×X, regardé comme élément de Ind(C). Ecrivons R sous la forme $\text{"}\varinjlim\text{"}\, Z_i$, où $(Z_i)_{i\in I}$ est une famille filtrante croissante de sous-objets de X×X <u>dans</u> C (c'est possible grâce a b)). Montrer que pour que R soit une relation d'équivalence dans X, il faut et il suffit que pour tout $i\in \mathrm{Ob}\, I$, existe un $j\in \mathrm{Ob}\, I$ qui contienne $s(Z_i)$ et $Z_i \circ Z_i$, où s est la symétrie de X×X.

g) Supposons que dans C les limites projectives finies ainsi que les sommes finies soient représentables, que toute relation d'équivalence y soit effective, et tout morphisme s'y factorise en épimorphisme effectif suivi par un monomorphisme effectif. Montrer que dans Ind(C) les relations d'équivalence sont universelles si et seulement si C satisfait à la condition suivante :

ST) Pour tout objet X de C et tout sous-objet Z de X×X dans C, si on définit par récurrence la suite de sous-objets Z_n $(n \geq 0)$ de X×X dans C par $Z_o = Z$, $Z_n = \mathrm{Sup}(Z_n, s(Z_n), Z_n \circ Z_n)$ (le Sup pris dans l'ensemble des sous-objets de X×X, qui existe grâce aux hypothèses faites sur C), alors la suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ est <u>stationnaire</u>.

k) Montrer que dans Ind(Ens)), les relations d'équivalence ne sont pas nécessairement effectives.

* NB. Pour des critères pour que Ind(C) soit un topos, cf. VI 8.9.9 .*

<u>Exercice</u> 8.9.10. Soit C une <u>U</u>-catégorie. Posons $\mathrm{Pro}(C) = (\mathrm{Ind}(C^{\circ}))^{\circ}$ (cf. 8.11).

a) Supposons que dans C les sommes finies (resp. les petites sommes) sont représentables. Montrer que si elles sont disjointes (cf. II 4.5), alors Pro(C) satisfait la même condition.

b) Soit J un petit ensemble, tel que les sommes indexées par J soient représentables dans C, donc aussi dans Pro(C). Soit $(X(\alpha))_{\alpha\in J}$ une famille d'éléments de Pro(C), avec $X(\alpha) = \text{"}\varprojlim_{I_\alpha}\text{"}\, X_{i_\alpha}$. Montrer que pour que la somme des $X(\alpha)$ dans Ind(C) soit universelle, il suffit qu'il en soit de même pour chacune des familles $\varprojlim_{J} X_{i_\alpha}$, où $(i_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in J} I_\alpha$. En conclure que si dans C les sommes de type J sont universelles, pour qu'il en soit de même dans Pro(C), il faut et il suffit que pour toute famille $(X(\alpha))_{\alpha\in J}$ comme dessus, avec $I_\alpha = I$ pour tout $\alpha\in J$, l'homomorphisme canonique dans Pro(C)

$$\text{"}\varprojlim_{I}\text{"} \coprod_{\alpha} X(\alpha)_i \longleftarrow \text{"}\varprojlim_{I^J}\text{"} \coprod_{\alpha\in J} X(\alpha)_{i_\alpha}$$

soit un isomorphisme. En conclure que dans Pro((Ens)) les sommes de type J sont universelles si et seulement si J est fini.

<u>Exercice</u> 8.9.11. Soit C une <u>U</u>-catégorie.

a) Soit $(X_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ une famille de morphismes dans C. Montrer que pour qu'elle soit épimorphique dans Ind(C), il suffit qu'il existe une sous-famille <u>finie</u> qui soit épimorphique dans C. Prouver que cette condition est également nécessaire lorsqu'on suppose que dans C toute famille finie de morphismes de but X_i se factorise en une famille épimorphique, suivie d'un monomorphisme effectif (10.5). (Pour cette dernière assertion, soit P l'ensemble des parties finies de I, ordonné par inclusion, et soit $X' = (X'_J)_{J\in P}$ le ind-objet formé des images des sous-familles finies de la famille donnée, enfin soit $X'' = X\amalg_{X'}X = \text{"lim"}\, X\amalg_{X'_J}X$. Montrer que les deux morphismes canoniques $X \rightrightarrows X''$ sont distincts, mais coïncident sur les X'_J .)

b) Supposons que dans C toute famille finie de morphismes de même but se factorise en une famille épimorphique, suivie d'un monomorphisme effectif. Prouver que Ind(C) admet une petite sous-catégorie génératrice par épimorphismes (7.1) si et seulement si C admet une petite sous-catégorie C' telle que tout objet de C soit but d'une famille épimorphique <u>finie</u> de source dans C'. Lorsqu'on suppose que C admet une petite sous-catégorie génératrice (7.1), alors Ind(C) admet une petite sous-catégorie génératrice par épimorphismes si et seulement si C est équivalente à une petite catégorie. (Pour ce dernier énoncé, utiliser 7.5.2).

c) Ind((Ens)) n'admet pas de petite sous-catégorie génératrice.

<u>Exercice</u> 8.9.12. Soit C une <u>U</u>-catégorie, et considérons $\mathrm{Pro}(C)=\mathrm{Ind}(C^{\circ})^{\circ}$.

a) Montrer que si Pro(C) admet une petite sous-catégorie P' génératrice par épimorphismes (7.1), alors il existe une petite sous-catégorie C' de C qui est génératrice par épimorphismes dans Pro(C). (Prendre la catégorie des composants des objets de P'.)

b) Montrer que la catégorie Pro((Ens)) n'a pas de petite sous-catégorie génératrice par épimorphismes. (Si C' est comme dans a), choisir un ensemble X dont le cardinal majore strictement les cardinaux des éléments de C', et considérer le pro-ensemble $\underline{X}$ formé par les complémentaires dans X des parties de cardinal < card(X). Montrer que pour tout ensemble Y non vide de cardinal < card(X), on a $\mathrm{Hom}(Y,\underline{X}) = \emptyset$, mais que $\underline{X}$ n'est pas isomorphe au pro-ensemble constant $\emptyset$.)

8.10. Notions duales : proobjets, foncteurs pro-représentables

Soit C une $\underline{U}$-catégorie. On appelle pro-objet de C tout foncteur

(8.10.1) $$\varphi : I^{\circ} \longrightarrow C \quad ,$$

où I est une catégorie filtrante essentiellement petite (appelée la catégorie d'indices), et comme d'habitude I° désigne la catégorie opposée. Soit $\underline{V}$ un univers tel que $\underline{V} \supset \underline{U}$. On fera attention que les pro-objets de C indexés par des $I \in \underline{V}$ sont en correspondance biunivoque avec les ind-objets de C° indexés par des $I \in \underline{V}$, en associant à tout tel ind-objet $\psi : I \longrightarrow C^{\circ}$ le pro-objet $\varphi = \psi^{\circ} : I^{\circ} \longrightarrow C$. S'inspirant de cette correspondance, on définit "par transport de structure et renversement des flèches" la notion de morphisme entre pro-objets de C à partir de la notion analogue (8.2.4.2), (8.2.5.1) pour les in-objets, et on définit en conséquence la catégorie des pro-objets de C indexés par des $I \in \underline{V}$, et un isomorphisme canonique :

(8.10.2) $$\mathrm{Pro}_{\underline{V}}(C,\underline{U}) \simeq \mathrm{Ind}_{\underline{V}}(C^{\circ},\underline{U})^{\circ} \quad ;$$

pour $\underline{V}=\underline{U}$ on parle simplement de la <u>catégorie des pro-objets de</u> C , notée $\mathrm{Pro}_{\underline{U}}(C)$ ou simplement Pro(C), qui est donc définie par

(8.10.3) $$\mathrm{Pro}(C) = \mathrm{Pro}_{\underline{U}}(C,\underline{U}) \simeq \mathrm{Ind}(C^{\circ})^{\circ} \quad .$$

Si deux pro-objets sont donnés sous <u>forme indicielle</u>

(8.10.4) $$\underline{X} = (X_i)_{i\in I} \quad , \quad \underline{Y} = (Y_j)_{j\in J} \quad ,$$

la formule (8.2.5.1) prend ici la forme

(8.10.5) $$\mathrm{Hom}(\underline{X},\underline{Y}) \simeq \varprojlim_{j} \varinjlim_{i} \mathrm{Hom}(X_i,Y_j) \quad .$$

Le foncteur (8.4.1) appliqué à C° donne, par passage aux catégories opposées, un foncteur canonique (dénoté par la même lettre c s'il n'y a pas risque de confusion), permettant d'identifier C à une sous-catégorie pleine de Pro(C) :

(8.10.6) $$c\colon C \longrightarrow \mathrm{Pro}(C) \quad ;$$

c'est pour avoir un tel foncteur, et non $C \longrightarrow \mathrm{Pro}(C)^{\circ}$, qu'on a "renversé les flèches" dans la définition des morphismes de pro-objets à partir de la définition analogue pour les ind-objets. Les pro-objets dans l'image essentielle de (8.10.6) s'appellent encore <u>pro-objets essentiellement constants</u>.

Posons

(8.10.7) $$\check{C} = (C^{\circ})^{\wedge} = \underline{\mathrm{Hom}}(C,(\mathrm{Ens})) \quad ,$$

alors le foncteur (8.2.4.7) peut être considéré comme un foncteur canonique pleinement fidèle

(8.10.8) $L\colon \mathrm{Pro}_{\underline{V}}(C,\underline{U}) \longrightarrow \check{C}^{\circ}$,

et on trouve en particulier

(8.10.9) $L\colon \mathrm{Pro}(C) \hookrightarrow \check{C}^{\circ}$.

Nous laisserons au lecteur le soin de traduire, au fur et mesure des besoins, les résultats des sections précédentes et de celles qui suivent du langage des ind-objets dans celui des pro-objets. Suivant le contexte mathématique, c'est l'un ou l'autre langage qui est le plus utile, sans compter les cas où les deux notions s'introduisent simultanément, par exèmple lorsqu'il y a lieu de considérer des catégories complexes comme Pro(Ind(C)) ou Ind(Pro(C)). Nous nous contentons de donner quelques indications supplémentaires, pour fixer la terminologie et les notations, et préciser le "yoga".

8.10.10. Un foncteur covariant $F\colon C \longrightarrow (\mathrm{Ens})$ est dit foncteur pro-représentable s'il est dans l'image essentielle de (8.10.9) (ou 8.10.8, cela revient au même) ; la sous-catégorie pleine de $\check{C}$ formée de ces foncteurs est donc équivalente à $\mathrm{Pro}(C)^{\circ}$. On préfèrera généralement travailler dans la catégorie opposée, image essentielle en tant que sous-catégorie de (8.10.9), qui est donc équivalente à Pro(C) lui-même. En accord avec cet usage, il est souvent préférable de regarder les foncteurs covariants

$$F\colon C \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

comme des objets de $\underline{\mathrm{Hom}}(C,(\mathrm{Ens}))^{\circ} = \check{C}^{\circ}$, et d'écrire en conséquence la catégorie des homomorphismes

$$X \longrightarrow F \quad \text{dans} \quad \check{C}^{\circ} \quad ,$$

i.e. des couples (X,u) d'un objet X de C et d'un u ∈ F(X), comme

(8.10.11) $$_{F}\backslash C \quad .$$

Avec cette convention, on trouvera donc un foncteur <u>covariant</u> (foncteur source)

(8.10.12) $$_{F}\backslash C \longrightarrow C \quad ,$$

et 3.4 se récrit sous la forme

(8.10.13) $$F \xrightarrow{\sim} \underset{(_{F}\backslash C)^{\circ}}{\text{"}\varprojlim\text{"}} X$$

8.10.14. Le critère 8.3.3 appliqué à C° devient un critère de proreprésentabilité pour F : il faut et il suffit que $(_{F}\backslash C)^{\circ}$ soit filtrante et essentiellement petite, cette dernière condition étant superflue si C est équivalente à une petite catégorie ; si de plus dans C les limites projectives finies sont représentables, il revient au même de dire que F y commute i.e. est <u>exact à gauche</u>.

8.10.15. Dans Pro(C) les petites limites projectives filtrantes sont représentables et le foncteur (8.10.9) y commute ; en d'autres termes, ce foncteur transforme limites projectives en Pro(C) en limites <u>inductives</u> de $\check{C}$ = <u>Hom</u>(C,(Ens), tout comme son composé $C \longrightarrow \check{C}^{\circ}$ avec (8.10.6), qui partage avec lui la fâcheuse propriété d'être contravariant quand on le considère à valeurs dans $\check{C}$. On fera attention que les foncteurs pro-représentables de C dans (Ens) sont les foncteurs qui sont des petites limites <u>inductives</u> filtrantes de foncteurs représentables (et non des limites projectives, comme la terminologie pourrait éventuellement le suggérer).

8.11. Ind-adjoints et pro-adjoints

8.11.1. Soit

(8.11.1.1) $$f : C \longrightarrow C'$$

un foncteur entre <u>U</u>-catégories, d'où un foncteur $F \longrightarrow F \circ f$

(8.11.1.2) $$f^* : \hat{C}' \longrightarrow \hat{C} \quad .$$

On dit que f <u>admet un ind-adjoint</u> si le foncteur précédent transforme foncteurs ind-représentables en foncteurs ind-représentables. Comme f^* commute aux limites inductives, et que la sous-catégorie pleine de C' formée des foncteurs ind-représentables est stable par petites limites inductives filtrantes, il revient au même de dire que f admet un ind-adjoint, ou que f^* applique objets de C (identifié à une sous-catégorie pleine de $\hat{C}$) dans des foncteurs ind-représentables sur C, i.e.

(8.11.1.3) $$X \longmapsto \mathrm{Hom}(f(X),Y') \text{ est ind-représentable pour tout } Y' \in \mathrm{Ob}\, C'.$$

Une autre façon d'exprimer la condition que f admette un ind-adjoint est de dire qu'il existe un foncteur

(8.11.1.4) $$g : \mathrm{Ind}(C') \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$$

qui soit essentiellement induit par f^* , i.e. tel qu'on ait un isomorphisme de bifoncteurs

(8.11.1.5) $\quad \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(C)}(X, g(\underline{Y}')) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(C')}(f(X), \underline{Y}')$,

où $X \in \mathrm{Ob}\, C$ et $Y' \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{Ind}(C')$. En fait, il suffit même d'avoir un foncteur

(8.11.1.6) $\quad g_o : C' \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$

et un isomorphisme de bifoncteurs

(8.11.1.7) $\quad \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(C)}(X, g_o(Y')) \simeq \mathrm{Hom}_{C'}(f(X), Y')$

en $X \in \mathrm{Ob}\, C$, $Y' \in \mathrm{Ob}\, C'$. Le foncteur g (resp. g_o) est évidemment déterminé à isomorphisme unique près par f, et inversement on réconstitue f à isomorphisme canonique près par la connaissance de ce g (resp. g_o). Il est clair sur (8.11.1.5) que le foncteur g commute aux limites inductives, et qu'il "prolonge" le foncteur g_o ; cela le détermine donc à isomorphisme unique près en termes de g_o (8.7.2). Le foncteur g, et parfois aussi le foncteur g_o qu'il prolonge, est appelé le <u>foncteur ind-adjoint de</u> f (inutile ici de préciser : à droite, car l'autre, s'il existe, s'appellera le pro-adjoint, cf. 8.11.5 plus bas).

Bien entendu, lorsque f admet un adjoint à droite

$$f^{ad} : C' \longrightarrow C \quad ,$$

il admet un ind-adjoint g, et celui-ci est isomorphe canoniquement au prolongement canonique de f aux ind-objets :

(8.11.1.8) $\quad g \simeq \mathrm{Ind}(f^{ad}) \quad .$

La notion de ind-adjoint est donc une généralisation naturelle de la notion d' adjoint à droite.

Considérons maintenant le prolongement canonique

(8.11.1.9) $\qquad \mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \mathrm{Ind}(C')$.

On a alors :

Proposition 8.11.2. Pour que le foncteur $f: C \longrightarrow C'$ admette un ind-adjoint, il faut et il suffit que le foncteur $\mathrm{Ind}(f)$ (8.11.1.9) admette un adjoint à droite. Ce dernier est canoniquement isomorphe au ind-adjoint (8.11.1.4).

La suffisance et la dernière assertion sont triviales sur la formule de ind-adjonction (8.11.1.5). Pour la nécessité, on note que par passage à la limite projective sur cette formule sur des X_i , on déduit un isomorphisme d'adjonction en les pro-objets $\underline{X} = (X_i)_{i\in I}$ et $\underline{Y}'$:

(8.11.2.1) $\qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(C)}(\underline{X} , g(\underline{Y}')) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(C')}(\mathrm{Ind}(f)(\underline{X}),\underline{Y}')$,

cqfd.

Corollaire 8.11.3. Si f admet un ind-adjoint, alors $\mathrm{Ind}(f)$ commute aux limites inductives, et le ind-adjoint g commute aux limites projectives.

Proposition 8.11.4. Pour que le foncteur $f: C \longrightarrow C'$ admette un ind-adjoint, il faut que f soit exact à gauche, et cette condition est suffisante lorsque C est équivalente à une petite catégorie.

Cela résulte du critère (8.11.1.3), et de 8.3.1 et 8.3.3 (iv).

Pour un autre critère en termes de la notion de foncteur accessible, cf. 8.13.3.

8.11.5. Considérons maintenant le foncteur $F \longmapsto F \circ f$

(8.11.5.1) $$f^{o*} : \check{C}' \longrightarrow \check{C}$$

induit par F . On dira que f <u>admet un pro-adjoint</u> si le foncteur précédent applique foncteur pro-représentable en foncteur pro-représentable, i.e. s'il existe un foncteur (appelé <u>foncteur pro-adjoint de</u> f)

(8.11.5.2) $$g : \mathrm{Pro}(C) \longrightarrow \mathrm{Pro}(C') \quad ,$$

et un isomorphisme de bifoncteurs

(8.11.5.3) $$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(C)}(g(\underline{Y}'),X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(C')}(\underline{Y}'),f(X)) \quad .$$

Bien entendu, dire que f admet un pro-adjoint signifie que f^o admet un ind-adjoint, de sorte que les notions et résultats pour les ind-adjoints se traduisent trivialement en termes de pro-adjoints. Signalons seulement que f admet un pro-adjoint si et seulement si $\mathrm{Pro}(f) : \mathrm{Pro}(C) \to \mathrm{Pro}(C')$ admet un adjoint <u>à droite</u>, et que dans ce cas le foncteur g précédent est un tel adjoint à droite de $\mathrm{Pro}(C)$; et qu'il faut pour ceci que f soit exact à <u>gauche</u>, cette condition étant également suffisante lorsque C est équivalente à une petite catégorie. Dans ce cas, f est donc exact si et seulement si il admet à la fois un ind-adjoint et un pro-adjoint.

<u>Exemple</u> 8.11.6. Considérons le cas d'un foncteur

$$f : C \longrightarrow (\mathrm{Ens}) \quad .$$

Si ce foncteur admet un pro-adjoint, il est pro-représentable, et la réciproque est vraie si et seulement si la sous-catégorie pleine de $\check{C}$ formée des foncteurs pro-représentables est stable par petits produits ;

c'est le cas en particulier si C est équivalente à une petite catégorie (8.10.14) ou si dans C les petits produits sont représentables (8.9.5 b) appliquée à C^{o}). A peu de choses près, on peut donc dire que pour un foncteur $f: C \longrightarrow C'$, la notion d'existence d'un pro-adjoint est la généralisation naturelle de la notion de pro-représentabilité de f , qui est définie lorsque C' = (Ens).

8.12. Ind-objets et pro-objets stricts. Application à un critère de représentabilité

8.12.1. Soit

$$\underline{X} = (X_i)_{i \in I}$$

un ind-objet de la $\underline{U}$-catégorie C, et soit F le préfaisceau qu'il ind-représente. On voit alors aussitôt qu'il revient au même de dire que les morphismes canoniques

$$X_i \longrightarrow F = \text{"}\varinjlim_{i}\text{"}\, X_i$$

sont des monomorphismes de Ind(C) (ou, ce qui revient au même, de $\hat{C}$, i.e. des monomorphismes de foncteurs "argument par argument"), ou de dire que pour toute flèche $i \longrightarrow j$ de I, la flèche de transition correspondante

$$X_i \longrightarrow X_j$$

est un monomorphisme. Lorsque ces conditions sont remplies, et si de plus I est une catégorie ordonnée, on dit que $\underline{X}$ est un <u>ind-objet strict</u>.

On notera que cette condition n'est pas invariante par isomorphisme de ind-objets ; un ind-objet sera appelé <u>essentiellement strict</u> s'il est isomorphe à un ind-objet strict. Un préfaisceau sera appelé <u>strictement ind-représentable</u> s'il est ind-représentable par un ind-objet strict ; donc $F = \text{"}\varinjlim_{i}\text{"} X_i$ est strictement ind-représentable si et seulement si $\underline{X} = (X_i)_{i \in I}$ est essentiellement strict.

8.12.1.1. Soit F un préfaisceau sur C, et considérons la sous-catégorie pleine de $C_{/F}$ formée des flèches $X \longrightarrow F$ de source dans C qui sont des monomorphismes. On l'appelera la <u>catégorie des sous-foncteurs représentables de</u> F ; c'est la catégorie associée à l'ensemble ordonné des sous-foncteurs représentables de F, ordonné par l'ordre induit de celui de l'ensemble des sous-objets de F . Il résulte alors aussitôt des définitions :

<u>Proposition</u> 8.12.2. <u>Pour que le préfaisceau</u> F <u>sur</u> C <u>soit strictement ind-représentable, il faut et il suffit que la catégorie</u> (ordonnée) I <u>des sous-foncteurs représentables de</u> F <u>soit filtrante et essentiellement petite et que l'on ait</u>

(8.12.2.1) $$\varinjlim_{I} X_i \xrightarrow{\sim} F \quad ,$$

<u>Lorsque pour tout objet</u> X <u>de</u> C, <u>l'ensemble des sous-objets de</u> X <u>dans</u> C <u>est petit</u> (<u>par exemple si</u> C <u>admet une petite sous-catégorie génératrice</u> (7.4)), <u>cela implique que la catégorie des sous-foncteurs représentables est même petite</u>.

8.12.2.2. Si F est strictement ind-représentable, il y a donc une façon privilégiée de le ind-représenter par un ind-objet, et ce dernier est même un ind-objet strict : on prend la représentation (8.12.2.1). Un ind-objet strict $\underline{Y}$ est dit <u>saturé</u> s'il est isomorphe à un ind-objet de la forme (X_i) figurant dans (8.12.2.1), pour F convenable ; donc il existe à isomorphisme unique près, un seul ind-objet strict saturé isomorphe au ind-objet strict donné, savoir celui envisagé dans 8.12.2, en prenant $F = \varinjlim \underline{Y}$ (limite dans $\hat{C}$).

8.12.2.3. Supposons qu'on sache déjà que l'on puisse trouver une petite partie cofinale dans l'ensemble Ob $C_{/F}$, ce qui est le cas en particulier si F est ind-représentable ; alors il s'ensuit que la même condition est vérifiée dans la sous-catégorie pleine I envisagée dans 8.12.2, donc on peut dans le critère 8.12.2 omettre la condition que I soit essentiellement petite.

8.12.3. Soit F un préfaisceau sur C, et considérons un objet

$$u : X \longrightarrow F$$

de $C_{/F}$. On dit que u (ou le couple (X,n)) est <u>minimal</u> si pour toute factorisation de u en

$$X \xrightarrow{p} X' \xrightarrow{u'} F \qquad , \tag{8.12.3.1}$$

avec p un épimorphisme strict (10.2), p est un isomorphisme. Considérant u comme un objet de F(X) (1.4) , dire que u est minimal signifie donc que tout épimorphisme strict $p: X \longrightarrow X'$ tel que $u \in \mathrm{Im}(F(p): F(X') \rightarrow F(X))$ est un isomorphisme. Cette notion s'éclaire par la partie a) du lemme suivant :

Lemme 8.12.4. Soit F un préfaisceau sur C .

a) Supposons que F transforme conoyaux en noyaux et considérons un morphisme

$$u: X \longrightarrow F \quad ,$$

avec $X \in \mathrm{Ob}\, C$. Pour que u soit un monomorphisme, il suffit, lorsque dans C les conoyaux de doubles flèches sont représentables, que u soit minimal ; cette condition est également nécessaire si dans C les produits fibrés sont représentables.

b) Supposons que dans C les $\varinjlim$ finies soient représentables. Pour que la sous-catégorie des sous-foncteurs représentables de F (8.12.1.1) soit filtrante (pas nécessairement petite) et ait pour limite inductive F , il suffit que F soit exact à gauche et que tout morphisme $u: X \longrightarrow F$, avec $X \in \mathrm{Ob}\, C$, se factorise en

$$X \longrightarrow X' \xrightarrow{u'} F \quad ,$$

avec u' minimal ; cette condition est également nécessaire si dans C les produits fibrés sont représentables.

c) Supposons que C admette une petite sous-catégorie génératrice (7.1), et que I la catégorie des sous-foncteurs représentables de F soit filtrante, alors I est petite.

<u>Démonstration</u>. a) Supposons u minimal, prouvons que u est un monomorphisme, i.e. que pour toute double-flèche $v,v' : Y \rightrightarrows X$ telle que $uv = uv'$, on a $v=v'$. En effet, si $X' = \mathrm{Coker}(v,v')$, alors u se factorise en $X \xrightarrow{p} X' \xrightarrow{u'} F$ (F transformant conoyaux en noyaux), et comme p est un épimorphisme strict par construction, il s'ensuit que p est un isomorphisme i.e. $v=v'$. Supposons que u est un monomorphisme, prouvons qu'il est minimal. Considérons une factorisation (8.12.3.1) ; comme p est un épimorphisme strict, c'est le conoyaux de la double flèche canonique $v,v' : X \times_{X'} X \rightrightarrows X$, et comme $(u'p)v = (u'p)v'$ et que $u'p=u$ est un monomorphisme, on a $v=v'$ donc p est un isomorphisme.

b) Suffisance : Comme F est exact à gauche, $C_{/F}$ est filtrante. Comme on sait que $F = \varinjlim_{C_{/F}} X$, on est ramené par 8.1.3 c) à prouver que la sous-catégorie pleine I de $C_{/F}$ des sous-objets de F est cofinale dans $C_{/F}$; or en vertu du "il suffit" dans a), c'est ce qu'assure l'hypothèse que tout objet de $C_{/F}$ est majoré par un objet "minimal". Nécessité : Comme toute limite inductive filtrante de foncteurs exacts à droite est itou, la première condition est trivialement nécessaire. La deuxième résulte alors du "il faut" dans a).

c) Un sous-foncteur représentable $X \hookrightarrow F$ de F est connu quand on connaît la sous-catégorie pleine $C'_{/X}$ de $C'_{/F}$, où C est une petite sous-catégorie génératrice fixée de C . (Utiliser l'hypothèse I filtrante.) Comme $C'_{/F}$ est petite, l'ensemble de ses sous-catégories pleines est petit, d'où la conclusion.

<u>Proposition</u> 8.12.5. <u>Soit</u> C <u>une</u> <u>U-catégorie où les limites inductives finies sont représentables</u>, <u>et admettant une petite sous-catégorie génératrice</u> (7.1). <u>Soit</u> F <u>un préfaisceau sur</u> C . <u>Pour que</u> F <u>soit strictement ind-représentable</u>, <u>il suffit qu'il satisfasse les deux conditions suivantes</u>, <u>et celles-ci sont également nécessaires si dans</u> C <u>les produits fibrés sont représentables</u> :

a) F <u>est exact à gauche</u>.

b) <u>Tout couple</u> (X,u), <u>avec</u> $X \in \mathrm{Ob}\, C$ <u>et</u> $u \in F(X)$, <u>est majoré dans</u> $C_{/F}$ <u>par un couple</u> minimal (8.12.3), <u>i.e.</u> <u>il existe un couple minimal</u> (X',u') ($X' \in \mathrm{Ob}\, C$, $u' \in F(X)$) <u>et un morphisme</u> $f: X \longrightarrow X'$ <u>tel que</u> $u = F(f)(u')$.

La suffisance résulte de 8.12.2 et de 8.12.4 b), c), la nécessité de 8.3.1 et de 8.12.4 a).

<u>Remarque</u> 8.12.6. Lorsque F transforme sommes amalgamées de C en produits fibrés, on voit aussitôt que pour un couple (X,u) donné comme dans b), l'ensemble des quotients stricts X' de X tels que $u \in \mathrm{Im}(F(X') \rightarrow F(X))$ est filtrant décroissant, ce qui implique que si l'ensemble des quotients stricts de X est artinien, alors la condition b) de 8.12.5 est automatiquement satisfaite. Si donc la condition précédente sur X est satisfaite pour tout objet X de C (on dit aussi alors, parfois, que les objets de C^{o} sont <u>artiniens</u>), alors il résulte de 8.12.5 que F est strictement ind-représentable si et seulement si F est exact à gauche ; dans ce cas, F est donc strictement ind-représentable dès qu'il est ind-représentable (8.3.1).

Corollaire 8.12.7. *Soit C une U-catégorie où les petites limites projectives sont représentables, et admettant une petite sous-catégorie cogénératrice* (7.9, 7.13). *Alors un foncteur* $F: C \longrightarrow (\mathrm{Ens})$ *est représentable si et seulement si* F *commute aux petites limites projectives.*

La nécessité est claire. Pour la suffisance, on applique 8.12.5 à la catégorie opposée C°. Pour prouver d'abord que F est (strictement) pro-représentable, on est ramené à prouver que tout couple (X,u), $X \in \mathrm{Ob}\, C$ et $u \in F(X)$, est majoré par un couple "minimal". Or la famille $(X_i)_{i \in I}$ des sous-objets *stricts* de X tels que $u \in \mathrm{Im}(F(X_i) \longrightarrow F(X))$ est petite (7.5 sous forme duale). Grâce au fait que F est exact à gauche, elle est ∞-filtrante (8.12.6), et grâce au fait que F commute aux petites limites projectives on voit que $X' = \varprojlim_i X_i$ est un plus petit objet de cette famille. (Utiliser le fait que, F étant exact à gauche, transforme monomorphismes en monomorphismes.) Si $u' \in F(X')$ est l'unique élément dont l'image dans F(X) est u, on voit alors que (X',u') est un couple minimal majorant (X,u). Cela prouve que F est pro-représentable, et la conclusion résulte alors du

Lemme 8.12.8.1. *Soit* $F: C \longrightarrow (\mathrm{Ens})$ *un foncteur, où C est une U-catégorie où les petites limites projectives sont représentables. Pour que* F *soit représentable, il faut et il suffit qu'il soit pro-représentable et qu'il commute aux petites limites projectives.*

La nécessité est claire, prouvons la suffisance. Dire que F est représentable signifie évidemment que $_{F\backslash}C$ admet un élément initial (en fait, les objets initiaux de $_{F\backslash}C$ sont précisément les isomorphismes $F \longrightarrow X$, i.e. les données de représentation pour F). Or F étant proreprésentable, $(_{F\backslash}C^{o})$ est filtrante et équivalente à une petite catégorie, donc $X = \varprojlim_{(_{F\backslash}C)^{o}} X$ est représentable dans C, et comme F commute à la limite envisagée, il s'ensuit que X est un objet initial de $_{F\backslash}C$, cqfd.

Corollaire 8.12.8. *Les hypothèses sur* C *étant celles de* 8.12.7, *soit* $f : C \longrightarrow C'$ *un foncteur de* C *dans une* U-*catégorie* C' . *Pour que* f *admette un adjoint à gauche, il faut et il suffit que* f *commute aux petites limites projectives*.

Cela se ramène en effet trivialement à 8.12.7, en appliquant cet énoncé aux foncteurs composés de la forme $X \longmapsto \mathrm{Hom}(Y', f(X))$.

Exemples 8.12.9. Comme on a signalé dans 7.13, les hypothèses sur E de 8.12.7 et 8.12.8 sont vérifiées si C est la catégorie des U-faisceaux d'ensembles sur un espace topologique $X \in U$ (ou plus généralement, sur un U-site (II 3.0.2)). Donnons un exemple instructif (*) qui montre que l'hypothèse d'existence d'une petite sous-catégorie cogénératrice D de C n'est pas surabondante dans 8.12.7. Prenons pour C la catégorie des groupes éléments de U . Soit J l'ensemble des classes d'isomorphie de groupes simples $\in$ C, choisissons pour tout $j \in J$ un groupe simple G_j dans la calsse de j, et soit I l'ensemble ordonné filtrant des parties U-petites de J, et pour $i \in I$, soit $X_i = \coprod_{j \in i} G_j$. Les X_i forment alors

(*) (dû à H. BASS).

un système projectif $(X_i)_{i\in I}$ dans E, à morphismes de transition des épimorphismes, et le foncteur correspondant

$$(*) \qquad F(X) = \varinjlim_i \mathrm{Hom}(X_i,X)$$

prend ses valeurs dans (U-Ens) (bien que l'ensemble d'indices I n'ait évidemment pas un cardinal $\in$ U) ; plus précisément, montrons que pour toute petite sous-catégorie pleine C_o de C, il existe un $i_o \in I$ tel que la restriction de F à C_o soit représentable par X_{i_o} , ce qui prouvera à la fois que F est à valeurs dans U-Ens, et qu'il commute aux petites limites projectives. Pour prouver notre assertion, il suffit de noter que pour tout X $\in$Ob C_o, le cardinal de l'ensemble J(X) des $j \in J$ tels qu'il existe un homomorphisme non trivial de G_j dans X est nécessairement petit, puisque un tel morphisme est nécessairement un monomorphisme (G_j étant simple) ; par suite, si i_o est la partie de J réunion des J(X) pour X $\in$ ob C_o, i_o est petit i.e. $i_o \in I$, et il fait l'affaire. D'autre part il est clair que F n'est pas représentable, puisque on a card I $\notin$ U . De ceci et de 8.12.7 on conclut donc que <u>la catégorie C des groupes $\in$ U n'admet pas une petite sous-catégorie pleine cogénératrice</u>. Comme l'objet $\mathbb{Z}$ de C est d'autre part un générateur, il résulte alors de la démonstration de 7.12 qu'il existe un groupe G à deux générateurs qui ne se plonge pas dans un objet injectif de la catégorie C des groupes $\in$ U. Il semble d'ailleurs plausible que C n'admette pas d'autre objet injectif que les groupes unités.

8.13. Foncteurs proreprésentables et foncteurs accessibles

8.13.1. Dans le présent numéro, nous utilisons quelques notions et résultats du paragraphe suivant, et notamment 9.11 et 9.13, pour obtenir un critère de proreprésentabilité que nous utiliserons (incidemment) dans IV 9.16 . C désigne par la suite une U-catégorie satisfaisant la condition L de 9.1 b), cette condition étant remplie par exemple si dans C les petites limites inductives filtrantes sont représentables.

Proposition 8.13.2. *Soient* C *comme ci-dessus, et*

$$f : C \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

un foncteur.

a) *Supposons que chaque objet de* C *est accessible* (9.3). *Si* f *est pro-représentable*, f *est accessible* (9.2) *et exact à gauche*.

b) *Supposons que dans* C *les limites projectives finies soient représentables, et que* C *admette une filtration cardinale* (9.12). *Si* f *est accessible et exact à gauche, alors* f *est proreprésentable*.

Démonstration. a) L'hypothèse sur C signifie que les foncteurs covariants représentables de C dans (Ens) sont accessibles. Il en est donc de même de toute petite limite inductive de tels foncteurs (9.6 (i)), donc aussi de tout foncteur pro-représentable.

b) En vertu de 8.3.3 (iii), il reste à prouver que dans $Ob({}_{F}C)^{\circ}$ il y a une petite sous-catégorie cofinale. Or par hypothèse il existe un cardinal π tel que f soit π-accessible. Soit alors

(X,u), $u \in F(X)$, un objet de ${}_{F\backslash}C$. Avec les notations de 9.12 c) on a alors $X = \varinjlim_{i} X_i$, avec I filtrant grand devant π et les X_i dans $C' = \mathrm{Filt}^{\pi}(C)$, d'où $F(X) \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{i} F(X_i)$. Cela montre que la petite sous-catégorie $({}_{F\backslash}C')^{\circ}$ est cofinale dans $({}_{F\backslash}C)^{\circ}$, et achève la démonstration.

Corollaire 8.13.3. *Soit* C *une* *U-catégorie satisfaisant aux conditions suivantes* :

a) *Dans* C *les limites projectives finies sont représentables.*

b) *Dans* C *les petites limites inductives filtrantes sont représentables.*

c) *Le foncteur* Ker *sur la catégorie des doubles flèches de* C *est accessible* (*par exemple, il commute aux petites* $\varinjlim$ *filtrantes*).

d) *Tout épimorphisme strict de* C *est strict universel* (10.2).

e) *Il existe une petite sous-catégorie de* C *génératrice par épimorphismes stricts* (7.1).

Sous ces conditions, *un foncteur* $f: C \longrightarrow (\mathrm{Ens})$ *est proreprésentable si et seulement si il est exact à gauche et accessible* (9.2).

En effet, les conditions de 8.13.2 a) et b) sur C sont vérifiées, en vertu de 9.11 et 9.13 respectivement.

Corollaire 8.13.4. *Soit* $f: C \longrightarrow C'$ *un foncteur entre* *U-catégories satisfaisant aux conditions* a) *à* e) *de* 8.13.3. *Pour que* f *admette un pro-adjoint, il faut et il suffit que* f *soit exact à gauche et accessible.*

Comme les foncteurs représentables

$h_{Y'} : X' \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y',X') : C' \longrightarrow (\mathrm{Ens})$ sont exacts à gauche et accessibles (9.11), si f a ces mêmes propriétés, il en est de même de ses composés avec les foncteurs précédents, qui sont donc pro-représentables par 8.13.3, i.e. f admet un proadjoint. Inversement, supposons que f admet un proadjoint, et soient C'_1 une petite sous-catégorie génératrice de C, π un cardinal tel que les $Y' \in \mathrm{Ob}\, C'$ soient π-accessibles ; pour prouver que f est π-accessible, il suffit donc de prouver qu'il en est ainsi de ses composés avec les $h_{Y'}$, $Y' \in \mathrm{Ob}\, C'$; or par hypothèse ces composés sont proreprésentables, donc ils sont accessibles (8.13.3), donc π-accessibles pourvu qu'on prenne π assez grand, cqfd.

9. Foncteurs accessibles, filtrations cardinales et construction de petites sous-catégories génératrices.

Le présent paragraphe, de nature plus technique que les autres paragraphes de cet exposé, ne servira dans ce séminaire que dans IV 9 et dans VI 4, qui ne sont pas utilisés ailleurs dans le Séminaire. Il s'impose donc d'omettre la lecture du présent paragraphe, du moins en première lecture !

9.0. Toutes les catégories envisagées dans le présent numéro sont supposées être des U-catégories. Sauf pour les petites catégories d'indic[e] I, J ... que nous aurons à utiliser, les développements qui suivent s'appliqueront surtout à des "grosses" catégories E,F ... qui sont stables par petites limites inductives filtrantes. Il suffira cependant le plus souvent qu'une condition un peu plus faible soit vérifiée (condition L dans 9.1 ci-dessous). Tous les cardinaux envisagés dans le présent numéro sont supposés $\in \underline{U}$.

Suivant une suggestion de P. DELIGNE, nous allons étudier, pour un foncteur $f: E \longrightarrow F$ entre grosses catégories, une condition de commutation de f à certains types de limites inductives filtrantes, condition remarquablement stable, et qui sera vérifiée pour les foncteurs les plus importants qu'on rencontre dans la nature. Les applications que nous avons en vue, pour notre séminaire, sont 9.13.3, 9.13.4 (utilisés dans VI 4) et surtout 9.25, qui donne, dans un cas non trivial, l'existence d'une petite famille génératrice dans une catégorie de sections d'une catégorie fibrée ; ce résultat sera utilisé dans IV 9.16.

Définition 9.1. a) *Soient* I *un ensemble préordonné,* π *un cardinal. On dit que* I *est* grand devant π *si* I *est filtrant, et si toute partie de* I *de cardinal* $\leq \pi$ *admet un majorant dans* I .

b) *Soit* E *une catégorie. Si* π *est un cardinal, on dit que* E satisfait la condition L_π *si pour tout petit ensemble ordonné* I *grand devant* π , E *est stable par les limites inductives de type* I . *On dit que* E satisfait à la condition L *s'il existe un cardinal* $\pi \in \underline{U}$ *tel que* E *satisfasse à la condition* L_π .

9.1.1. Lorsque dans 9.1 a) on a $\pi \geq 2$, la deuxième condition énoncée implique déjà que I est filtrant, et si π est fini, I grand devant π signifie simplement que I est filtrant. Nous ne nous intéresserons guère par la suite qu'au cas où π est infini. Notons que si π, π' sont deux cardinaux tels que $\pi' \geq \pi$, alors I grand devant π' implique évidemment I grand devant π .

9.1.2. Comme annoncé dans 9.0, les conditions L_π , L doivent être considérées comme des variantes techniques de la condition plus forte de stabilité par petites limites inductives filtrantes. Il est clair que si π, π' sont des cardinaux tels que $\pi' \geq \pi$, alors la condition L_π implique la condition $L_{\pi'}$.

Définition 9.2. Soit $f: E \longrightarrow F$ un foncteur. Si π est un cardinal, on dit que f est π-préaccessible (resp. π-accessible) si E satisfait L_π (9.1) et si pour tout ensemble ordonné $I \in \underline{U}$ grand devant π, et tout système inductif $(X_i)_{i\in I}$ dans E de type I, le morphisme canonique

$$\varinjlim f(X_i) \longrightarrow f\ (\varinjlim X_i)$$

est un monomorphisme (resp. un isomorphisme). On dit que f est préaccessible (resp. accessible) (relativement à l'univers $\underline{U}$) s'il existe un cardinal $\pi \in \underline{U}$ tel que f soit π-préaccessible (resp. π-accessible).

La catégorie des foncteurs π-accessibles (resp. accessibles) de E dans F sera noté $\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)_\pi$ resp. $\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)_{acc}$.

9.2.1. Evidemment, un foncteur commutant aux petites $\varinjlim$ filtrantes (p. ex. un foncteur admettant un adjoint à droite) est π-accessible pour tout cardinal $\pi \geq 2$.

Définition 9.3. Soient E une catégorie, X un objet de E ,

$$h_X^o \ :\ E \longrightarrow (\underline{U}\text{-Ens})$$

le foncteur covariant qu'il représente, $\pi \in \underline{U}$ un cardinal. On dit que X est un objet π-préaccessible (resp. π-accessible) de E si le foncteur

h_X^o est π-préaccessible (resp. π-accessible) ; on dit que X est préaccessible (resp. accessible) s'il existe un cardinal $\pi \in \underline{U}$ tel que X soit un objet π-préaccessible (resp. π-accessible) de E .

9.3.1. On désigne par E_π la sous-catégorie pleine de E formée des objets π-accessibles de E .

Lorsqu'on applique la définition 9.3 à une catégorie de la forme $\underline{\mathrm{Hom}}(C,F)$, la terminologie introduite présente a priori une ambiguité avec la terminologie analogue introduite dans 9.2, lorsqu'on interprète les objets de $\underline{\mathrm{Hom}}(C,F)$ comme des foncteurs ; il ne semble pas cependant qu'il y ait un risque de confusion sérieux.

Définition 9.4. Soient E une catégorie, $\pi \in \underline{U}$ un cardinal. On dit que E est une catégorie π-préaccessible (resp. π-accessible) s'il existe dans E une petite sous-catégorie pleine C qui est génératrice (7.1) et dont les objets sont π-préaccessibles (resp. π-accessibles) (9.3). On dit que E est une catégorie pré-accessible (resp. accessible) s'il existe un cardinal $\pi \in \underline{U}$ tel que E soit π-préaccessible (resp. π-accessible).

Pour des exemples importants, cf. 9.11.3 plus bas.

Proposition 9.5. Soit $f: E \longrightarrow F$ un foncteur entre catégories telles que F soit accessible et que tout objet de E soit accessible. Alors, si f admet un adjoint à gauche, f est accessible.

En effet, par hypothèse, F admet une petite famille conservative de foncteurs représentables $F \longrightarrow (\underline{U}\text{-Ens})$ qui sont accessibles, donc on est ramené aussitôt à montrer que le composé de f avec chacun des foncteurs précédents est accessible. Or comme f admet un adjoint à gauche, ces composés sont des foncteurs $E \longrightarrow (\underline{U}\text{-Ens})$ *représentables*, donc accessibles d'après l'hypothèse sur E .

Proposition 9.6. *Soient* E *et* F *deux catégories*, $\pi \in \underline{U}$ *un cardinal et considérons la sous-catégorie pleine* $\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)_{\pi}$ *de* $\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)$ *formée des foncteurs* π-*accessibles* (9.2) *de* E *dans* F.

(i) *Cette sous-catégorie est stable par tout type de* $\varinjlim$ *qui est représentable dans* F .

(ii) *Supposons* F π-*accessible* (9.4), *et soit* J *une catégorie telle que* $\operatorname{card} F\ell\, J \leq \pi$ *et que les* $\varprojlim$ *de type* J *soient représentables dans* F , *donc les* $\varprojlim$ *de type* J *sont représentables dans* $\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)$. *Alors la sous-catégorie* $\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)_{\pi}$ *est stable par les* $\varprojlim$ *de type* J .

Corollaire 9.7. *Soient* E *et* F *deux catégories, avec* F *accessible* (9.4). *Alors la sous-catégorie pleine* $\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)_{\mathrm{acc}}$ *de* $\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)$ *formée des foncteurs accessibles est stable par tout type de limite inductive ou projective, relative à une petite catégorie d'indices* J , *qui est représentable dans* F (*donc dans* $\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)$).

Preuve de 9.6. L'assertion (i) résulte trivialement de la commutation du foncteur $\varinjlim$ aux limites inductives quelconques. Pour (ii), soit $(f_j)_{j\in J}$ un système projectif de foncteurs π-accessibles $E \longrightarrow F$,

$f = \varprojlim_j f_j$ sa limite projective, qui se calcule "argument par argument", prouvons que f est π-accessible, i.e. que pour tout ensemble ordonné $I \in \underline{U}$ grand devant π, et tout système inductif $(X_i)_{i \in I}$ dans E, le morphisme canonique

$$\varinjlim_i ((\varprojlim_j f_j)(X_i)) \longrightarrow (\varprojlim_j f_j)(\varinjlim_i X_i)$$

est un isomorphisme. Or le calcul "argument par argument" du foncteur $\varprojlim_j f_j$ nous permet d'identifier le morphisme canonique précédent au morphisme canonique

$$\varinjlim_i \varprojlim_j f_j(X_i) \longrightarrow \varprojlim_j \varinjlim_i f_j(X_i)$$

associé au bifoncteur

$$(i,j) \longmapsto f_j(X_i) \ : \ I \times J \longrightarrow F \quad .$$

Donc 9.6 est une conséquence de l'assertion plus générale :

Corollaire 9.8. *Soient* F *une catégorie* π-*accessible*, I *un ensemble ordonné grand devant* π, J *une petite catégorie telle que* card $\mathrm{F}\ell \leq \pi$, *et que les* $\varprojlim$ *de type* J *soient représentables dans* F , $h : I \times J \to F$ *un foncteur* ; *alors le morphisme canonique*

(9.8.1) $$\varinjlim_i \varprojlim_j h(i,j) \longrightarrow \varprojlim_j \varinjlim_i h(i,j)$$

est un isomorphisme. *En d'autres termes*, *le foncteur*

(9.8.2) $$\varinjlim_i \ : \ \underline{\mathrm{Hom}}(I,F) \longrightarrow F$$

commute aux limites projectives de type J (*pour toute petite catégorie*

J <u>telle que</u> card $F\ell(J) \leq \pi$ <u>et telle que les limites projectives de type</u> J <u>soient représentables dans</u> F). <u>Ou encore</u>, <u>pour toute</u> J <u>comme ci-dessus</u>, <u>le foncteur</u>

(9.8.3) $$\varprojlim_{j} : \underline{\mathrm{Hom}}(J, F) \longrightarrow F$$

<u>est</u> π-<u>accessible</u>.

Comme par hypothèse F admet une famille conservative de foncteurs covariants représentables π-accessibles $g : F \longrightarrow (\underline{U}\text{-Ens})$, on voit aussitôt qu'on est ramené à prouver 9.8 dans le cas où $F = \underline{U}$-Ens. Nous prouverons alors l'assertion sous la forme de la commutation de (9.8.2) aux $\varprojlim$ de type J, avec card $F\ell\ J \leq \pi$. Comme I est filtrant, nous savons que (9.8.2) commute aux limites projectives finies (2.8). On est donc ramené par un argument standard (cf. 2.3) à prouver qu'il commute aux produits indexés par un ensemble J tel que card $J \leq \pi$. Cela nous ramène à prouver la bijectivité de (9.8.1) lorsque J est discrète. Prouvons l'injectivité : considérons deux éléments a,b du premier membre, ils proviennent donc de $\prod_j h(i_o,j)$ pour $i_o \in I$ convenable, soient $\prod_j a(i_o,j)$ et $\prod_j b(i_o,j)$; supposons que les éléments $\prod_j h(\infty,j)$ du deuxième membre qu'ils définissent soient égaux, i.e. que pour tout j, il existe $i(j) \geq i_o$ tel que $a(i_o,j)$ et $b(i_o,j)$ aient même image dans $h(i,j)$. Comme I est grand devant card J, il s'ensuit qu'il existe un majorant commun $i_1 \in I$ de tous les $i(j)$, ce qui implique que les deux éléments envisagés de $\prod_j h(i_o,j)$ ont même image dans $\prod_j h(i_1,j)$, donc définissent le même élément du premier membre de (9.8.1), ce qui établit l'injectivité. Pour la surjectivité, soit $\prod_j a(\infty,j)$ un élément du second membre ; donc pour tout $j \in J$, $a(\infty,j)$ provient d'un élément de $h(i(j),j)$, pour un $i(j) \in I$ convenable. Comme précédemment, on peut trouver un majorant commun $i \in I$ des $i(j)$, donc $\prod_j a(\infty,j)$ provient d'un élément $\prod_j a(i,j)$ de $\prod_j h(i,j)$, donc est dans l'image de (9.8.1). Cela achève la démonstration.

Corollaire 9.9. Soit F une catégorie π-accessible (resp. accessible), alors pour toute catégorie J telle que card $Fl\ J \leq \pi$ (resp. toute petite catégorie J) et pour tout foncteur $(X_j)_{j\in J} : J \longrightarrow F$ dont la limite inductive dans F est représentable, si les X_j sont π-accessibles (resp. accessibles) il en est de même de $\varinjlim X_j$.

En effet, le foncteur $F \longrightarrow$ ($\underline{U}$-Ens) représente par $\varinjlim X_j$ est la limite projective des foncteurs représentés par les X_j, et on applique 9.6 (ii) au système projectif formé par ces foncteurs.

Remarque 9.10. Dans les énoncés 9.6, 9.7, 9.8 et 9.9 on peut remplacer partout les mots "π-accessibles", "accessibles" par "π-préaccessible", "préaccessibles". La démonstration donnée prouve en effet également cette variante des énoncés précédents.

Proposition 9.11. Soit E une catégorie, satisfaisant la condition L (9.1), C une petite sous-catégorie pleine génératrice (7.1). On suppose satisfaite la condition :

a) E est stable par noyaux de doubles flèches, et le foncteur Ker sur la catégorie des doubles flèches de E est accessible (par exemple, *il commute aux petites limites inductives filtrantes*).

Alors tout objet de E *est préaccessible* (9.3), *a fortiori* E *est préaccessible*. *Supposons que* C *soit même génératrice par épimorphisme stricts* (7.1), *et supposons que* E *satisfasse aux conditions* :

b) E *est stable par produits fibrés*.

c) *Toute petite famille épimorphique stricte dans* E *est épimorphique stricte universelle* (10. 3), ou *dans* E *les petites sommes directes sont représentables*, *et tout épimorphisme strict de* E *est un épimorphisme strict universel*.

Alors tout objet de E *est accessible*, *a fortiori* E *est accessible*.

Le fait que, moyennant a), tout objet de E soit accessible, résulte du fait que pour tout objet X de E, l'ensemble des sous-objets stricts de E est petit (7.4), et du

Lemme 9.11.1. *Sous les conditions de* 9.11 a), *soient* $X \in \mathrm{ob}\, E$ *et* π *un cardinal tels que* E *satisfasse* L_π (9.1), *que le foncteur* Ker *dans* 9.11 a) *soit* π-*accessible*, *et que l'ensemble des sous-objets stricts de* X *soit de cardianl majoré par* π . *Alors* X *est* π-*préaccessible*.

En effet, si I est un ensemble grand devant I, $(Y_i)_{i \in I}$ un système inductif dans E de limite inductive Y, et $(u_i, v_i : X \rightrightarrows Y_i)$ une double flèche telle que la double flèche composée $X \overset{u,v}{\rightrightarrows} Y$ satisfasse u=v, prouvons qu'il existe $j \geq i$ dans I tel que $u_j = v_j$. Pour ceci, considérons le système inductif des doubles flèches $(u_j, v_j : X \rightrightarrows Y_j)_{j \geq i}$, dont la limite inductive est (u,v). Par hypothèse on a $X = \mathrm{Ker}(u,v) = \varinjlim_j \mathrm{Ker}(u_j,v_j) = \varinjlim_j X_j$, où $X_j = \mathrm{Ker}(u_j,v_j)$.

Or les X_j sont des sous-objets stricts de X, donc il existe une partie I' de I formée d'indices $j \geq i$, telle que card $J \leq \pi$ et que tout X_j soit égal à un des $X_{i'}$ $(i' \in I')$. Comme I est grand devant π, il existe un majorant j de I' dans I . Alors X_j contient tous les $X_{j'}$ pour $j' \geq i$, donc $X_j \longrightarrow X$ est un épimorphisme (puisque la famille des $X_{j'} \longrightarrow X$ est épimorphique), donc un isomorphisme puisque c'est un monomorphisme strict. Donc on a $u_j = v_j$, ce qui prouve 9.11.1.

La deuxième assertion de 9.11 résulte de la première, et du

Lemme 9.11.2. Sous les conditions de 9.11 a), b), c), soient X un objet de E, et π un cardinal infini tels que E satisfasse L_π (9.1), que l'on ait card ob $C_{/X} \leq \pi$, que pour deux objets $X' \to X$ et $X'' \longrightarrow X$ de $C_{/X}$, $X' \times_X X''$ soit π-préaccessible, enfin que X soit π-préadmissible. Alors X est un π-accessible.

Avec les notations de la démonstration de 9.11.1, il suffit de prouver que tout morphisme $u : X \longrightarrow Y$ provient d'un morphisme $u_i : X \longrightarrow Y_i$. Or considérons la famille des morphismes $Y_i \longrightarrow Y$, qui est épimorphique stricte ; grâce à b) et c), la famille des $Y_i \times_Y X \longrightarrow X$ est également épimorphique stricte ; d'autre part, pour tout i, comme C est génératrice par épimorphismes stricts, la famille des flèches

$$T \longrightarrow Y_i \times_Y X$$

de source dans C est épimorphique stricte. Dans la deuxième alternative envisagée dans c), on peut trouver une telle flèche épimorphique stricte, de source, une (petite) somme d'objets de C. En vertu de la transitivité de la notion de famille épimorphique stricte universelle (II 2.5) il s'ensuit alors que la famille des flèches $T_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X$ de source dans C qui se factorisent par un des $Y_i \times_Y X$ est épimorphique stricte. Soit J l'ensemble d'indices de cette famille, qui est de cardinal majoré par card ob $C_{/X} \leq \pi$. Choisissons pour tout $\alpha \in J$ un $i = i(\alpha) \in I$ et un X-morphisme $T_\alpha \longrightarrow Y_i \times_Y X$, ou ce qui revient au même, un $v_\alpha : T_\alpha \rightarrow Y_i$ tel que $p_i v_\alpha = u f_\alpha$, où $p_i : Y_i \longrightarrow Y$ est le morphisme canonique. Comme I est grand devant π, on peut choisir $i(\alpha)$ indépendant de α, soit i . Pour tout couple d'indices $\alpha, \beta \in J$, considérons les composés

$$pr_1\, v_\alpha,\ pr_2\, v_\beta \ :\ T_\alpha \times_X T_\beta \rightrightarrows Y_i \quad .$$

Leurs composés avec $Y_i \longrightarrow Y$ sont égaux, donc, comme $T_\alpha \times_X T_\beta$ est π-préaccessible par hypothèse, il existe un indice $i' = i(\alpha,\beta) \geq i$ tel que les composés des flèches envisagées avec $Y_i \longrightarrow Y_{i'}$ soient égales. Comme l'ensemble des couples α, β est de cardinal $\leq \pi^2 = \pi$ (π étant infini), il s'ensuit encore que l'on peut choisir i' indépendant de α, β . On peut évidemment supposer $i' = i$. Mais alors, la famille $(f_\alpha : T_\alpha \longrightarrow X)$ étant épimorphique stricte, on peut trouver un morphisme $u_i : X \longrightarrow Y_i$ tel que l'on ait $u_i\, f_\alpha = v_i$. On a alors $p_i u_i = p$, car pour tout α on a $(p_i u_i) f_\alpha = p_i (u_i f_\alpha) = p_i v_\alpha = u\, f_\alpha$, et la famille des f_α est épimorphique. Cela achève la démonstration de 9.11.2.

Remarque 9.11.3. On voit, comme cas particulier de 9.11, que dans la catégorie E tout objet est accessible, dans chacun des deux cas suivants : 1) E est une $\underline{U}$-catégorie abélienne à limites inductives filtrantes exactes et admettant une petite sous-catégorie génératrice (ici, c'est la deuxième alternative de c), qui s'applique). 2) E est la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique $X \in \underline{U}$. Plus généralement, il suffit que E soit la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un $\underline{U}$-site (II 2.1), ou encore, que E soit un $\underline{U}$-topos (IV 1.1).

Définition 9.12. Soit E une catégorie. On appelle filtration cardinale de E une filtration croissante $(\mathrm{Filt}^{\pi}(E))_{\pi\geq\pi_0}$ de E par des sous-catégories strictement pleines $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$, indexée par les cardinaux $\pi \in \underline{U}$ tels que $\pi\geq\pi_0$ (où π_0 est un cardinal infini fixé, dépendant de la filtration cardinale envisagée), et satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Pour tout $\pi\geq\pi_0$, $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$ est équivalente à une petite catégorie.

b) E satisfait à L_{π_0} (9.3), et pour tout $\pi\geq\pi_0$, $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$ est stable dans E pour les limites inductives filtrantes indexées par des ensembles ordonnés I grands devant π_0 tels que card $I\leq\pi$.

c) Pour tout $\pi\geq\pi_0$, et tout $X\in$ ob E, on peut trouver un isomorphisme

$$X \simeq \varinjlim_{I} X_i \quad ,$$

où $(X_i)_{i\in I}$ est un système inductif dans E indexé par un ensemble ordonné

I grand devant π (9.1), et où les X_i sont dans $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$. De plus, si $X \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$, $\pi' \geq \pi$, on peut prendre I tel que $\mathrm{card}\, I \leq \pi'^{\pi}$.

9.12.1. On notera qu'il résulte de b) et c) que tout $X \in \mathrm{ob}\, E$ appartient à un $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$, pour π assez grand.

Exemple 9.12.2. Prenons $E = (\underline{U}\text{-Ens})$, $\pi_0 = \aleph_0$, $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$ = sous-catégorie pleine de E formée des ensembles tels que $\mathrm{card}\, X \leq \pi$. Plus généralement :

Proposition 9.13. Soit E une U-catégorie. On suppose que E est stable par petites $\varinjlim$ filtrantes, par somme de deux objets et par conoyaux de doubles flèches, que E est stable par produits fibrés, et que les morphismes épimorphiques dans E sont épimorphiques stricts universels. Soit C une petite sous-catégorie pleine de E qui est génératrice par épimorphismes stricts. Soit π_0 un cardinal infini $\geq \mathrm{card}\, \mathrm{Fl}\, C$. Pour tout cardinal $\pi \geq \pi_0$, soit $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$ la sous-catégorie strictement pleine de E formée des objets X de E tels qu'il existe une famille épimorphique stricte $(X_i \longrightarrow X)_{i \in I}$ de but X, telle que $\mathrm{card}\, I \leq \pi$ et que $X_i \in \mathrm{ob}\, C$ pour tout $i \in I$. Alors $(\mathrm{Filt}^{\pi}(E))_{\pi \geq \pi_0}$ est une filtration cardinale de E . De plus, pour tout $X \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$, le cardianl de l'ensemble des flèches de $C_{/X}$ (et a fortiori, de l'ensemble des objets de $C_{/X}$) est majoré par π^{π_0} .

Cette dernière assertion n'est autre que 7.6.

Pour montrer qu'on a une filtration cardinale, il faut prouver les conditions a), b) et c) de 9.12. La condition a) résulte aussitôt de 7.5.2. Pour b), supposons qu'on ait $X = \varinjlim_{I} X_i$, avec $\mathrm{card}\, I \leq \pi$ et les $X_i \in$ ob $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$. Donc la famille des morphismes canoniques $X_i \to X$ est épimorphique stricte, et par hypothèse sur les X_i, il existe pour tout $i \in I$ une famille épimorphique stricte $(X_{ij} \longrightarrow X_i)_{j \in J_i}$, avec card $J_i \leq \pi$. Passant aux sommes $\coprod_i X_i$ et $\coprod_{i,j} X_{ij}$, on voit par transitivité des épimorphismes stricts universels (II 2.5) que la famille des composés $X_{ij} \longrightarrow X_i \longrightarrow X$ (indexée par l'ensemble somme des J_i, pour $i \in I$) est épimorphique stricte. Or on a card $J \leq \pi^2 = \pi$, d'où la conclusion. (NB. on a seulement utilisé le fait que $\varinjlim_I X_i$ existe, et non le fait que I soit grand devant π_o ni même filtrant.) Prouvons enfin c). Notons que pour tout $X \in$ ob E, la famille des flèches $X_i \to X$ de source dans ob C est strictement épimorphique, puisque C est génératrice par épimorphismes stricts, et évidemment petite, donc il existe un cardinal $\pi \geq \pi_o$ tel que $X \in$ ob $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$. Il reste à prouver que si on a des cardinaux $\pi' \geq \pi \geq \pi_o$, et si $X \in$ ob $\mathrm{Filt}^{\pi'}(E)$, alors on a un isomorphisme

$$X \simeq \varinjlim_I X_i \quad ,$$

avec I grand devant π, card $I \leq \pi'^{\pi}$, les X_i dans ob $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$. Or on a, C étant génératrice par épimorphismes stricts,

$$(*) \qquad X \simeq \varinjlim_{C_{/X}} T \quad .$$

Notons aussi qu'en rajoutant successivement à C des sommes et des conoyaux de doubles flèches de C, et de même pour la catégorie ainsi obtenue etc, on se ramène au cas où C est stable par somme de deux objets dans E et par conoyaux de doubles flèches dans E, et ceci sans détruire l'hypothèse $\pi_o \geq$ card Fl C. On peut supposer de plus que, si E contient un objet initial fixé $\emptyset_E$, on ait $\emptyset_E \in \mathrm{ob}\, C$. Ceci implique que la catégorie $C_{/X}$ est stable par somme de deux objets et conoyaux de doubles flèches. Elle est alors filtrante, car elle est non vide, puisque si elle était vide, la relation (*) montrerait que X est un objet initial, donc $C_{/X}$ contient la flèche $\emptyset_E \longrightarrow X$, une contradiction. Soit alors I l'ensemble, ordonné par inclusion, des sous-catégories pleines i de $C_{/X}$ qui sont filtrantes et telles que card ob i $\leq \pi$. Pour tout $i \in I$, soit $X_i \in \mathrm{ob}\, E$ la limite inductive du foncteur composé $i \to C_{/X} \to E$, qui existe par hypothèse. Alors on a évidemment

$$\varinjlim_{I} X_i \simeq \varinjlim_{C/X} T \simeq X \quad .$$

D'autre part, on a déjà noté que card ob $C_{/X} \leq \pi'^{\pi_o}$. Il s'ensuit que I est grand devant π, et que card $I \leq (\pi'^{\pi_o})^{\pi} = \pi'^{\pi\pi_o} = \pi'^{\pi}$ en vertu du lemme suivant, dont la démonstration est laissé au lecteur (où on fera $I = C_{/X}$, $c = \pi'^{\pi_o}$) :

Lemme 9.13.1. Soient J une catégorie filtrante, c et π deux cardinaux tels que $c \geq \mathrm{Sup}(\mathrm{card\ Fl}\ J, \pi)$, et telle que card $\mathrm{Hom}(j,j') \leq \pi_o$ pour tout couple d'objets j,j' de J. Soit I l'ensemble des sous-catégories pleines filtrantes i de J telles que card ob i $\leq \pi$. Alors, ordonné par inclusion, I est grand devant π, et on a card $I \leq c^{\pi}$.

Ceci achève la démonstration de 9.13.

Remarque 9.13.2. Un léger effort supplémentaire doit permettre de remplacer dans 9.13 l'hypothèse que E est stable par petites limites inductives filtrantes par l'hypothèse que E satisfait à L (9.1), si on suppose E stable par petites sommes, ou que dans E toute famille épimorphique est épimorphique universelle. Il faut alors, dans la démonstration de c), choisir π_o tel que E satisfasse à L_{π_o} , et se borner aux sous-catégories pleines i de $C_{/X}$ qui sont non seulement filtrantes, mais telles que l'ensemble préordonné ob i soit grand devant π_o . Utilisant 8.   et l'hypothèse que E satisfait à L_{π_o} , on trouve alors que les X_i existent, et on devrait conclure par une variante convenable de 9.13.1, que le rédacteur n'a pas vérifiée.

Proposition 9.14. *Soient* $f: E \longrightarrow F$ *un foncteur accessible* (9.2) *entre deux catégories munies de filtrations cardinales* $(\mathrm{Filt}^{\pi}(E))_{\pi\geq\pi_o}$ *et* $(\mathrm{Filt}^{\pi}(F))_{\pi\geq\pi'_o}$. *Alors il existe un cardinal* $\pi_1 \geq \mathrm{Sup}(\pi_o,\pi'_o)$ *tel que pour tout cardinal* $\pi \geq \pi_1$, *on ait*

$$(9.14.1)\qquad f\,(\mathrm{Filt}^{\pi}(E)) \subset \mathrm{Filt}^{\pi^{\pi_1}}(F) \quad .$$

En particulier, si l'on a $\pi = 2^c$ *avec* $c \geq \pi_1$, *d'où* $\pi^{\pi_1} = 2^{c\pi_1} = 2^c = \pi$, *on a*

$$(9.14.2)\qquad f\,(\mathrm{Filt}^{\pi}(E)) \subset \mathrm{Filt}^{\pi}(F) \quad .$$

Signalons tout de suite le

Corollaire 9.15. Soit E une catégorie, munie de deux filtrations cardinales $(\mathrm{Filt}^{\pi}(E))_{\pi \geq \pi_o}$ et $(\mathrm{Filt}'^{\pi}(E))_{\pi \geq \pi'_o}$. Alors il existe un cardinal $\pi_1 \geq \mathrm{Sup}(\pi_o, \pi'_o)$ tel que, pour tout cardinal $c \geq \pi_1$, posant $\pi = 2^c$, on ait $\mathrm{Filt}^{\pi}(E) = \mathrm{Filt}'^{\pi}(E)$.

Preuve de 9.14. Soit c un cardinal tel que $c \geq \mathrm{Sup}(\pi_o, \pi'_o)$, et tel que f soit c-admissible. Soit d'autre part $\pi_1 \geq c$ tel que l'on ait

(*) $$f\,(\mathrm{Filt}^{c}(E)) \subset \mathrm{Filt}^{\pi_1}(F) \quad .$$

Il existe un tel π_1, grâce au fait que $\mathrm{Filt}^{c}(E)$ est équivalente à une petite catégorie (9.12 a)), donc $f\,(\mathrm{Filt}^{c}(E))$ l'est également, de sorte qu'on peut appliquer 9.12.1 aux objets de cette dernière pour trouver une $\mathrm{Filt}^{\pi}(F)$ qui les contient tous (compte tenu que les $\mathrm{Filt}^{\pi}(F)$ sont des sous-catégories pleines). Soit donc $\pi \geq \pi_1$, et $X \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$, prouvons que $f(X) \in \mathrm{Filt}^{\pi^{\pi_1}}(F)$. Ecrivons en effet

$$X = \varinjlim_{I} X_i \quad ,$$

avec les $X_i \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^{c}(E)$, I grand devant c, $\mathrm{card}\, I \leq \pi^c \leq \pi^{\pi_1}$ (9.12 c)). Comme f est c-admissible, I grand devant c, on a

$$f(X) \simeq \varinjlim_{I} f(X_i) \quad ,$$

et comme $\mathrm{card}\, I \leq \pi^{\pi_1}$ et $f(X_i) \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^{\pi_1}(F) \subset \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^{\pi^{\pi_1}}(F)$ par (*), on a $f(X) \in \mathrm{Filt}^{\pi^{\pi_1}}(F)$ par 9.12 b), cqfd.

9.15.1. La notion de filtration cardinale 9.12 n'a guère d'intérêt que lorsque les objets de E sont accessibles. Signalons qu'il résulte de 9.11 que cette condition est satisfaite lorsque, en plus des hypothèses de 9.13, on suppose que le foncteur Ker sur la catégorie des doubles flèches de E est accessible. Signalons d'autre part :

Proposition 9.16. *Soit* E *une catégorie munie d'une filtration cardinale* $(\mathrm{Filt}^{\pi}(E))_{\pi \geq \pi_o}$. *Supposons que les éléments de* $\mathrm{Filt}^{\pi_o}(E)$ *soient des objets accessibles de* E ; *alors il existe un cardinal* $\pi_1 \geq \pi_o$ *dans* $\underline{U}$ *tel que les objets de* $\mathrm{Filt}^{\pi_o}(E)$ *soient* π_1*-accessibles* ; *si* π_1 *est choisi ainsi, alors pour tout cardinal* $\pi \geq \pi_1$, *on a* (*avec les notations de* 9.3.1) :

$$(9.16.1) \qquad E_{\pi} \subset \mathrm{Filt}^{\pi}(E) \subset E_{(\pi^{\pi_o})} \quad .$$

L'existence de π_1 résulte immédiatement du fait que $\mathrm{Filt}^{\pi_o}(E)$ est équivalente à une petite catégorie (9.12 a)). Soit alors $\pi \geq \pi_1$. Si X est dans $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$, écrivant $X \simeq \varinjlim_{I} X_i$ avec card $I \leq \pi^{\pi_o}$, $X_i \in \mathrm{ob}\ \mathrm{Filt}^{\pi_o}(E)$ pour tout i (9.12 c)), alors il résulte de 9.9 que X est π^{π_o}-accessible, d'où la deuxième inclusion (9.16.1). Supposons que X soit π-accessible, et écrivons $X \simeq \varinjlim_{I} X_i$, avec I grand devant π et les $X_i \in \mathrm{ob}\ \mathrm{Filt}^{\pi}(E)$ (9.12 c)). Par hypothèse sur X, l'isomorphisme donné $X \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{I} X_i$ se factorise par un des X_i , donc X est isomorphe à un facteur direct de cet X_i. On en conclut que $X \in \mathrm{ob}\ \mathrm{Filt}^{\pi}(E)$, donc la première inclusion (9.16.1), grâce au

Lemme 9.16.2. *Tout objet de* E *qui est un facteur direct d'un objet de* $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$ *est dans* $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$.

En effet, si X est l'image d'un projecteur p dans l'objet Y de E (i.e. d'un endomorphisme p tel que $p^2 = p$), et si I est un ensemble ordonné filtrant, X est limite inductive du système inductif filtrant $(Y_i)_{i\in I}$ défini par $Y_i = Y$ pour tout $i \in I$, $p: Y_i \longrightarrow Y_j$ si $i < j$. Prenant I grand devant π_o et card $I \leq \pi$, on voit donc que si $Y \in \mathrm{Filt}^{\pi}(E)$, il en est de même de X en vertu de 9.12 b).

Corollaire 9.17. Sous les conditions de 9.16, pour tout cardinal $c \geq \pi_1$, posant $\pi = 2^c$, $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$ est identique à la sous-catégorie strictement pleine de E_{π} de E formée des objets π-accessibles.

Corollaire 9.18. Soient E une catégorie satisfaisant la condition L_{π} (9.1), où π est un cardinal, et C une sous-catégorie pleine de E . On désigne par $\mathrm{Ind}(C)_{\pi}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie Ind(C) des ind-objets de C (8.2) formée des ind-objets de la forme $(X_i)_{i\in I}$, où I est un ensemble ordonné grand devant π . Considérons le foncteur canonique

(9.18.1) $$(X_i)_{i\in I} \longmapsto \varinjlim_{I} X_i \quad : \quad \mathrm{Ind}(C)_{\pi} \longrightarrow E \quad .$$

a) Pour que ce foncteur soit pleinement fidèle, il faut et il suffit que tout objet X de C soit un objet π-accessible (9.3) de E .

b) Plaçons-nous sous les conditions de 9.17, en particulier $\pi = 2^c$, et prenons $C = \mathrm{Filt}^{\pi}(E)$. Alors le foncteur (9.18.1) est une équivalence de catégories.

L'assertion a) est une généralisation immédiate de 8.7.5 a), et se prouve de la même façon. Alors b) résulte de 9.17 et de la condition 9.12 c) des filtrations cardinales, qui implique que le foncteur envisagé est essentiellement surjectif.

Corollaire 9.19. Sous les conditions de 9.17, soient $C = \mathrm{Filt}^{\pi}(E)$, F une U-catégorie, et considérons le foncteur

$$\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)_{\pi} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C,F) \tag{9.19.1}$$

induit par le foncteur "restriction à C " $f \longmapsto f|C$), où la source de (9.19.1) est la catégorie des foncteurs π-accessibles de E dans F (9.2). Le foncteur précédent est pleinement fidèle. Si F satisfait à la condition L_{π} (9.1), alors le foncteur (9.19.1) est une équivalence de catégories.

La première assertion se prouve comme 7.8, en utilisant 9.18 b). La deuxième s'obtient en construisant un foncteur quasi-inverse de (9.19.1), en associant à tout foncteur $f\colon C \longrightarrow F$ le foncteur $(X_i)_{i\in I} \to \varinjlim_{i} f(X_i)$ de $\mathrm{Ind}(E_{\pi})$ dans F, et en utilisant 9.18 b) pour en déduire un foncteur $\overline{f} : E \longrightarrow F$. Tout revient à montre que de dernier est π-accessible. Or cela se prouve comme l'assertion analogue 8.7.3.

Corollaire 9.20. Soient E une catégorie admettant une filtration cardinale et telle que tout objet de E soit accessible (cf. 9.16), F une catégorie. Alors :

a) La catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)_{\mathrm{acc}}$ des foncteurs accessibles de E dans F (9.2) est une U-catégorie. (NB on rappelle (9.0) que les catégories données E,F sont supposées être des U-catégories.)

b) Supposons que F soit stable par petites limites inductives filtrantes. Pour toute sous-catégorie pleine C de E équivalente à une petite catégorie, à foncteur d'inclusion $i\colon C \longrightarrow E$, considérons le foncteur correspondant

$$i_! : \underline{Hom}(C,F) \longrightarrow \underline{Hom}(E,F)$$

(5.1). Pour qu'un foncteur $f: E \longrightarrow F$ soit accessible, il faut et il suffit qu'il existe une petite sous-catégorie C de E, telle que f soit dans l'image essentielle du foncteur précédent $i_!$.

Démonstration. a) Il suffit de prouver que pour tout cardinal π tel que E satisfasse L_π , la sous-catégorie pleine $\underline{Hom}(E,F)_\pi$ de $\underline{Hom}(E,F)_{acc}$ est une $\underline{U}$-catégorie. Il suffit évidemment de le vérifier pour les cardinaux de la forme 2^c , avec c assez grand. Mais alors cela résulte de 9.19, puisque ($C = \mathrm{Filt}^\pi(E)$ étant essentiellement petite) $\underline{Hom}(C,F)$ est évidemment une $\underline{U}$-catégorie.

b) Par transitivité de la formation des foncteurs $i_!$, on peut dans l'énoncé se borner aux sous-catégories C de la forme $\mathrm{Filt}^\pi(E)$, où π est comme dans 9.17. On voit alors aisément que le foncteur composé $\underline{Hom}(\mathrm{Filt}^\pi(E),F) \longrightarrow \underline{Hom}(E,F)_\pi \longrightarrow \underline{Hom}(E,F)$, où la première flèche est quasi-inverse de (9.19.1), et la deuxième est l'inclusion, n'est autre que le foncteur $i_!$, à isomorphisme près. Donc l'assertion b) résulte de 9.19.

*Exercice 9.20.1. (Le présent exercice utilise les notions de site et de topos, développés dans les exposés II et IV.) Soient E un $\underline{U}$-topos, $\underline{V}$ un univers tel que $\underline{U} \in \underline{V}$, C une petite sous-catégorie pleine génératrice du $\underline{U}$-topos E, $\pi_o \in \underline{U}$ un cardinal infini tel que $\pi_o \in \mathrm{card}\ F\ell\ C$. Pour tout cardinal $\pi \geq \pi_o$, $\pi \in \underline{U}$, soit $\mathrm{Filt}^\pi(E)$ la sous-catégorie strictement pleine de E formée des objets X tels qu'il existe une famille épimorphique stricte $(X_i \longrightarrow X)_{i \in I}$ de but X, telle que card $I \leq \pi$ et que $X_i \in \mathrm{Ob}\, C$ pour tout $i \in I$.

a) Montrer que $(\mathrm{Filt}^{\pi}(E))_{\pi \geq \pi_o}$ est une filtration cardinale de la $\underline{U}$-catégorie E, et qu'on peut choisir π_o tel que pour tout $\pi \geq \pi_o$, on ait les inclusions

$$E_{\pi} \subset \mathrm{Filt}^{\pi}(E) \subset E_{\pi^{\pi_o}} \quad ,$$

où pour tout cardinal c, E_c désigne la sous-catégorie strictement pleine de E formée des objets c-accessibles.

b) Choisissant un cardinal $\pi \geq \pi_o$ tel que $\pi = \pi^{\pi_o}$ (par exemple π de la forme 2^c, avec $c > \pi_o$), et posant $C = \mathrm{Filt}^{\pi}(E)$, montrer qu'on a une équivalence de catégories

$$\mathrm{Ind}(C)_{\pi} \xrightarrow{\approx} E \quad ,$$

(notation $\mathrm{Ind}(C)_{\pi}$ de 9.18).

c) Gardons les notations de b), et soient $\underline{V}$ un univers tel que $\underline{U} \subset \underline{V}$, $E^{\sim}_{\underline{V}}$ le $\underline{V}$-topos de $\underline{V}$-faisceaux sur le site E (muni de sa topologie canonique). Désignons par $\mathrm{Ind}(C,\underline{V})_{\pi}$ la catégorie des $\underline{V}$-Ind-objets de C indexés par des ensemble d'indices préordonnés <u>grands devant</u> π. Montrer qu'on a une équivalence de catégories

$$\mathrm{Ind}(C,\underline{V})_{\pi} \xrightarrow{\approx} E^{\sim}_{\underline{V}} \quad .$$

d) Soient $c \in \underline{V}$ un cardinal, $\mathrm{Ind}(E,\underline{V})'_c$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ind}(E,\underline{V})$ formée des $\underline{V}$-ind-objets de E indexés par un ensemble préordonné qui est grand devant tout cardinal $< c$. Prenant $c = \mathrm{card}\, \underline{U}$, montrer qu'on a une équivalence de catégories

$$\mathrm{Ind}(E,\underline{V})'_c \xrightarrow{\approx} E^{\sim}_{V} \quad . \qquad *$$

9.21. La présente section 9.21 développe des préliminaires techniques pour la démonstration du théorème 9.22 ci-dessous, qui constitue le résultat principal du présent paragraphe 9. Soit

(9.21.1) $$p: E \longrightarrow B$$

un foncteur fibrant, où B est une petite catégorie, et où les foncteurs images inverses

$$f^* : E_\beta \longrightarrow E_\alpha$$

associés aux flèches $f: \alpha \longrightarrow \beta$ de B sont accessibles (9.2). En particulier, les catégories fibres E_α ($\alpha \in \mathrm{ob}\, B$) satisfont à la condition L (9.1), donc, B étant petite, il existe un cardinal $\pi'_o \in \underline{U}$ tel que toutes les catégories E_α satisfont à la condition $L_{\pi'_o}$. Soit $\pi_o \in \underline{U}$ un cardinal infini $> \pi'_o$, de sorte que l'on a

(9.21.2) $$\pi_o > \pi'_o \quad , \; E_\alpha \text{ satisfait } L_{\pi'_o} \text{ pour tout } \alpha \in \mathrm{ob}\, B.$$

D'ailleurs, les hypothèses faites impliquent aussitôt l'existence d'un cardinal $c \in \underline{U}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(9.21.3)
- a) c est infini,
- b) $c \geq \mathrm{card}\, \mathrm{Fl}\, B$,
- c) pour toute flèche $f: \alpha \longrightarrow \beta$ dans B, le foncteur $f^* : E_\beta \longrightarrow E_\alpha$ est c-accessible.

Supposons de plus qu'on puisse trouver, pour chaque $a \in$ ob B, une sous-catégorie pleine C_α de E_α, satisfaisant les conditions suivantes :

(9.21.4)
a) Pour tout $X \in$ ob C_α, X est c-accessible dans E_α (9.3).

b) Pour tout $X \in$ ob E_α, on peut trouver un isomorphisme $X \xleftarrow{\sim} \varinjlim_I X_i$ dans E_α, où les X_i sont dans C_α et où I est un ensemble ordonné grand devant c.

Soit π un cardinal tel que l'on ait

(9.21.5) $$\pi \geq \pi_o \quad , \text{ donc } \pi > \pi'_o \quad ,$$

et pour tout $\alpha \in$ ob B, soit

(9.21.6) $$C_\alpha^\pi \subset E_\alpha$$

formée des objets qui se peuvent représenter sous la forme $\varinjlim_I X_i$, où I est un ensemble ordonné grand devant π'_o, tel que card $I \leq \pi$, et où les X_i sont dans C_α. Il est clair alors, grâce à 7.5.2, que C_α^π est essentiellement petite, i.e. est équivalente à une petite catégorie.

Soit

(9.21.7) $$F = \underline{\mathrm{Hom}}_B(B,E)$$

la catégorie des sections de E sur B, et soit

(9.21.8) $$F^\pi \subset F$$

la sous-catégorie strictement pleine de F formée des sections $X:\alpha \mapsto X(\alpha)$ telles que pour tout $\alpha \in$ ob B on ait

$$X(\alpha) \in C_\alpha^\pi \quad .$$

Il est clair, les C_α^π étant essentiellement petites, qu'il en est de même de la catégorie F^π . Nous allons montrer que cette catégorie est génératrice, et plus précisément :

Lemme 9.21.9. *Sous les conditions et avec les notations précédentes, on a ce qui suit :*

(i) *Tout objet de* F *est accessible* (9.3). *Si* d *est un cardinal* $\geq \pi_o'$, *et si* $\alpha \longmapsto X(\alpha)$ *est un élément de* F *tel que pour tout* α, $X(\alpha)$ *soit* d-*accessible dans* E_α , *alors* X *est* d-*accessible dans* F .

(ii) *Supposons* $\pi \leq c$, *ou que* π_o' *soit fini* (*i.e. les* E_α *stables par petites* $\varinjlim$ *filtrantes*). *Alors tout objet* X *de* F *est isomorphe à un objet de la forme* $\varinjlim_I X_i$, *où les* X_i *sont dans* F^π *et où* I *est grand devant* π .

Pour prouver (i), notons qu'en vertu de (9.21.4) et de 9.9, tout objet de E_α est accessible. D'autre part, F satisfait à la condition $L_{\pi_o'}$, en vertu du

Lemme 9.21.10. *Soit* $p: E \longrightarrow B$ *un foncteur fibrant*, $F = \underline{\mathrm{Hom}}_B(B,E)$, I *une catégorie*, $i \longmapsto X_i$ *un foncteur de* I *dans* F . *Pour que* $\varinjlim_I X_i$ *soit représentable dans* F, *il suffit que pour tout* $\alpha \in \mathrm{ob}\, B$, $\varinjlim_I X_i(\alpha)$ *soit représentable dans la catégorie fibre* E_α ; *lorsqu'il en est ainsi, alors* $\varinjlim_I X_i$ *"se calcule argument par argument" . En particulier, si les catégories fibres satisfont à la condition* $L_{\pi_o'}$ (π_o' *étant un cardinal donné*) *il en est de même de* F .

Nous laissons le détail de la démonstration (facile) de 9.21.10 au lecteur, en nous contentant de remarquer qu'il est commode d'utiliser le résultat suivant, dont la démonstration est immédiate :

Corollaire 9.21.10.1. Avec les hypothèses et notations de 9.21.10 pour $p: E \longrightarrow B$, et pour I , pour tout $\alpha \in \mathrm{ob}\, B$, le foncteur d'inclusion $E_\alpha \longrightarrow E$ commute aux limites inductives de type I .

Revenant alors aux conditions générales de 9.21.9, soit X un objet de F . Comme pour tout $\alpha \in \mathrm{ob}\, B$, $X(\alpha)$ est accessible dans E_α , il existe un cardinal $d \in \underline{U}$ tel que pour tout α , $X(\alpha)$ soit d-accessible dans E_α . On peut choisir $d \geq \pi'_o$, de sorte que F satisfait à L_d en vertu de 9.21.10. Utilisant encore 9.21.10 pour le calcul des limites inductives $\varinjlim_I Y_i$ dans F, avec I grand devant d, on constate aussitôt que X est d-accessible. Cela prouve (i).

Nous allons prouver maintenant 9.21.9 (ii) en plusieurs étapes ((9.21.11) à 9.21.16)).

Soit donc

$$X : \alpha \longmapsto X(\alpha)$$

un objet de F. En vertu de (9.21.4 b)), on peut, pour tout $\alpha \in \mathrm{ob}\, B$, trouver un ensemble ordonné I_α grand devant c, et un isomorphisme $X(\alpha) = \varinjlim_{i \in I_\alpha} X(\alpha)_i$, où $i \longmapsto X(\alpha)_i$ est un système inductif de type I_α dans E_α , les $X(\alpha)_i$ dans C_α . Considérons l'ensemble ordonné produit $I = \prod_\alpha I_\alpha$; il est clair qu'il est grand devant c, et que les systèmes inductifs précédents donnent naissance à des systèmes inductifs dans les E ,

$$i \longmapsto X(\alpha)_i \in \mathrm{ob}\, C_\alpha \ , \quad i \in \mathrm{ob}\, I \ , \tag{9.21.11}$$

indexés par le même ensemble ordonné I, et à des isomorphismes

$$X(\alpha) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_I X(\alpha)_i \quad \text{dans } E_\alpha \ , \tag{9.21.12}$$

pour tout $\alpha \in \mathrm{ob}\, B$. Nous supposons fixées par la suite des données (9.21.11) et (9.21.12).

Lemme 9.21.13. *Sous les conditions précédentes, on peut trouver une application* $\varphi : I \longrightarrow I$ *telle que* $\varphi(i) \geq i$ *pour tout* $i \in I$, *et une application* $(i,f) \longmapsto \lambda(i,f)$ *de* $I \times F\ell\, B$ *dans* $F\ell\, E$, *satisfaisant aux conditions suivantes* :

a) *Pour* $i \in I$, $(f:\alpha \longrightarrow \beta) \in F\ell\, B$, $\lambda(i,f)$ *est un* f-*morphisme de* $X(\alpha)_i$ *dans* $X(\beta)_{\varphi(i)}$, *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
X(\alpha) \arrow[r, "X(f)"] & X(\beta) \\
 & X(\beta)_{\varphi(i)} \arrow[u] \\
X(\alpha)_i \arrow[uu] \arrow[ur, "\lambda(i,f)"] &
\end{tikzcd}$$

$$\alpha \xrightarrow{\quad f \quad} \beta \qquad ,$$

où les flèches verticales sont les morphismes canoniques déduits de (9.21.12).

b) Pour tout $i \in I$, et $(f: \alpha \longrightarrow \beta) \in F\ell\ B$, on a commutativité dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & X(\beta)_{\varphi^2(i)} \\
X(\alpha)_{\varphi(i)} \arrow[ur, "\lambda(\varphi(i),f)"] & X(\beta)_{\varphi(i)} \arrow[u] \\
X(\alpha)_i \arrow[u] \arrow[ur, "\lambda(i,f)"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\alpha \xrightarrow{\quad f \quad} \beta \qquad .$$

c) Pour tout couple de flèches consécutives $\alpha \xrightarrow{f} \beta \xrightarrow{g} \gamma$ de B, on a commutativité dans le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
X(\alpha) \arrow[r, "X(f)"] & X(\beta) \arrow[r, "X(g)"] & X(\gamma) \\
 & & X(\gamma)_{\varphi^2(i)} \arrow[u] \\
 & X(\beta)_{\varphi(i)} \arrow[uu] \arrow[ur, "\lambda(\varphi(i),g)"] & X(\gamma)_{\varphi(i)} \arrow[u] \\
X(\alpha)_i \arrow[uuu] \arrow[ur, "\lambda(i,f)"] \arrow[urr, "\lambda(i,gf)"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\alpha \xrightarrow{\quad f \quad} \beta \xrightarrow{\quad g \quad} \gamma \qquad ,$$

où les flèches verticales sont celles déduites de (9.21.12).

On notera d'ailleurs que la commutativité des deux trapèzes supérieurs dans b) est déjà contenu dans a), de sorte que b) affirme en fait la commutativité du triangle inférieur du diagramme envisagé.

Prouvons 9.21.13. Soient $i \in I$, et $f: \alpha \longrightarrow \beta$ une flèche dans B. Considérons le composé $X(\alpha_i) \longrightarrow X(\alpha) \xrightarrow{X(f)} X(\beta) \simeq \varinjlim_j X(\beta)_j$, il définit un morphisme dans E :

$$X(\alpha)_i \longrightarrow f^*(X(\beta)) \simeq f^*(\varinjlim_j X(\beta)_j) \simeq \varinjlim_j f^*(X(\beta)_j) \quad ,$$

où la dernière **égalité** provient du fait que f^* est c-accessible (9.21.3 c) et que I est grand devant c. En vertu de (9.21.4 a)), comme $X(\alpha) \in \mathrm{ob}\, C_\alpha$, le morphisme envisagé se factorise par un $f^*(X(\alpha)_j)$, où j a priori dépend de i et de $f \in F\ell(B)$. Mais en vertu de (9.21.3 b)), et comme I est grand devant c), on peut choisir j indépendant de f, soit $j = \varphi(i)$. I étant filtrant, on peut supposer $\varphi(i) \geq i$. On trouve ainsi, pour $i \in I$ et $f \in F\ell\ F$, un morphisme

$$X(\alpha)_i \longrightarrow f^*(X(\beta)_{\varphi(i)}) \quad ,$$

ou ce qui revient au même, un f-morphisme

$$\lambda(i,f) : X(\alpha)_i \longrightarrow X(\beta)_{\varphi(i)} \quad ,$$

qui par construction rend commutatif le diagramme

D(f)

$$\begin{tikzcd}
X(\alpha) \arrow[r, "X(f)"] & X(\beta) \\
 & X(\beta)_{\varphi(i)} \arrow[u] \\
X(\alpha)_i \arrow[uu] \arrow[ur, "\lambda(i,f)"] & \\
\alpha \arrow[r, "f"] & \beta
\end{tikzcd} \quad .$$

Considérons alors, pour i,f,g donnés, le triangle inférieur du diagramme envisagé dans 9.21.13 c) ; il n'est pas clair qu'il est commutatif, mais les deux composés $X(\alpha)_i \rightrightarrows X(\beta)_{\varphi^2(i)}$ deviennent égaux après composition avec $X(\beta)_{\varphi^2(i)} \longrightarrow X(\beta)$, comme il résulte de la commutativité des deux trapèzes supérieurs, et du trapèze contour global, qui sont les diagrammes D(f),D(g) et D(gf) respectivement. Donc, comme $X(\alpha)_{\varphi^2(i)}$ est c-accessible (9.21.4 a)) et que $X(\alpha) \simeq \varinjlim_{j\in I} X(\alpha)_j$, avec I grand devant c, il s'ensuit qu'on peut trouver un élément $j \geq \varphi^2(i)$ de I, tel que les deux flèches envisagées deviennent égales après composition avec $X(\beta)_{\varphi^2(i)} \longrightarrow X(\beta)_j$. A priori, j dépend de i,f et g. Mais pour i fixé, l'ensemble des couples possibles f,g est de cardinal $\geq c^2 = c$, en vertu de (9.21.3 a) et b)), donc, I étant grand devant c, on peut choisir j indépendant de f et de g, soit $j = \varphi'(i) \geq \varphi^2(i) \geq \varphi(i)$. Soit alors, pour tout $i \in I$ et $f: \alpha \longrightarrow \beta$,

$$\lambda'(i,f) : X(\beta)_i \longrightarrow X(\beta)_{\varphi'(i)}$$

le f-morphisme composé $X(\alpha)_i \longrightarrow X(\beta)_{\varphi(i)} \longrightarrow X(\beta)_{\varphi'(i)}$, où la deuxième flèche est le morphisme de transition. Il est alors immédiat, par construction, que (φ',λ') satisfait les conditions 9.21.13 a) et c), pour (φ,λ). Procédant de même pour la condition b), on voit qu'on peut choisir φ' de telle façon que cette condition soit également satisfait pour (φ',λ'). Cela achève la preuve de 9.21.13).

9.21.14. Soit maintenant

$$J \subset I$$

une partie de I satisfaisant les conditions suivantes :

a) J est filtrante,

b) pour tout $j \in J$, on a $\varphi(j) \in J$,

c) pour tout $\alpha \in \mathrm{ob}\, B$, $X_J(\alpha) = \varinjlim_{i \in J} X(\alpha)_i$ est représentable dans E_α.

Les conditions a) et c) sont satisfaites en particulier si J est grand devant π'_o (9.21.2). Il résulte alors de 9.21.10.1 que pour tout $\alpha \in \mathrm{ob}\, B$, $X_J(\alpha)$ est la limite inductive $\varinjlim_{i \in J} X(\alpha)_i$ dans E. Or pour une flèche $f: \alpha \longrightarrow \beta$ de B, les flèches $\lambda(i,f)$, pour i variable dans J, définissent grâce à 9.21.13 b) un morphisme de ind-objets de $(X(\alpha)_i)_{i \in J}$ dans $(X(\beta)_i)_{i \in J}$, d'où un homomorphisme

$$X_J(f) : X_J(\alpha) \longrightarrow X_J(\beta)$$

sur les limites inductives, qui est manifestement un f-homomorphisme. Utilisant 9.21.13 c), on trouve que l'on a des relations de transitivité

$$X_J(gf) = X_J(g)\, X_J(f) \quad ,$$

de sorte que l'on a défini une section $X_J \in \mathrm{ob}\, F$ de E sur B. Enfin 9.21.13 a) nous montre que les homomorphismes canoniques

$$X_J(\alpha) \longrightarrow X(\alpha) \quad , \ \alpha \in \mathrm{ob}\, B \ ,$$

sont fonctoriels en α, de sorte qu'on a un homomorphisme canonique

$$u_J : X_J \longrightarrow X \quad .$$

D'autre part, si

$$J' \supset J$$

est une autre partie de I satisfaisant aux conditions a),b),c) ci-dessus, on trouve un homomorphisme canonique

$$u_{J',J} : X_J \longrightarrow X_{J'} \quad ,$$

de sorte que les X_J forment un système inductif dans F, paramétré par l'ensemble (ordonné par inclusion) des parties J de I satisfaisant les conditions envisagées. Enfin, les homomorphismes u_J ci-dessus définissent un homomorphismes de ce système inductif dans (le système inductif constant défini par) X .

9.21.15. Soit maintenant K un ensemble de parties J de I, satisfaisant aux conditions a),b),c) envisagées dans 9.21.14, et supposons que K soit filtrant, et de réunion I. Alors il est clair que l'on a

$$\varinjlim_{J \in K} X_J \xrightarrow{\sim} X \quad ,$$

en utilisant 9.21.10.1 qui nous ramène à vérifier qu'on a un isomorphisme argument par argument.

Prenons par exemple pour K l'ensemble de toutes les parties J de I qui sont grandes devant π'_o , stables par φ, et telles que card $J \leq \pi$. Alors par définition (9.21.6) de C^{π}_{α} , on a, pour tout $\alpha \in$ ob B, $X_J(\alpha) \in$ ob C^{π}_{α} , donc $X_J \in$ ob F^{π} . Par suite, 9.21.9 (ii) sera prouvé si nous établissons que K est grand devant π (donc filtrant) et de réunion I . Il suffira évidemment, pour ceci, de prouver que toute partie S de I telle que card $S \leq \pi$ est contenue dans une $J \in K$. Ceci résultera en effet de l'hypothèse préliminaire énoncée dans 9.21.9 (ii), et du

Lemme 9.21.16. *Soient* I *un ensemble ordonné*, π *un cardinal infini*, $\varphi : I \longrightarrow I$ *une application de* I *dans lui-même*.

a) *Supposons* I *filtrant. Alors pour toute partie* S *de* I *telle que* card $S \leq \pi$, *il existe une partie* filtrante $J \supset S$ *de* I, *telle que* $\varphi(J) \subset J$ *et* $\mathrm{card}(J) \leq \pi$.

b) *Soit* π'_o *un cardinal* $< \pi$, *et supposons* I *grand devant* π . *Alors pour toute partie* S *de* I *telle que* card $S \leq \pi$, *il existe une partie* $J \supset S$ *de* I grande devant π'_o , *telle que* $\varphi(J) \subset J$ *et* card $J \leq \pi$.

Prouvons par exemple b) (la démonstration de a) étant analogue et plus simple). Soit P l'ensemble des parties de I de cardinal $\leq \pi$, et soit $T \longmapsto i_T : P \longrightarrow I$ une application telle que pour $T \in P$, i_T soit un majorant de T dans I ; l'existence de cette application exprime simplement l'hypothèse que I est grand π . Soit A un ensemble bien ordonné tel que card $A = \pi$, et tel que pour tout $a \in A$, l'ensemble des $a' \leq a$ soit de cardinal $< \pi$. Il s'ensuit en particulier, comme $\pi'_o < \pi$, que A *est grand devant* π'_o . Définissons par récurrence transfinie des applications

$$S \longmapsto S_a : P \longrightarrow P \qquad (a \in A) \quad ,$$

par les formules suivantes :

$$S_o = S \ , \ S_{a+1} = S_a \cup \varphi(S_a) \cup \{i_{S_a}\} \quad , \quad S_a = \bigcup_{a<a} S_a \text{ si a un ordinal limite.}$$

Posons alors, pour $S \in P$,

$$J(S) = \bigcup_{a \in A} S_a \quad .$$

Il est clair alors que $J(S) \supset S$, que $J(S)$ est stable par φ, que card $J(S) \leq \pi$ (puisque card $A = \pi$), enfin que $J(S)$ est grand devant π'_o (en utilisant le fait que A est grand devant π'_o).

Cela démontre 9.21.16 et achève la démonstration de 9.21.9.

Signalons aussi une variante de 9.21.9 :

Lemme 9.21.16. Les notations sont celles de 9.21.9. On désigne par F' la sous-catégorie pleine $\mathrm{Homcart}_B(B,E)$ de $F = \mathrm{Hom}_B(B,E)$ formée des sections cartésiennes de E sur F . Alors :

(i) Tout objet de F' est accessible. Plus précisément, soit $\alpha \longmapsto X(\alpha)$ un élément de F', et soit d un cardinal tel que $d \geq \pi'_o$, $d \geq c$, et tel que pour tout $\alpha \in \mathrm{ob}\, B$, $X(\alpha)$ soit un objet d-accessible de E . Alors X est un objet d-accessible de F'.

(ii) Supposons $\pi \leq c$ et que les foncteurs $f^* : E_\beta \longrightarrow E_\alpha$ soient π'_o-accessibles, ou que les catégories E_α soient stables par petites limites inductives filtrantes, et que les foncteurs $f^*: E_\beta \rightarrow E_\alpha$ commutent aux dites limites inductives. Alors tout objet X de F' est isomorphe à un objet de la forme $\varinjlim_I X_i$, où pour tout $i \in I$, X_i est un objet de la sous-catégorie pleine $F'^{\pi} = F' \cap F^{\pi_o}$ de F', et où I est grand devant π .

La démonstration étant toute analogue à celle de 9.21.9, nous nous contentons d'indiquer les points où une modification de cette dernière est nécessaire. On note d'abord :

Lemme 9.21.18. L'énoncé 9.21.10 reste valable lorsqu'on y remplace $F = \underline{\mathrm{Hom}}_B(B,E)$ par $F' = \underline{\mathrm{Homcart}}_B(B,E)$, pourvu que l'on suppose que les foncteurs images inverse $f^* : E_\beta \longrightarrow E_\alpha$ commutent aux limites inductives de type I .

Si donc sous les conditions de 9.21.17, d est un cardinal tel que $d \geq c$ et $d \geq \pi_o'$, il résulte de ce qui précède et de l'hypothèse (9.21.3 c)) que pour tout ensemble ordonné I grand devant d, les limites inductives de type I sont représentables dans F' et se calculent argument par argument, d'où la conclusion 9.21.17 (i) par un argument immédiat.

Pour prouver (ii), il faut donner un complément à 9.21.13 :

Lemme 9.21.19. Sous les conditions de 9.21.13, supposons que $X \in \mathrm{ob}\, F'$ i.e. que X soit une section cartésienne de E sur B . Alors on peut renforcer la conclusion par l'assertion qu'il existe une fonction μ qui, à tout $i \in I$ et toute flèche $f: \alpha \longrightarrow \beta$ de B, associe un morphisme $\mu(i,f) : f^* X(\beta)_i \longrightarrow X(\alpha)_{\varphi(i)}$ dans E_α , de telle façon que l'on ait :

d) Pour tout $i \in I$ et toute flèche $f: \alpha \longrightarrow \beta$ de B, les deux diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
 & f^*X(\beta)_{\varphi^2(i)} \\
X(\alpha)_{\varphi(i)} \arrow[ur, "\lambda(\varphi(i),f)"] & \\
 & f^*X(\beta)_i \arrow[ul, "\mu(i,f)"] \arrow[uu]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X(\alpha)_{\varphi^2(i)} & \\
 & f^*X(\alpha)_{\varphi(i)} \arrow[ul, "\mu(\varphi(i),f)"'] \\
X(\alpha)_i \arrow[uu] \arrow[ur, "\lambda(i,j)"'] &
\end{tikzcd} .$$

Pour le prouver, on procède comme dans 9.21.3, en considérant le morphisme composé $f^*(X(\beta)_i) \longrightarrow f^*(X(\beta)) \xrightarrow{X(f)^{-1}} X(\alpha)$, où (comme déjà dans l'écriture de la condition d)) on identifie dans les notations un f-morphisme $R \longrightarrow S$ de E avec le morphisme correspondant $R \longrightarrow f^*(S)$ de E_α. Comme $X(\alpha) = \varinjlim_j X(\alpha)_j$, et I grand devant c, on peut factoriser le morphisme précédent par un des $X(\alpha)_j$, où j a priori dépend de i <u>et</u> de f, mais peut être choisi indépendant de f, soit $\psi(i)$. Quitte à agrandir la fonction φ de 9.21.13, on peut supposer que $\psi = \varphi$. En procédant comme pour les conditions b) et c) de 9.21.13, on voit que, quitte à agrandir encore l'application φ, on peut supposer que les deux diagrammes de 9.21.19 d) sont commutatifs.

9.21.20. L'application φ étant choisie comme dans 9.21.19, reprenons l'argument de 9.21.14, où il faut cependant supposer que J satisfait, en plus des conditions énoncées a) b) c), à la condition :

d) Pour tout flèche $f : \alpha \longrightarrow \beta$ dans B, le foncteur $f^* : E_\beta \longrightarrow E_\alpha$ commute aux limites inductives de type J .

Je dis que, moyennant cette condition supplémentaire, la section X_J de E sur B est cartésienne, i.e. pour toute flèche $f\colon \alpha \longrightarrow \beta$ de B, le morphisme

(*) $$X_J(\alpha) \longrightarrow f^*X_J(\beta)$$

est un isomorphisme. En effet, en vertu de la condition d) ci-dessus, le but du morphisme envisagé s'identifie à $\varinjlim_{i\in J} f^*(X(\beta)_i)$, et le morphisme s'obtient par passage aux $\varinjlim_J$ à partir du morphisme de ind-objets dans E_α

$$(X(\alpha)_i)_{i\in J} \longrightarrow (f^*)(X(\beta)_i))_{i\in J} \quad ,$$

déduit des morphismes $\lambda(i,f)\colon X(\alpha)_i \longrightarrow f^*(X(\beta)_{\varphi(i)})$ pour $i \in J$. Or les conditions explicitées dans 9.21.19 nous assurent que l'homomorphisme précédent de ind-objets est en fait un isomorphisme, un inverse étant obtenu par l'homomorphisme déduit du système des $\mu(i,f)$, pour $i \in J$. Cela prouve notre assertion que (*) est un isomorphismes, donc que $X \in \mathrm{ob}\, F'$.

9.21.21. Nous allons supposer maintenant que les foncteurs $f^*\colon E_\beta \longrightarrow E_\alpha$ sont π'_o-<u>accessibles</u>. Alors les conditions sur J envisagées dans 9.21.20 sont satisfaites si J est grand devant π'_o, stable par φ et tel que card $J \leq \pi$, et on achève la démonstration de 9.21.17 comme en 9.21.15.

<u>Théorème</u> 9.22. <u>Soit</u> p: $E \longrightarrow B$ <u>un foncteur fibrant</u>, <u>où</u> B <u>est une catégorie essentiellement équivalente à une petite catégorie</u>, <u>et où pour toute flèche</u> $f: \alpha \longrightarrow \beta$ <u>dans</u> B <u>le foncteur image inverse</u> $f^*: E_\beta \longrightarrow E_\alpha$ <u>est accessible</u> (9.2). <u>Supposons de plus que pour tout</u> $\alpha \in$ ob E, <u>la catégorie fibre</u> E_α <u>admette une filtration cardinale</u> (9.12) <u>et que tout objet de</u> E_α <u>soit accessible</u> (9.3). <u>Alors chacune des catégories</u> $F = \underline{\mathrm{Hom}}_B(B,E)$ <u>et</u> $F' = \underline{\mathrm{Homcart}}_B(B,E)$ <u>admet une petite sous-catégorie pleine génératrice par épimorphismes stricts</u> (7.1), <u>et chacun de ses objets est accessible</u>.

Il est immédiat que l'énoncé ne change pas essentiellement quand on remplace B par une sous-catégorie pleine B_o telle que le foncteur d'inclusion $B_o \longrightarrow B$ soit une équivalence, et E par $E_o = E \times_B B_o$. Cela nous permet de supposer que B est une petite catégorie.

Soit, pour tout $\alpha \in$ ob B, $(\mathrm{Filt}^{\pi}(E))_{\pi \geq \pi_\alpha}$ une filtration cardinale de E_α . Soit $c_o \in \underline{U}$ un cardinal satisfaisant les conditions suivantes :

(9.22.1)
$$\begin{cases} c_o \geq \operatorname{Sup}_{\alpha \in \mathrm{ob}\, B} \pi_\alpha \quad , \quad c_o \geq \mathrm{card}\, \mathrm{F}\ell\, B\ ; \\ \text{pour toute flèche } f: \alpha \longrightarrow \beta \text{ de } B,\ f^*: E_\beta \longrightarrow E_\alpha \text{ est } c_o\text{-accessible;} \\ \text{pour toute } \alpha \in \mathrm{ob}\, B, \text{ les objets de } \mathrm{Filt}^{\pi_\alpha}(E_\alpha) \text{ sont } c_o\text{-accessibles.} \end{cases}$$

Posons
$$c = 2^{c_o} \quad ,$$
de sorte que $c > c_o$, et pour tout $\alpha \in$ ob B, soit
$$C_\alpha = \mathrm{Filt}^c(E_\alpha) \quad .$$

Je dis que les conditions préliminaires à 9.21.9 et 9.21.17 sont vérifiées, en faisant $\pi = \pi_o = c$. C'est clair pour (9.21.2) et (9.21.3). Pour (9.21.4 a)), cela résulte de 9.17, et (9.21.4 b)) résulte de la condition 9.12 c) pour une filtration cardinale. Notons d'ailleurs que la condition 9.12 b) des filtrations cardinales implique que pour tout $\alpha \in \mathrm{ob}\, B$, on a $C_\alpha^\pi = C_\alpha = \mathrm{Filt}^c(E_\alpha)$, où C_α^π est défini dans (9.21.6). Par suite, 9.22 résulte de 9.21.9 et de 9.21.17, et de façon plus précise, on a prouvé le

Corollaire 9.23. *Sous les conditions de* 9.22, *si* $c_o \in U$ *est un cardinal satisfaisant aux conditions* (9.22.1), *et si* $c = 2^{c_o}$, *alors la sous-catégorie* F^c *de* F (resp. F'^c de F') *formée des* X *tels que* $X(\alpha) \in \mathrm{ob}\, \mathrm{Filt}^c(E)$ *pour tout* $\alpha \in \mathrm{ob}\, B$ *est essentiellement petite et génératrice par épimorphismes stricts* ; *plus précisément, tout objet* X *de* F (resp. F') *est isomorphe à un objet de la forme* $\varinjlim_I X_i$, *où les* X_i *sont dans* F^c (resp. *dans* F'^c), *et où* I *est un ensemble ordonné grand devant* c .

Moyennant des hypothèses légèrement plus fortes dans 9.22, on peut d'ailleurs préciser considérablement 9.22 et 9.23 :

Corollaire 9.24. *Sous les conditions de* 9.22, *supposons que chacune des catégories* E_α ($\alpha \in \mathrm{ob}\, E$) *est stable par petites limites inductives filtrantes, et que pour tout* $\pi \geq \pi_\alpha$, $\mathrm{Filt}^\pi(E_\alpha)$ *est stable par limites inductives filtrantes indexées par des ensembles ordonnés filtrants* I *tels que* $\mathrm{card}\, I \leq \pi$ (*ce qui renforce légèrement la condition* 9.12 b) des filtrations cardinales). Dans le cas où c'est F' qu'on considère, supposons de plus que pour toute flèche $f: \alpha \longrightarrow \beta$ de B, le foncteur $f^* : E_\beta \longrightarrow E_\alpha$ commute aux petites limites inductives filtrantes. Soit enfin $c_o \in \underline{U}$ un cardinal satisfaisant aux conditions (9.22.1), et considérons, pour tout cardinal $\pi \geq c = 2^{c_o}$, la sous-catégorie strictement pleine F^π (resp. F'^π) de F (resp. de F') formée des X tels que l'on ait $X(\alpha) \in \mathrm{Filt}^\pi(E_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathrm{ob}\, B$. Alors les sous-catégories envisagées définissent une filtration cardinale (9.12) de F (resp. de F').

Il faut vérifier les conditions a), b), c) de 9.12. Les conditions a) et b) résultent des conditions analogues pour les filtrations cardinales données des E_α, et de 9.21.10 (resp. 9.21.18, compte tenu de la deuxième des conditions (9.22.1)). Reste à prouver c), dont la première partie résulte aussitôt de 9.21.9 (resp. 9.21.17), en faisant $\pi'_o = 0$, $\pi_o = c$. Il reste à prouver que si on a deux cardinaux $\pi' \geq \pi \geq c$, alors pour tout X dans $F^{\pi'}$ (resp. $F'^{\pi'}$) on a $X \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{i \in K} X_i$, avec les X_i dans F^π (resp. F'^π), K grand devant π , et $\mathrm{card}\, K \leq \pi'^\pi$. Pour ceci, reprenons les démonstrations de 9.21.9 (ii) et de 9.21.17 (ii). On peut supposer que chaque I_α est de cardinal $\leq \pi'$ en vertu de la condition 9.12 c) sur la filtration cardinale de E_α , donc on aura

$$\mathrm{card}\, I \leq (\pi'^\pi)^{\mathrm{card}\, \mathrm{ob}\, B} \leq (\pi'^\pi)^c = \pi'^{\pi c} = \pi'^\pi \quad .$$

L'ensemble d'indices K utilisé dans 9.21.15 resp. 9.21.21 est l'ensemble des parties J de I qui sont filtrantes (i.e. grandes devant $\pi'_o = 0$), stables par φ et telles que $\mathrm{card}\, J \leq \pi$. Il est alors immédiat que l'on a

$$\text{card } K \leq (\text{card } I)^{\pi} \leq (\pi'^{\pi})^{\pi} = \pi'^{\pi^2} = \pi'^{\pi} \quad ,$$

ce qui achève la démonstration de 9.24.

Pour terminer, il convient de donner un énoncé débarassé des hypohtèses un peu techniques de 9.22, en remplaçant celles-ci par la conjonction, pour les E_α, des hypothèses qui interviennent dans 9.11 (qui assurent l'accessibilité des objets des E) et dans 9.13 (qui assurent l'existence d'une filtration cardinale dans E) :

Corollaire 9.25. Soit $p: E \longrightarrow B$ un foncteur fibrant, où B est une catégorie équivalente à une petite catégorie, et où pour toute flèche $f: \alpha \longrightarrow \beta$ de B, le foncteur $f^* : E_\beta \longrightarrow E_\alpha$ est accessible (9.2). On suppose de plus que, pour tout $\alpha \in \text{ob } B$, la catégorie fibre E_α satisfait aux conditions suivantes :

a) E_α admet une petite sous-catégorie pleine, génératrice par épimorphismes stricts (7.1).

b) E_α est stable par produits fibrés, par noyaux de doubles flèches, par sommes de deux objets et par conoyaux de doubles flèches, enfin par petites limites inductives filtrantes (*).

c) Le foncteur Ker(u,v) sur la catégorie des doubles flèches de E_α est accessible (par exemple, commute aux petites limites inductives filtrantes).

d) Tout épimorphisme strict de E_α (10.2) est un épimorphisme strict universel.

Sous ces conditions, chacune des catégories $F = \underline{\text{Hom}}_B(B,E)$ et $F' = \underline{\text{Homcart}}_B(B,E)$ admet une petite sous-catégorie génératrice par épimorphismes stricts, et tous ses objets sont accessibles (9.3).

(*) Cette dernière condition étant probablement inutile, cf. 9.13.2.

De plus, 9.24 nous donne :

Corollaire 9.26. *Sous les conditions de* 9.25, *et dans le cas où on considère* $F' = \mathrm{Homcart}_B(B,E)$, *supposons que les foncteurs* $f^* : E_\beta \to E_\alpha$ *commutent aux petites limites inductives filtrantes. Alors* F (resp. F') *admet une filtration cardinale, qu'on peut expliciter par le procédé de* 9.24.

10. Glossaire.

Pour la commodité du lecteur, nous rassemblons ici les définitions de quelques termes utilisés dans les numéros précédents. Nous désignons par C une catégorie.

10.1. *Cartésien*, *Cocartésien* : Un diagramme de C

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

est dit *cartésien* s'il est commutatif et si le morphisme canonique de A dans le produit fibré $C \times_D B$ est un isomorphisme. Il est dit *cocartésien* si le diagramme correspondant de la catégorie opposée à $\underline{A}$ est cartésien.

10.2. Epimorphisme, épimorphisme strict etc. Cf. 10.3.

10.3. Famille épimorphique, épimorphique stricte etc. : Une famille

$$f_i : A_i \longrightarrow B \ , \quad i \in I \ ,$$

de flèches de même but dans C est dite famille épimorphique, si pour tout objet C de C, l'application induite par les f_i :

(10.3.1) $$\mathrm{Hom}_{\underline{A}}(B,C) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A_i,C)$$

est injective.

On dit que la famille envisagée est épimorphique stricte si l'image de l'application (10.3.1) est formée des familles (g_i) telles que pour tout objet R de C, tout couple d'indices $i,j \in I$ et tout couple de flèches $u: R \longrightarrow A_i$, $v: R \longrightarrow A_j$ avec $f_i u = f_j v$, on a aussi $g_i u = g_i v$. Lorsque les produits fibrés $A_i \times_B A_j$ sont représentables pour $i,j \in I$, il revient au même de dire que l'image essentielle de (10.3.1) est formée des (g_i) telles que pour tout couple d'indices $i,j \in I$, on ait $g_i pr_1 = g_i pr_2$, où pr_1, pr_2 sont les deux projections de $A_i \times_B A_j$. On dit que la famille $(f_i)_{i \in I}$ est une famille épimorphique effective si la condition précédente est vérifiée, i.e. si elle est épimorphique stricte, et si les produits fibrés $A_i \times_A A_j$ sont représentables.

On dit que la famille $(f_i)_{i \in I}$ est une famille épimorphique universelle, (resp. épimorphique effective universelle) si les morphismes f_i sont quarrables (10.3), et si pour toute flèche $B' \longrightarrow B$, la famille des flèches $f'_i : A'_i \longrightarrow A_i \times_B B'$, $i \in I$, déduite de la famille $(f_i)_{i \in I}$ par changement de base $B' \longrightarrow B$, est épimorphique (resp. épimorphique effective).

La notion de famille <u>épimorphique stricte universelle</u> sera définie dans (II 2.5, 2.6). Notons que lorsque les morphismes f_i sont quarrables (par exemple si dans C les produits fibrés sont représentables) cette notion coïncide avec celle de famille épimorphique effective universelle (utiliser II 2.4). Dans le cas général, on a entre les six variantes envisagées de la notion d'épimorphicité les implications logiques :

$$\begin{tikzcd}
& \text{épimorphique effective universelle} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
\text{épimorphique effective} \arrow[ddr, Rightarrow] & & \text{épimorphique stricte universelle} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
& \text{épimorphique stricte} \arrow[d, Rightarrow] & & \text{épimorphique universelle} \arrow[dll, Rightarrow] \\
& \text{épimorphique} & &
\end{tikzcd}$$

Un morphisme $f: A \longrightarrow B$ de $\underline{A}$ s'appelle un <u>épimorphisme</u> (resp. <u>un épimorphisme strict</u>, resp. <u>un épimorphisme effectif</u>, resp. un <u>épimorphisme universel</u>, resp. <u>un épimorphisme effectif universel</u>, resp. <u>un épimorphisme strict universel</u>) si la famille de morphisme réduit au seul élément f est épimorphique (resp. ....).

10.4. <u>Famille monomorphique</u>, <u>monomorphique stricte</u> etc. Une famille de flèches $f_i : A_i \longrightarrow B$ de C est dite <u>monomorphique</u> (resp. <u>monomorphique stricte</u>, ...) si en tant que famille de flèches de la catégorie opposée C^o elle est épimorphique (resp. épimorphique stricte, ...) Une flèche $f: A \longrightarrow B$ de $\underline{A}$ est appelée un <u>monomorphisme</u> (resp. <u>un monomorphisme strict</u>, ...) si la famille réduite à f est monomorphique (resp. monomorphique stricte , ...), i.e. si f en tant que flèche de la catégorie opposée C° est un épimorphisme (resp. un épimorphisme strict, ...).

10.5. Monomorphisme, monomorphisme strict etc. Cf. 10.4.

10.6. Projecteur, image d'un projecteur, facteur direct d'un objet.

Soit $f: X \longrightarrow X$ un endomorphisme d'un objet de C. On dit que f est un projecteur si on a $f^2 = f$. Alors le couple (f, id_X) admet un conoyau représentable X' si et seulement si il admet un noyau représentable X", et lorsqu'il en est ainsi, il existe un unique isomorphisme $u: X' \longrightarrow X''$ dans C tel que $iup = f$, où $p: X \longrightarrow X'$ et $i: X'' \longrightarrow X$ sont les morphismes canoniques. On identifie alors généralement X' et X", et on l'appelle l'image du projecteur f ; on dit que le projecteur f admet une image si $Ker(f, id_X)$ est représentable i.e. $Coker\ (f, id_X)$ est représentable. Un sous-objet (resp. un quotient) Y de X est appelé un facteur direct de X si on peut trouver un projecteur f dans X se factorisant par Y, et admettant Y comme image en tant que sous-objet (resp. en tant que quotient) de X. On dit parfois, par abus de langage, qu'un objet de C est un facteur direct de X, s'il est isomorphe à l'image d'un projecteur dans X.

10.7. Quarrable : Une flèche $f: A \longrightarrow B$ de C est dite quarrable si pour toute flèche $B' \longrightarrow B$ de C, le produit fibré $A \times_B B'$ est représentable dans C .

10.8. <u>Quotient</u>, <u>quotient strict</u> etc.

Soit A un objet de C . Deux épimorphismes $f: A \longrightarrow B$, $f': A \longrightarrow B'$ de source A sont dits <u>équivalents</u> s'il existe un isomorphisme $u: B \xrightarrow{\sim} B'$ tel que $uf=f'$. On obtient ainsi une relation d'équivalence dans l'ensemble des épimorphismes de source A, dont les classes sont appelées les <u>quotients, ou objets quotients</u>, de A . Pour tout quotient de A, on suppose généralement choisi un élément de cette classe, soit $f: A \longrightarrow B$, et on parle souvent (par abus de langage) du quotient B de A (ou du quotient $f: A \longrightarrow B$ de A). On dit que B est un <u>quotient strict</u> (resp. un <u>quotient effectif</u>, resp. <u>un quotient universel</u>, ...) si le morphisme $f: A \longrightarrow B$ est un épimorphisme strict (resp. un épimorphisme effectif, resp. un épimorphisme universel, ...) (10.3).

10.9. <u>Relations d'équivalence</u>. Soient F,G deux préfaisceaux d'ensembles sur C . Un diagramme $p_1,p_2 : F \rightrightarrows G$ est appelé une <u>relation d'équivalence sur</u> G si pour tout objet A de C, l'application

$$(p_1(A),p_2(A)) : F(A) \longrightarrow G(A)\times G(A)$$

induit une bijection de F(A) sur le graphe d'une relation d'équivalence sur l'ensemble G(A).

Un diagramme $p_1,p_2 : B \rightrightarrows C$ dans C est appelé une relation d'équivalence sur C si le diagramme de préfaisceaux correspondant est une relation d'équivalence. Lorsque dans C les produits finis et produits fibrés sont représentables, un foncteur $\Phi : C \longrightarrow C'$ commutant aux produits finis et produits fibrés transforme les relations d'équivalence sur C en relation d'équivalence sur $\Phi(C)$.

Soit $\pi : C \longrightarrow D$ un morphisme de $\underline{A}$ tel que le produit fibré $C\times_D C$ soit représentable. Alors le diagramme pr_1 , $pr_2 : C\times_D C \rightrightarrows C$ est une relation d'équivalence sur C .

10.10. <u>Relation d'équivalence effective</u>, <u>effective universelle</u>. Une relation d'équivalence $p_1, p_2 : R \rightrightarrows A$ sur un objet A de C est dite <u>relation d'équivalence effective</u> s'il existe un morphisme $\pi : A \longrightarrow B$ tel que le carré

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & A \arrow[d, "\pi"] \\ A \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

soit cartésien et cocartésien. (Le morphisme π est le conoyau du couple (p_1, p_2), et est donc déterminé à isomorphisme unique près). Le morphisme π est alors un épimorphisme effectif ; si c'est un épimorphisme effectif universel (10.3) on dit que la <u>relation d'équivalence</u> est <u>effective universelle</u>.

10.11. <u>Sous-objet</u>, <u>sous-objet strict</u> etc. Ce sont les notions duales de celles de quotient, quotient strict etc (10.8).

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>

B. Mitchell, Theory of categories, Academie Press (1965).

S G A 4

E X P O S E I

II. Appendice : Univers (par N. BOURBAKI (*))

1. Définition et premières propriétés des univers

DEFINITION 1. Un ensemble U est appelé un univers s'il satisfait aux conditions :

(U.I) si $x \in U$ et si $y \in x$, alors $y \in U$;

(U.II) si $x, y \in U$, alors $\{x,y\} \in U$;

(U.III) si $x \in U$, alors $\mathcal{P}(x) \in U$;

(U.IV) si $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille d'éléments de U, et si $I \in U$, alors la réunion $\bigcup_{\alpha \in I} x_\alpha$ appartient à U ;

(U.?) si $x, y \in U$, alors le couple $(x,y) \in U$.

N.B. Comme il a été je crois décidé pour les prochaines éditions, on définit le couple à la Kuratowski par $(x,y) = \{\{x,y\}, \{x\}\}$, la condition (U.?) est inutile car elle résulte de (U.II).

Exemples.

1) L'ensemble vide est un univers noté U_o .

2) Considérons les mots finis non vides formés avec les quatre symboles " { ", " }", " , " et " $\emptyset$ " (cf. Alg. I). Définissons, par

(*) Nous reproduisons ici, avec son accord, des papiers secrets de N. BOURBAKI. Les références de ce texte se rapportent à son savant ouvrage.

récurrence sur la longueur n d'un tel mot, la notion de mot <u>significatif</u> :

a) Pour n = 1, seul le mot $\emptyset$ est significatif ;

b) pour qu'un mot A de longueur n soit significatif, il faut et suffit qu'il existe p mots significatifs distincts $A_1, \ldots, A_p$ $(p \geq 1)$ de longueurs $< n$ tels que

$$A = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\} \quad .$$

Par exemple $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ sont des mots significatifs. Il est clair, par récurrence sur la longueur, que tout mot significatif désigne un terme de la Théorie des Ensembles ; par exemple, si $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$, A désigne l'ensemble dont les éléments sont $A_1, A_2, \ldots,$ et A_p ; ces termes sont évidemment des <u>ensembles finis</u>. Soit U_1 l'ensemble des ensembles ainsi obtenus. On vérifie aisément que U_1 satisfait aux conditions (U.I), (U.II), (U.III) et (U.IV) de la déf. 1 (mais non à cette idiote de (U.?), ce qui n'est pas grave si on veut bien décanuler le couple). Donc U_1 est un <u>univers</u>. On notera que les éléments de U_1 sont finis, et que U_1 est dénombrable.

Dans les énoncés qui suivent, U <u>désigne un univers</u>.

<u>PROPOSITION</u> 1. <u>Si</u> $X \in U$ <u>et si</u> $y \subset x$, <u>alors</u> $y \in U$.

En effet, on a $\mathcal{P}(x) \in U$ par (U.III), d'où $y \in \mathcal{P}(x)$ et $y \in U$ par (U.I).

<u>COROLLAIRE</u>. <u>Si</u> $x \in U$, <u>tout ensemble quotient</u> y <u>de</u> x <u>est élément de</u> U .

En effet y est une partie de $\mathcal{P}(x)$. D'où $y \in U$ par (U.III) et la prop. 1.

PROPOSITION 2. Si $x \in U$, on a $\{x\} \in U$.

Ça résulte de (U.II) appliqué pour $y = x$.

PROPOSITION 3. Tout couple, tout triplet, tout quadruplet d'éléments de U est un élément de U.

C'est vrai pour les couples d'après le N. B. ou (U.?). On en déduit le cas des triplets car $(x,y,z) = ((x,y),z)$, puis celui des quadruplets car $(x,y,z,t) = ((x,y,z),t)$.

PROPOSITION 4. Si $X, Y \in U$, alors $X \times Y \in U$.

En effet, pour $x \in X$, $\{x\} \times Y$ est la réunion de la famille $\{(x,y)\}_{y \in Y}$; comme on a $\{(x,y)\} \in U$ d'après (U.I), (U.II) et la prop.3, on a $\{x\} \times Y \in U$ d'après (U.IV). Enfin $X \times Y$ est la réunion de la famille $(\{x\} \times Y)_{x \in X}$; c'est donc un élément de U d'après (U.IV) encore.

COROLLAIRE 1. Si X, Y, Z,... sont des éléments de U, tous les ensembles de l'échelle construite sur X, Y, Z,... sont des éléments de U (cf. chap.IV,§).

Ça résulte en effet d'applications successives de la prop. 4 et de (U.III).

COROLLAIRE 2. Si $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille d'éléments de U et si $I \in U$, l'ensemble somme $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ est un élément de U.

En effet, cet ensemble somme est une partie du produit $(\bigcup_{\alpha \in I} x_\alpha) \times I$ (chap. II), produit dont les deux facteurs sont éléments de U (par (U.IV) et l'hypothèse). On applique alors les prop. 4 et 1.

PROPOSITION 5. *Si* X *et* Y *sont des éléments de* U, *toute correspondance entre* X *et* Y (*en particulier toute application de* X *dans* Y) *est un éléments de* U .

En effet, une telle correspondance C est un triplet (X,Y,Γ) où Γ est une partie de $X \times Y$ (le graphe de C) (chap. II, §). On a $\Gamma \in U$ d'après les prop. 4 et 1. D'où $C \in U$ par la prop. 3.

PROPOSITION 6. *Si* $X, Y \in U$, *tout ensemble* Z *de correspondances entre* X *et* Y (*en particulier d'applications de* X *dans* Y) *est élément de* U .

En effet, Z est une partie de $\{X\} \times \{Y\} \times \mathcal{P}(X \times Y)$. Or ce produit est élément de U d'après la prop. 2 et le cor. à la prop. 4. On a donc $Z \in U$ par la prop. 1.

COROLLAIRE. *Si* $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ *est une famille d'éléments de* U, *et si* $I \in U$, *on a* $\prod_{\alpha \in I} x_\alpha \in U$.

En effet, ce produit est un ensemble d'applications de I dans $\bigcup_{\alpha \in I} x_\alpha$, et cette réunion est élément de U par (U.IV).

PROPOSITION 7. *Si* X *est une partie de* U *dont le cardinal est au plus celui d'un élément de* U, *alors* X *est un élément de* U .

Soit I un élément de U tel que $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(I)$. On a une surjection $i \longmapsto x_i$ d'une partie I' de I sur X. Alors X est la réunion de la famille $(\{x_i\})_{i \in I'}$; or cette réunion est élément de U par la prop. 1, la prop. 2 et (U.IV).

COROLLAIRE. Si U est non vide toute partie finie de U est un élément de U, et U a des éléments de cardinal fini arbitraire.

Par contre, si $U = \emptyset$, $\emptyset$ est une partie finie de $\emptyset$ mais non un élément de $\emptyset$.

En effet, si U est non vide, la prop. 2 montre qu'un ensemble x_o à un élément appartient à U . Par récurrence sur n , posons $x_{n+1} = \mathcal{P}(x_n)$. On a $x_n \in U$ par (U.III), et $\mathrm{card}(x_{n+1}) = 2^{\mathrm{card}(x_n)}$, de sorte que U a des éléments de cardinal fini arbitrairement grand.

Remarque. Il résulte de la prop. 2 et du cor. à la prop. 7 que tout univers non vide U contient l'univers U_1 de l'ex. 2 ; en effet on a $\emptyset \in U$ d'après la prop. 1 . Ainsi U_1 est l'intersection de tous les univers non vides. Plus généralement :

PROPOSITION 8. Si $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ est une famille non vide d'univers, alors $U = \bigcap_{\lambda \in L} U_\lambda$ est un univers.

Ceci résulte aussitôt de la déf. 1.

2. Univers et espèces de structures

Soit $\mathcal{E}$ une espèce de structure ; supposons, pour fixer les idées et alléger l'exposé, que chaque structure d'espèce $\mathcal{E}$ est définie sur un ensemble de base. Soit (X,S) une structure d'espèce $\mathcal{E}$ (X étant l'ensemble de base, et S la structure), et soit U un univers. Si $X \in U$, alors tous les objets constitutifs de la structure S sur X sont éléments de U (par le cor.1 de la prop. 4, n° 1 et par (U.I)) de sorte que la structure (X,S) est élément de U .

Supposons maintenant que $\mathcal{E}$ soit une espèce de structure avec *morphismes*. X et X' sont des éléments de U munis de structures d'espèce $\mathcal{E}$, alors l'ensemble des morphismes de X dans X' est encore un élément de U (n° 1, prop. 6).

Considérons alors la *catégorie* $(U - \mathcal{E})$ définie au § 1, n° 2, ex. Comme les objets et les flèches de $(U - \mathcal{E})$ sont des éléments de U, $(U - \mathcal{E})$ est un *couple de parties* de U, muni d'un quadruplet d'applications ; ce n'est pas, en général, un élément de U . La notation $X \in (U - \mathcal{E})$ voudra dire que X est un élément de U muni d'une structure d'espèce $\mathcal{E}$.

La catégorie $(U - \mathcal{E})$ est *stable* pour de nombreuses opérations :

a) Si $X \in (U - \mathcal{E})$, et si X' est une partie de X qui admet une *structure induite*, alors $X' \in (U - \mathcal{E})$. Ça résulte de la prop. 1, n° 1.

b) Si $X \in (U - \mathcal{E})$, et si X" est un ensemble quotient de X qui admet une *structure quotient*, alors $X'' \in (U - \mathcal{E})$ (cor. de la prop. 1, n°1).

c) Si $X, Y \in (U - \mathcal{E})$, et si $X \times Y$ admet une *structure produit*, alors $X \times Y \in (U - \mathcal{E})$ (prop. 4, n°1). Plus généralement, si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $(U - \mathcal{E})$, *si on a* $I \in U$, et si $\prod_{i \in I} X_i$ admet une *structure produit*, alors $\prod_{i \in I} X_i \in (U - \mathcal{E})$ (cor. de la prop. 6). Assertions analogues pour les *structures sommes* (cor. 2 de la prop. 4).

d) Soient I un ensemble préordonné, et $(X_i , f_{ij})_{i,j \in I}$ un *système projectif* (resp. *inductif*) d'ensembles munis de structures d'espèce $\mathcal{E}$ et de morphismes ; soit L la limite de ce système, au sens du chap. III . Si $X_i \in U$ pour tout i , si $I \in U$, et si L admet une structure limite projective (resp. inductive), alors on a $L \in (U - \mathcal{E})$: en effet L est une partie de $\prod_{i\in I} X_i$ (resp. un ensemble quotient de $\sum_{i\in I} X_i$), et est donc un élément de U d'après le n° 1 .

Donnons encore quelques exemples plus particuliers :

$_*$ 1) Soient X, Y $\in$ (U - Top) deux espaces localement compacts. Alors l'ensemble $\mathcal{C}(X,Y)$ des applications continues de X dans Y, muni de la topologie de la convergence compacte (Top. Géné. X), est un élément de (U - Top). En effet on a $\mathcal{C}(X,Y) \in U$ d'après la prop. 6 du n° 1.$_*$

$_*$ 2) Soient X, Y $\in$ (U - Ab). Alors le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X,Y)$ est un élément de (U - Ab) par la prop. 6 du n° 1 . Si on suppose de plus qu'on a $\mathbb{Z} \in U$, le produit tensoriel $X \otimes_{\mathbb{Z}} Y$ est un élément de (U - Ab) ; en effet ce produit tensoriel est un quotient de $\mathbb{Z}^{(X \times Y)}$, lequel est une partie de $\mathbb{Z}^{X \times Y}$, qui lui-même est un élément de U par les prop. 4 et 6 du n° 1 .$_*$

$_*$ 3) Soit X $\in$ (U - Unif) un espace uniforme. Alors son complété $\hat{X}$ est un élément de (U - Unif). En effet $\hat{X}$ est un ensemble de classes d'équivalences de filtres de Cauchy sur X ; or un filtre sur X est un élément de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, donc une classe d'équivalence de filtres est un élément de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))$, de sorte que $\hat{X}$ est un élément de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))))$, donc un élément de U par (U.III) et (U.I).$_*$

N.B. Moralité, Bourbaki devra veiller à bien "canonifier" ses constructions. Par exemple, dans celles où on adjoint un élément ∞ (compactifié d'Alexandroff, corps projectif), il y aura intérêt à prendre

$\infty = \emptyset$ (car $\emptyset$ est élément de tout univers non vide) et à former l'ensemble somme de $\{\emptyset\}$ et de l'ensemble donné. Bien entendu il faudrait aussi "canonifier" l'ensemble à deux éléments servant à construire les ensembles sommes ; ainsi $\{\emptyset , \{\emptyset\}\}$ me paraît un bon candidat car il appartient à tout univers non vide.

3. Univers et catégories

Soient U un univers et C une catégorie. Nous écrivons $C \in U$ si on a $Ob(C) \in U$ et $Fl(C) \in U$. Cette écriture est justifiée du fait que C est le sextuplet formé de Ob(C), de Fl(C) et des quatre applications structurales ; donc si $Ob(C) \in U$ et $Fl(C) \in U$, ces quatre applications sont éléments de U (n° 1, cor. 1 de la prop. 4), donc aussi le sextuplet C (n° 1, prop. 3, cum grano salis). Ceci est d'ailleurs un cas particulier du n° 2, si l'on considère l'espèce de structure "cat" de catégorie. Avec les notations du n° 2, la relation $C \in U$ s'écrit aussi $C \in (U - cat)$.

On notera qu'une catégorie comme (U - Ens), (U - Ord), (U - Top) ou (U - Gr) n'est *pas*, en général, un élément de U .

Soient C, D deux catégories et U un univers tels que $C, D \in U$. Si C' est une *sous-catégorie* de C, on a $C' \in U$; la *catégorie produit* $C \times D$, la catégorie somme de C et D, les catégories opposées C^{o} et D^{o} sont aussi éléments de U (cf. n° 2). La *catégorie de foncteurs* $E = \underline{Hom}(C,D)$ est également un élément de U : en effet Ob(E) est un ensemble de couples d'applications $Ob(C) \longrightarrow Ob(D)$, $Fl(C) \longrightarrow Fl(D)$, donc $Ob(E) \in U$ par le n° 1 ; quant à Fl(E), c'est un ensemble de morphisme fonctoriels, c'est-à-dire d'applications $Ob(C) \longrightarrow Fl(D)$, d'où $Fl(E) \in U$ par la prop. 6 du n° 1 .

PROPOSITION 9. Soient $\mathcal{E}$ une espèce de structure avec morphismes, et U, U' deux univers tels que $U' \subset U$. Alors $(U' - \mathcal{E})$ est une sous-catégorie pleine de $(U - \mathcal{E})$.

En effet, si x et y sont des objets de $(U' - \mathcal{E})$, ce sont par définition des objets de $(U - \mathcal{E})$. Quant à Hom(x,y), c'est le même ensemble dans les deux catégories (cf. §1, n°2, ex. c)).

N.B. On notera que l'hypothèse que U et U' sont des univers est inutile, de sorte que la prop. 9 remonterait avantageusement au § 1, n° 4. Mais la Tribu a demandé qu'elle soit ici.

Remarque. Il arrive que les axiomes de l'espèce de structure $\mathcal{E}$ impliquent que les cardinaux des ensembles munis de structures d'espèce $\mathcal{E}$ soient bornés par un cardinal fixe, soit $\underline{c}$ (* par exemple l'espèce de structure de groupe fini, de groupe de type fini, de module de type fini sur un anneau fixe A, ou d'algèbre de type fini sur A *). Supposons alors qu'il existe un élément z de U' tel que $\underline{c} \leq \mathrm{card}(z)$. Alors, pour tout ensemble x muni d'une structure d'espèce $\mathcal{E}$, il existe un élément x' de U' équipotent à x, par exemple une partie de z ; munissons x' de la structure déduite de celle de x par transport de structure ; on obtient ainsi un élément de $(U' - \mathcal{E})$. Il s'ensuit que le foncteur d'inclusion de $(U' - \mathcal{E})$ dans $(U - \mathcal{E})$ est alors essentiellement surjectif (§4, n°2, déf.2) et est donc une équivalence de catégorie (§4, n°3, th.1).

4. L'axiome des univers

Les fort agréables résultats de stabilité du n° 2 n'ont d'intérêt que si on peut les appliquer à autre chose qu'aux deux petits univers U_o et U_1 décrits au n° 1. Nous ajouterons donc aux axiomes de la Théorie des Ensembles l'axiome suivant :

(A.6) Pour tout ensemble x, il existe un univers U tel que $x \in U$.

Cet axiome implique que, si $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille d'ensembles, il existe un univers U tel que $x_\alpha \in U$ pour tout $\alpha \in I$: il suffit, en effet, d'appliquer (A.6) à $x = \bigcup_{\alpha \in I} x_\alpha$ et d'appliquer la prop. 1 du n°1.

En particulier, étant donnée une catégorie C, il existe un univers U tel que $C \in U$ au sens du n°3 : on applique ce qui précède à la famille $(\mathrm{Ob}(C), \mathrm{Fl}(C))$. Ceci s'applique aux catégories de la forme $(V - \mathcal{E})$ où $\mathcal{E}$ est une espèce de structure avec morphismes et V un ensemble, un univers par exemple ; en général on a $V \neq U$.

Par exemple, si V est un univers, on a $\mathrm{Ob}(V - \mathrm{Ens}) = V$ et $\mathrm{Fl}(V - \mathrm{Ens}) \subset V$ (n° 1, prop. 5). Les univers U tels que $(V - \mathrm{Ens}) \in U$ sont donc ceux tels que $V \in U$. Or la relation $V \in V$ est impossible pour un univers : en effet, pour toute partie A de V, on aurait $A \in V$ (n° 1, prop. 1), d'où $\mathrm{card}(\mathfrak{P}(V)) \leq \mathrm{card}(V)$, ce qui est impossible.

5. Univers et cardinaux fortement inaccessibles

Soit U un univers. D'après la condition (U.I) de la déf. 1 tout élément x de U est une partie de U ; on a donc $\mathrm{card}(x) \leq \mathrm{card}(U)$. Comme les cardinaux des parties de U forment un ensemble bien ordonné, le cardinal

$$(1) \qquad \underline{\underline{c}}(U) = \sup_{x\in U} \mathrm{card}(x)$$

existe. Notons que, pour tout cardinal $\underline{\underline{c}} < \underline{\underline{c}}(U)$, il existe un élément x de U tel que $\mathrm{card}(x) = \underline{\underline{c}}$; en effet, il existe par définition $y \in U$ tel que $\underline{\underline{c}} \leq \mathrm{card}(y) \leq \underline{\underline{c}}(U)$, et l'on prend pour x une partie convenable de y . Réciproquement, si $x \in U$, on a $\mathrm{card}(x) < \underline{\underline{c}}(U)$; en effet on a $\mathfrak{P}(x) \in U$ par (U.III), d'où $2^{\mathrm{card}(x)} \leq \underline{\underline{c}}(U)$. Le cardinal $\underline{\underline{c}}(U)$ a donc les propriétés suivantes :

1) Si $\underline{\underline{c}}$ est un cardinal $< \underline{\underline{c}}(U)$, on a $2^{\underline{\underline{c}}} < \underline{\underline{c}}(U)$; en effet, si x est un élément de U de cardinal $\underline{\underline{c}}$, on a $\mathfrak{P}(x) \in U$ par application de (U.III), d'où $2^{\underline{\underline{c}}} < \underline{\underline{c}}(U)$.

2) Si $(\underline{\underline{c}}_\lambda)_{\lambda\in I}$ est une famille de cardinaux telle que $\underline{\underline{c}}_\lambda < \underline{\underline{c}}(U)$ pour tout $\lambda \in I$ et que $\mathrm{card}(I) < \underline{\underline{c}}(U)$, alors le cardinal somme $\sum_{\lambda\in I} \underline{\underline{c}}_\lambda$ est $< \underline{\underline{c}}(U)$. En effet soit $x_\lambda \in U$ tel que $\mathrm{card}(x_\lambda) = \underline{\underline{c}}_\lambda$; quitte à remplacer I par un ensemble d'indices équipotent, on peut supposer qu'on a $I \in U$; alors l'ensemble somme des x_λ est élément de U (cor. 2 de la prop. 4 du n°1), ce qui démontre notre assertion.

Posons la définition suivante :

DEFINITION 2. Un cardinal $\underline{\underline{d}}$ est dit fortement inaccessible si :

(FI.1) Si $\underline{\underline{c}}$ est un cardinal tel que $\underline{\underline{c}} < \underline{\underline{d}}$, on a $2^{\underline{\underline{c}}} < \underline{\underline{d}}$.

(FI.2) Si $(\underline{\underline{c}}_\lambda)_{\lambda \in I}$ est une famille de cardinaux telle que $\underline{\underline{c}}_\lambda < \underline{\underline{d}}$ pour tout $\lambda \in I$ et si $\mathrm{card}(I) < d$, alors $\sum_{\lambda \in I} \underline{\underline{c}}_\lambda < \underline{\underline{d}}$.

Exemples. Le cardinal 0 et le cardinal infini dénombrable sont fortement inaccessibles. Aucun cardinal fini non nul n'est fortement inaccessible. Ainsi nous venons de démontrer que l'axiome (A.6) des univers implique la relation :

(A'.6) Tout cardinal est strictement majoré par un cardinal fortement inaccessible.

Inversement :

THEOREME 1. La relation (A'.6) implique l'axiome (A.6) des univers.

En effet soit A un ensemble. Il s'agit de construire un univers U dont A est élément. Définissons par récurrence une suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'ensembles au moyen de :

(2) $A_o = A$, A_{n+1} = réunion des éléments de A_n = ensemble des éléments de A_n.

Posons $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Soit, par (A'.6), $\underline{\underline{c}}$ un cardinal fortement inaccessible tel que $\mathrm{card}(B) < \underline{\underline{c}}$.

Il existe un ensemble bien ordonné I tel que $\mathrm{card}(I) = \underline{\underline{c}}$. Quitte à remplacer I par son plus petit segment de cardinal $\underline{\underline{c}}$, on peut supposer que tout segment de I distinct de I a un cardinal $< \underline{\underline{c}}$.

Nous noterons ε le <u>plus petit élément de</u> I . Il résulte de l'hypothèse sur les segments que I n'a pas de plus grand élément (sinon on l'enleverait), donc que tout élément de I admet un successeur ; pour $\alpha \in I$, nous noterons $s(\alpha)$ le <u>successeur</u> de α

Ceci étant, définissons, par <u>récurrence transfinie</u>, une famille $(B_\alpha)_{\alpha\in I}$ d'ensembles au moyen de :

$$(3) \qquad \begin{cases} B_\varepsilon = B \\ B_{s(\alpha)} = B_\alpha \cup \mathcal{P}(B_\alpha) \\ B_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} B_\beta \quad \text{si } \alpha \text{ n'a pas de prédécesseur.} \end{cases}$$

Posons $U = \bigcup\limits_{\alpha\in I} B_\alpha$. Nous allons montrer que U est l'univers cherché.

On a d'abord $A \in U$, car $A = A_o$ est une partie de $B = B_\varepsilon$, donc un élément de $\mathcal{P}(B_\varepsilon) \subset B_{s(\varepsilon)}$.

Notons ensuite que, pour tout $\alpha \in I$, on a :

$$(4) \qquad \operatorname{card}(B_\alpha) < \underline{\underline{c}} \quad .$$

Procédons en effet par récurrence transfinie sur α . C'est vrai pour $\alpha = \varepsilon$ par hypothèse. De (4) on déduit $\operatorname{card}(B_{s(\alpha)}) \leq \operatorname{card}(B_\alpha) + 2^{\operatorname{card}(B_\alpha)} < \underline{\underline{c}}+\underline{\underline{c}}$ (par (FI.1)) $= \underline{\underline{c}}$ (car $\underline{\underline{c}}$ est infini). Enfin, si α n'a pas de prédécesseur, l'ensemble I' des $\beta < \alpha$ a un cardinal $< \underline{\underline{c}}$ par construction ; d'où (si $\operatorname{card}(B_\beta) < \underline{\underline{c}}$ pour tout $\beta < \alpha$), $\operatorname{card}(B_\alpha) = \operatorname{card}(\bigcup\limits_{\beta\in I'} B_\beta) \leq \sum\limits_{\beta\in I'} \operatorname{card}(B_\beta) < \underline{\underline{c}}$ (par (FI.2)). Ceci démontre (4).

Montrons maintenant qu'on a

(5) $\mathrm{card}(x) < \underline{\underline{c}}$ pour tout $x \in U$.

En effet, il suffit de montrer que, pour tout $\alpha \in I$, on a "$\mathrm{card}(x) < \underline{\underline{c}}$ pour tout $x \in B_\alpha$ ". Procédons encore par récurrence transfinie sur α . C'est vrai pour $\alpha = \varepsilon$, car, si $x \in B_\varepsilon = B$, il existe $n \geq 0$ tel que $x \in A_n$ d'où $X \subset A_{n+1}$ par (2), $x \subset B$ et $\mathrm{card}(x) \leq \mathrm{card}(B) < \underline{\underline{c}}$. Le cas où α n'a pas de prédécesseur est évident. Enfin, si $x \in B_\alpha$ et si $\alpha = s(\beta)$, on a soit $x \in B_\beta$ et l'assertion "$\mathrm{card}(x) < \underline{\underline{c}}$ " est vraie par récurrence, soit $x \in \mathcal{P}(B_\beta)$, d'où $x \subset B_\beta$ et l'assertion "$\mathrm{card}(x) < \underline{\underline{c}}$ " est vraie par (

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que U est bien un <u>univers</u> :

(U.I) Soient $x \in U$ et $y \in x$. Il s'agit de montrer qu'on $y \in U$. Autrement dit il s'agit de montrer que, pour tout $\alpha \in I$, on a la relation :

$$\text{" } x \in B_\alpha \text{ et } y \in x \implies y \in B_\alpha \text{ "} \quad .$$

On procède encore par récurrence transfinie sur α . C'est vrai pour $\alpha = \varepsilon$ car $x \in B_\varepsilon = B$ implique $x \in A_n$ pour un certain n ; donc, si $y \in x$, on a $y \in A_{n+1}$, d'où $y \in B = B_\varepsilon$. Le passage à un élément α sans prédécesseur est évident. Passons enfin de α à $s(\alpha)$: si $x \in B_{s(\alpha)}$ et si $y \in x$, on a, soit $x \in B_\alpha$, d'où $y \in B_\alpha \subset B_{s(\alpha)}$ par récurrence, soit $x \in \mathcal{P}(B_\alpha)$, d'où encore $y \in B_\alpha \subset B_{s(\alpha)}$.

(U.II) Soient $x, y \in U$. Comme la famille $(B_\alpha)_{\alpha \in I}$ est croissante par (3), il existe $\alpha \in I$ tel que $x, y \in B_\alpha$. Alors $\{x , y\} \in \mathcal{P}(B_\alpha) \subset B_{s(\alpha)} \subset U$.

(U.III) Soit $x \in U$. Il existe alors $\alpha \in I$ tel que $x \in B_\alpha$. Il suffit donc de montrer que, pour tout $\alpha \in I$, on a la relation :

$$" x \in B_\alpha \Longrightarrow \mathcal{P}(x) \in B_{s(s(\alpha))} " .$$

On procède encore par récurrence transfinie sur α . Si $\alpha = \varepsilon$, on a $x \in A_n$ pour un certain n, d'où $y \subset A_{n+1} \subset B = B_\varepsilon$ pour toute partie y de x ; ainsi on a $y \in \mathcal{P}(B_\varepsilon) \subset B_{s(\varepsilon)}$ pour tout $y \in \mathcal{P}(x)$, d'où $\mathcal{P}(x) \subset B_{s(\varepsilon)}$ et $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(B_{s(\varepsilon)}) \subset B_{s(s(\varepsilon))}$, de sorte que notre assertion est vraie pour $\alpha = \varepsilon$. La passage à un élément α sans prédécesseur est immédiat, car $\beta < \alpha$ implique alors $s(s(\beta)) < \alpha$. Passons enfin de α à $s(\alpha)$; soit $x \in B_{s(\alpha)}$; si $x \in B_\alpha$, on a $\mathcal{P}(x) \in B_{s(s(\alpha))} \subset B_{s(s(s(\alpha)))}$ par récurrence ; si $x \in \mathcal{P}(B_\alpha)$, on a $x \subset B_\alpha$, d'où $\mathcal{P}(x) \subset \mathcal{P}(B_\alpha)$ et $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B_\alpha)) \in B_{s(s(s(\alpha)))}$.

(U.IV) Soit $(x_\lambda)_{\lambda \in K}$ une famille d'éléments de U telle que $K \in U$. Il s'agit de montrer que la réunion $x = \bigcup_{\lambda \in K} x_\lambda$ est élément de U . Pour tout $\lambda \in K$, choisissons un $\alpha(\lambda) \in I$ tel que $x_\lambda \in B_{\alpha(\lambda)}$. Montrons que l'ensemble $\alpha(K)$ des $\alpha(\lambda)$ est <u>majoré</u> dans I : en effet, s'il ne l'était pas, on aurait :

$$I = \bigcup_{\lambda \alpha K} [\ \varepsilon\ ,\ \alpha(\lambda)\ ] \quad ,$$

ce qui contredirait (FI.2) car $\mathrm{card}(K) < \underline{\underline{c}}$ et $\mathrm{card}([\ \varepsilon\ ,\ \alpha(\lambda)]) < \underline{\underline{c}}$ pour tout $\lambda \in K$. Soit donc β un majorant de $\alpha(K)$; on a $x_\lambda \in B_\beta$ pour tout $\lambda \in K$ car la famille $(B_\alpha)_{\alpha \in I}$ est croissante. On a donc $x_\lambda \subset B_\beta$ d'après ce qu'on a vu dans la démonstration de (U.I), d'où $x = \bigcup_{\lambda \in K} x_\lambda \subset B_\beta$. Par (3) il s'ensuit qu'on a $x \in B_{s(\beta)}$, d'où $x \in U$. C.Q.F.D.

DEFINITION 3. Soient x , y deux ensembles et n un entier ≥ 0 . On dit que y est un composant d'ordre n de x s'il existe une suite $(x_j)_{j=0,\ldots,n}$ telle que $x_o = x$, $x_n = y$, et $x_{j+1} \in x_j$ pour $j = 0,\ldots,n-$

Ainsi x est le seul composant d'ordre 0 de x . Les composants d'ordre 1 (resp. 2) de x sont les éléments de x (resp. les éléments des éléments de x). On dit que y est un composant de x s'il existe $n \geq 0$ tel que y soit composant d'ordre n de x . La relation " y est un composant de x " est une relation de préordre. D'après le schéma de sélection-réunion (chap. II, ...) la relation " y est un composant de est collectivisante par rapport à y, de sorte que les composants de x forment un ensemble .

DEFINITION 4. Soit $\underline{c}$ un cardinal. On dit qu'un ensemble x est de type $\underline{c}$ (resp. de type strict $\underline{c}$, de type fini) si tous les composants de x ont des cardinaux $\leq \underline{c}$ (resp. $< \underline{c}$,finis).

Exemples. Les éléments de l'univers U_1 (n° 1, ex. 2) sont tous de type fini. Si $\underline{c}$ est un cardinal, et si x est de type $\underline{c}$ (resp. type strict $\underline{c}$, type fini), alors tout composant de x et toute partie de x sont de type $\underline{c}$ (resp. type strict $\underline{c}$, type fini) ; de même $\mathcal{P}(x)$ est de type $2^{\underline{c}}$ (resp. de type strict $2^{\underline{c}}$, de type fini). Si x est de type $\underline{c}$ et si $\underline{c} \leq \underline{c}'$ alors x est de type $\underline{c}'$.

<u>LEMME</u>. <u>Soient $\underline{\underline{c}}$ un cardinal fortement inaccessible non dénombrable, et</u> X <u>un ensemble de type strict $\underline{\underline{c}}$</u> . <u>Alors il existe un cardinal $\underline{\underline{d}} < \underline{\underline{c}}$ tel que</u> X <u>soit de type $\underline{\underline{d}}$</u>.

En effet, pour tout entier n , notons $\underline{\underline{d}}_n$ le cardinal de l'ensemble X_n des composants d'ordre n de X . On a $\underline{\underline{d}}_o = 1$, $\underline{\underline{d}}_1 = \text{card}(X) < \underline{\underline{c}}$, et, comme $X_n = \bigcup_{y \in X_{n-1}} y$, on en déduit, par récurrence sur n et usage de (FI.2), qu'on a $\underline{\underline{d}}_n < \underline{\underline{c}}$ pour tout n . Alors les $\underline{\underline{d}}_n$ sont majorés par le cardinal $\underline{\underline{d}} = \sum_{j \geq 0} \underline{\underline{d}}_j$, qui est $< \underline{\underline{c}}$ par (FI.2) et l'hypothèse de non dénombrabilité de $\underline{\underline{c}}$. Alors, si Y est un composant d'ordre n de X, on a $\text{card}(Y) \leq \text{card}(X_{n+1}) \leq \underline{\underline{d}}$. C.Q.F.D.

<u>PROPOSITION</u> 10. <u>Soient</u> U <u>un univers et $\underline{\underline{c}}$ un cardinal fortement inaccessible. Alors l'ensemble</u> U' <u>des</u> $x \in U$ <u>qui sont de type strict $\underline{\underline{c}}$ est un univers</u>.

En effet, si $x, y \in U'$ et si $z \in x$, on a évidemment $z \in U'$ et $\{x , y\} \in U'$. Si $x \in U'$, on a $\text{card}(x) < \underline{\underline{c}}$, d'où $\text{card}(\mathcal{P}(x)) < \underline{\underline{c}}$ par (FI.1) ; comme un composant de $\mathcal{P}(x)$ est, ou bien $\mathcal{P}(x)$, ou bien une partie de x , ou bien un composant de x, on a $\mathcal{P}(x) \in U'$. Enfin si $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille d'éléments de U' telle que $I \in U'$, on a $\text{card}(\bigcup_\alpha x_\alpha) < \underline{\underline{c}}$ par (FI.2) ; comme tout composant d'ordre > 0 de $\bigcup_\alpha x_\alpha$ est un composant d'un x_α , on a bien $\bigcup_\alpha x_\alpha \in U'$ C.Q.F.D.

<u>Remarque sur le cardinal</u> $\underline{\underline{c}}(U)$. Soient U un univers et $\underline{\underline{c}}(U)$ le cardinal défini par (1), i.e.

$$\underline{\underline{c}}(U) = \sup_{x \in U} \text{card}(x) \quad .$$

On a évidemment $\underline{\underline{c}}(U) \leq \mathrm{card}(U)$, car, rappelons-le, $x \in U$ implique $x \subset U$. Mais l'égalité $\underline{\underline{c}}(U) = \mathrm{card}(U)$ n'est pas toujours vraie. Par exemple soit $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille <u>non dénombrable</u> de symboles avec les axiomes :

$$\text{"}x_\alpha = \{x_\alpha\} \text{ pour tout } \alpha \in I\text{"}, \quad \text{"}x_\alpha \neq x_\beta \text{ si } \alpha \neq \beta\text{"}$$

(autrement dit x_α est un ensemble à un seul élément, à savoir lui-même). Formons, comme dans l'ex. 2 du n° 1, les "mots significatifs" formés avec les symboles $\emptyset$, x_α, $\{$, $\}$ et , . Chacun désigne un ensemble <u>fini</u>. Soit U l'ensemble de ceux-ci. On vérifie aisément que les conditions de la déf. 1 sont satisfaites, de sorte que U est un <u>univers</u>. Comme les mots significatifs sont des suites finies d'éléments d'un ensemble de cardinal $\mathrm{card}(I) + 4 = \mathrm{card}(I)$; on a $\mathrm{card}(U) = \mathrm{card}(I)$ (chap. III ; en fait $\mathrm{card}(U) \geq \mathrm{card}(I)$ suffit, et c'est évident). D'autre part, $\underline{\underline{c}}(U)$ est le cardinal dénombrable, d'où $\underline{\underline{c}}(U) < \mathrm{card}(U)$.

L'inégalité stricte $\underline{\underline{c}}(U) < \mathrm{card}(U)$ tient à ce qu'on a introduit ici des ensembles x_α tels que $x_\alpha \in x_\alpha$. Si on interdit des horreurs de ce genre, on obtient $\mathrm{card}(U) = \underline{\underline{c}}(U)$ pour tout univers U, ainsi que d'autres fort jolis résultats "ne pouvant servir à rien". C'est ce qu'on va faire au numéro suivant.

6. Ensembles et univers artiniens

DEFINITION 5. <u>On dit qu'un ensemble</u> x <u>est artinien s'il n'existe aucune suite infinie</u> $(x_n)_{n \geq 0}$ <u>telle que</u> $x_o = x$ <u>et que</u> $x_{n+1} \in x_n$ <u>pour tout</u> $n \geq 0$.

<u>Exemples</u>. Les ensembles $\emptyset$, $\{ \emptyset \}$, $\{ \emptyset, \{\emptyset\} \}$, plus généralement les éléments de l'univers U_1 du n° 1, sont artiniens.

En termes imagés, si x est artinien, et si on prend un élément x_1 de x, puis un élément x_2 de x_1 , etc., le processus doit s'arrêter, et on arrive à un composant x_n de x qui est <u>vide</u>. Autrement dit les ensembles artiniens sont "construits à partir de $\emptyset$ "; ceci sera précisé plus tard (cf. (*) dans la démonstration du th. 2).

Les ensembles artiniens jouissent évidemment des propriétés suivantes :

(AR.I) Si x est artinien, toute partie de x et tout composant de x sont artiniens. Pour que x soit artinien, il faut et il suffit que tout élément de x soit artinien.

(AR.II) Si x et y sont artiniens, alors $\{x,y\}$ est artinien.

(AR.III) Si x est artinien, $\mathcal{P}(x)$ est artinien.

(AR.IV) Toute réunion d'ensembles artiniens est un ensemble artinien.

Ces propriétés montrent aussitôt qu'on a la

PROPOSITION 11. *Si* U *est un univers, l'ensemble des éléments artiniens de* U *est un univers, nécessairement artinien.*

COROLLAIRE. *Si* x *est un ensemble artinien, il existe un univers artinien* U *tel que* $x \in U$.

En effet, par l'axiome (A.6), x est élément d'un univers V ; on prend pour U l'ensemble des éléments artiniens de V .

La proposition suivante est encore moins utile que le reste du n° :

<u>PROPOSITION</u> 12. Soit A un ensemble artinien. Alors :

a) Pour tout $x \in A$, on a $x \notin x$;

b) Si $x, y \in A$, on ne peut avoir à la fois $x \in y$ et $y \in x$;

c) Pour tout $x \in A$, la relation " y est un composant de z " entre composants y , z de x est une relation d'ordre ;

d) Pour tout élément non vide x de A, il existe $y \in x$ tel que $x \cap y$

En effet la négation de a) (resp. de b)) entraîne l'existence d'une suite infinie $(x_n)_{n\geq 0}$ contredisant la déf. 5, à savoir $(x,x,x,\ldots)$ (resp. $(x,y,x,y,x,y,\ldots)$). La négation de c) veut dire qu'il existe $x \in A$, des composants y , z de x distincts, et des suites d'appartenance

$$y \in y_1 \in \ldots \in y_q \in z \quad , \quad z \in z_1 \in \ldots \in z_r \in y \quad ;$$

d'où, comme dans b), une suite infinie $(x_n)_{n\geq 0}$ contredisant la déf. 5 . Enfin, si d) est fausse, il existe un élément non vide x de A tel que $x \cap y \neq \emptyset$ pour tout $y \in x$; on pose $x_o = x$, et on prend pour x_1 un élément de x ; comme $x \cap x_1 \neq \emptyset$, on prend pour x_2 un élément de $x \cap x_1$ etcétera ; plus formellement on définit par récurrence une suite infinie $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de x au moyen de $x_1 \in x$, $x_{n+1} \in x_n \cap x$ pour $n \geq 1$; alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ contredit la déf. 5 .

<u>Remarque</u>. Soit B un ensemble. Pour que B soit artinien, il faut et il suffit que tout ensemble A d'ensembles de composants de B satisfasse à la condition d) de la prop. 12. En effet la nécessité résulte de (AR.I

et de la prop. 12. Réciproquement, si B n'est pas artinien, il existe une suite infinie $(x_n)_{n\geq 0}$ avec $x_o = B$ et $x_{n+1} \in x_n$ pour tout $n \geq 0$; on prend alors pour A la partie réduite à l'ensemble X des x_n ; ainsi A contient un élément non vide X tel que, pour tout élément y de X , on ait $y \cap X \neq \emptyset$ (en effet y est de la forme x_n , et on a $x_{n+1} \in y \cap X$).

THEOREME 2. Soit $\underline{c}$ un cardinal infini. Alors :

a) La relation " x est un ensemble artinien de type $\underline{c}$ (resp. de type strict $\underline{c}$)" est collectivisante par rapport à x ; l'ensemble $A_{\underline{c}}$ des ensembles artiniens de type $\underline{c}$ a pour cardinal $2^{\underline{c}}$.

b) Si $\underline{c}$ est fortement inaccessible, l'ensemble $U_{\underline{c}}$ des ensembles artiniens de type strict $\underline{c}$ est un univers de cardinal $\underline{c}$; le cardinal $\underline{c}(U_{\underline{c}}) = \sup_{x \in U_{\underline{c}}} \mathrm{card}(x)$ est $\underline{c}$.

c) Si un univers U admet un élément de cardinal $\underline{c}$, tout ensemble artinien de type $\underline{c}$ appartient à U (autrement dit $A_{\underline{c}} \subset U$).

c') Si un univers U est non vide, tout ensemble artinien de type fini est élément de U .

Avant de démontrer le th. 2, déduisons en quelques corollaires illuminants :

COROLLAIRE 1. Si un univers U est artinien, alors card(U) est fortement inaccessible, et U est l'ensemble des ensembles artiniens de type strict card(U).

En effet posons $\underline{\underline{c}}(U)=\sup_{x\in U}\mathrm{card}(x)$. C'est un cardinal fortement inaccessible (début du n° 5). Supposons le d'abord non dénombrable ; alors, pour tout cardinal infini $\underline{\underline{c}} < \underline{\underline{c}}(U)$, tout ensemble artinien de type $\underline{\underline{c}}$ est élément de U par c) ; donc tout ensemble artinien de type strict $\underline{\underline{c}}(U)$ est élément de U par le lemme du n° 5 . Cette dernière assertion reste valable si $\underline{\underline{c}}(U)$ est dénombrable par c'). Inversement, d'après (U.I), tout ensemble de U est de type strict $\underline{\underline{c}}(U)$. Donc U est l'univers $U_{\underline{\underline{c}}(U)}$ de b), d'où $\underline{\underline{c}}(U) = \mathrm{card}(U)$ par b).

Il résulte du cor. 1 qu'un univers artinien est *déterminé* de façon unique par son cardinal (d'ailleurs fortement inaccessible). On a donc une "correspondance biunivoque" entre univers artiniens et cardinaux fortement inaccessibles. En particulier :

COROLLAIRE 2. *La relation d'inclusion* $U \subset U'$ *entre univers artiniens est une relation de bon ordre*.

En effet la relation $\underline{\underline{c}} \leq \underline{\underline{c}}'$ entre cardinaux est une relation de bon ordre (chap. III) et, avec les notations du b) du th. 2, les relations $\underline{\underline{c}} \leq \underline{\underline{c}}'$ et $U_{\underline{\underline{c}}} \subset U_{\underline{\underline{c}}'}$ sont équivalentes.

Notons que le th. 2, b) donne une seconde démonstration du th. 1 (n° 5).

Passons à la démonstration du th. 2 . Etant donné un ensemble A, nous appellerons *chaîne* de A toute suite finie $(x_j)_{j=0,\ldots,n}$ telle que $x_o = A$ et que $x_{j+1} \in x_j$ pour $j = 0,\ldots, n-1$. Les chaînes de A forment un ensemble, d'après le schéma de sélection-réunion ; notons le G(A). Etant donnée une chaîne $X = (x_j)_{j=0,\dots,n}$, les chaînes de la forme $(x_i)_{i=0,\dots,q}$ avec $q \leq n$ seront dites plus petites que X ; on obtient ainsi, sur G(A), une structure d'ensemble ordonné. Pour que A soit artinien, il faut et il suffit que G(A) soit un ensemble ordonné "noethérien" (c.à.d. satisfaisant aux conditions équivalentes du chap. III, § 6, n° 5).

Nous allons montrer que :

(*) Si A est artinien, il est déterminé de façon unique par la classe d'isomorphisme de l'ensemble ordonné G(A).

En effet, étant donnés un ensemble ordonné G et un élément $g \in G$, nous noterons S(g) l'ensemble des $g' \in G$ tels que $g < g'$ et que $g \leq h \leq g'$ implique $h = g$ ou $h = g'$ (autrement dit l'ensemble des "successeurs immédiats" de g). Considérons l'application θ qui, à toute chaîne $X = (x_o,\dots,x_n)$ de G(A) fait correspondre l'ensemble x_n ; on a alors, pour tout $X \in G(A)$:

$$\theta(X) = \{\ \theta(X') \mid X' \in S(X)\}\quad .$$

Comme A est l'image par θ du plus petit élément $X_o = (A)$ de G(A), il va nous suffire de montrer que θ est uniquement déterminée par la classe d'isomorphisme de l'ensemble ordonné G(A). Or ceci résulte du lemme suivant :

LEMME 1. Soient G un ensemble ordonné noethérien et φ une application de G telle que, pour tout $g \in G$, on ait :

(1) $$\varphi(g) = \{ \varphi(g') \mid g' \in S(g) \} \quad .$$

Alors φ est déterminée de façon unique. De plus, si U est un univers contenant un élément équipotent à G, φ prend ses valeurs dans U.

L'hypothèse implique qu'on a $\varphi(g) = \emptyset$ si g est un élément maximal de G.

Soient, en effet, φ et φ' deux applications telles que (1) soit vraie ; si $\varphi \neq \varphi'$, l'ensemble des $g \in G$ tels que $\varphi(g) \neq \varphi'(g)$ est non-vide, donc admet un élément maximal h car G est noethérien ; on a alors $\varphi(g) = \varphi'(g)$ pour tout $g > h$, en particulier pour tout "successeur" $g \in S(h)$; d'où $\varphi(h) = \varphi'(h)$ par (1), ce qui est une contradiction ; on a donc bien $\varphi = \varphi'$. Soit maintenant U un univers contenant un élément x équipotent à G ; montrons que φ prend ses valeurs dans U ; sinon soit h un élément maximal parmi les $g \in G$ tels que $\varphi(g) \notin U$; on a $\varphi(g') \in U$ pour tout $g' \in S(g)$ de sorte que

$$\varphi(h) = \{ \varphi(g') \mid g' \in S(h) \}$$

est une partie de U ; or, comme son cardinal est inférieur à card(G) donc au cardinal d'un élément de U, on a $\varphi(h) \in U$ (n° 1, prop. 7) ; cette contradiction montre que φ prend ses valeurs dans U.

Ceci étant, démontrons le a) du th. 2. On peut se borner à l'assertion non-respée, car l'autre en découle aussitôt. Soit $\underline{\underline{c}}$ un cardinal <u>infini</u>. Si A est un ensemble de type $\underline{\underline{c}}$ on a :

(2) $$\mathrm{card}(G(A)) \leq \underline{\underline{c}} \quad .$$

En effet, si on note A_n l'ensemble des composants d'ordre n de A , on a $\mathrm{card}(A_1) \leq \underline{\underline{c}}$ et $\mathrm{card}(A_{n+1}) \leq \underline{\underline{c}}\,.\mathrm{card}(A_n)$, d'où $\mathrm{card}(A_n) \leq \underline{\underline{c}}^n$ par récurrence ; or $\underline{\underline{c}}^n = \underline{\underline{c}}$ car $\underline{\underline{c}}$ est infini (chap. III) ; d'où $\mathrm{card}(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) \leq \mathrm{card}(\mathbb{N}).\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{c}}$ (chap. III) ; or G(A) est un ensemble de suites <u>finies</u> d'éléments de $\bigcup_n A_n$, de sorte qu'on a bien l'inégalité (2) (chap. III). Ceci étant, si E est un ensemble de cardinal $\underline{\underline{c}}$, la donnée d'une structure d'ordre sur une partie E' de E équivaut à la donnée de la partie de $E \times E$ formée des (x,y) tels que $x \in E'$, $y \in E'$ et $x \leq y$. Donc, en vertu de (2), les classes d'isomorphisme des ensembles ordonnés G(A) (où A est de type $\underline{\underline{c}}$) forment un ensemble $\mathfrak{J}_{\underline{\underline{c}}}$, et on a $\mathrm{card}(\mathfrak{J}_{\underline{\underline{c}}}) \leq \mathrm{card}(\mathfrak{P}(E \times E)) = 2^{\underline{\underline{c}}}$. Soit $\mathfrak{J}'_{\underline{\underline{c}}}$ la partie de $\mathfrak{J}_{\underline{\underline{c}}}$ formée des classes d'ensembles ordonnés noethériens ayant un plus petit élément ; si, à tout $G \in \mathfrak{J}'_{\underline{\underline{c}}}$, on fait correspondre la valeur de la fonction φ du lemme 2 au plus petit élément de G , on obtient une application θ de $\mathfrak{J}'_{\underline{\underline{c}}}$ dont l'image contient <u>tous</u> les ensembles artiniens de type $\underline{\underline{c}}$. Ces derniers forment donc bien un ensemble $A_{\underline{\underline{c}}}$, et on a $\mathrm{card}(A_{\underline{\underline{c}}}) \leq \mathrm{card}(\mathfrak{J}'_{\underline{\underline{c}}}) \leq \mathrm{card}(\mathfrak{J}_{\underline{\underline{c}}}) \leq 2^{\underline{\underline{c}}}$.

Reste à voir qu'on a card($A_{\underline{\underline{c}}}$) = $2^{\underline{\underline{c}}}$. Pour cela il suffit de voir qu'il existe un ensemble artinien B de type $\underline{\underline{c}}$ et de cardinal $\underline{\underline{c}}$, car les parties de B seront alors des éléments de $A_{\underline{\underline{c}}}$. Cette existence résulte du lemme suivant :

<u>LEMME</u> 2. <u>Pour tout cardinal</u> $\underline{\underline{c}}$, <u>il existe un ensemble artinien</u> B <u>de type</u> $\underline{\underline{c}}$ <u>et de cardinal</u> $\underline{\underline{c}}$.

On procède par induction transfinie sur $\underline{\underline{c}}$. Pour $\underline{\underline{c}} = 0$ on n'a pas le choix, et on prend $B = \emptyset$. Si $\underline{\underline{c}}$ à un prédécesseur $\underline{\underline{c}}'$, soit B' un ensemble artinien de type $\underline{\underline{c}}'$ et de cardinal $\underline{\underline{c}}'$; on a alors $\underline{\underline{c}} \leq 2^{\underline{\underline{c}}'}$, de sorte qu'il existe une partie B de $\mathcal{P}(B')$ de cardinal $\underline{\underline{c}}$; les éléments de B sont des parties de B' et ont donc des cardinaux $\leq \underline{\underline{c}}' \leq \underline{\underline{c}}$; les composants d'ordre supérieur de B sont des composants de B', et ont donc aussi des cardinaux $\leq \underline{\underline{c}}' \leq \underline{\underline{c}}$. Enfin, si $\underline{\underline{c}}$ n'a pas de prédécesseur, on choisit, pour tout cardinal $\underline{\underline{c}}_\lambda < \underline{\underline{c}}$, un ensemble artinien B_λ de type $\underline{\underline{c}}_\lambda$ et de cardinal $\underline{\underline{c}}_\lambda$; alors $B = \bigcup_\lambda B_\lambda$ répond à la question. Ceci démontre le lemme 2, et achève la démonstration de la partie a).

Passons à b). Soit $\underline{\underline{c}}$ un cardinal fortement inaccessible. On sait déjà, par a), que les ensembles artiniens de type strict $\underline{\underline{c}}$ forment un ensemble $U_{\underline{\underline{c}}}$. Le fait que $U_{\underline{\underline{c}}}$ est un univers résulte aussitôt des propriétés (AR.I) à (AR.IV) des ensembles artiniens (début du n°), et de majorations de cardinaux analogues à celles de la prop. 10 du n° 5. La relation $\sup_{x \in U_{\underline{\underline{c}}}} \operatorname{card}(x) = \underline{\underline{c}}$ résulte du lemme 2, appliqué aux cardinaux $< \underline{\underline{c}}$. Enfin, pour montrer que $\operatorname{card}(U_{\underline{\underline{c}}}) = \underline{\underline{c}}$, supposons d'abord $\underline{\underline{c}}$ <u>non dénombrable</u> ; d'après le lemme du n° 5, $U_{\underline{\underline{c}}}$ est la réunion $\bigcup_{\underline{\underline{d}} < \underline{\underline{c}}} A_{\underline{\underline{d}}}$, où $A_{\underline{\underline{d}}}$ désigne l'ensemble des ensembles artiniens de type $\underline{\underline{d}}$; or on a $\operatorname{card}(A_{\underline{\underline{d}}}) = 2^{\underline{\underline{d}}} < \underline{\underline{c}}$ (par a)) ; d'autre part l'ensemble des cardinaux $\underline{\underline{d}} < \underline{\underline{c}}$ a un cardinal $\leq \underline{\underline{c}}$ (chap. III) ; d'où $\operatorname{card}(U_{\underline{\underline{c}}}) \leq \underline{\underline{c}}.\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{c}}$, et aussi $\operatorname{card}(U_{\underline{\underline{c}}}) \geq \underline{\underline{c}}$ car $\operatorname{card}(U_{\underline{\underline{c}}}) \geq \operatorname{card}(A_{\underline{\underline{d}}}) = 2^{\underline{\underline{d}}}$ pour tout $\underline{\underline{d}} < \underline{\underline{c}}$.

Le cas $\underline{\underline{c}} = 0$ étant trivial, reste le cas où $\underline{\underline{c}}$ est le <u>cardinal infini dénombrable</u>. Dans ce cas $U_{\underline{\underline{c}}}$ est l'ensemble des ensembles artiniens de type fini (i.e. finis ainsi que tous leurs composants), et on utilise un joli résultat de nature combinatoire.

<u>LEMME</u> 3. (D. König ?). <u>Considérons deux suites infinies</u> $(E_n)_{n\geq 1}$ $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ <u>d'ensembles finis</u> E_n <u>et d'applications</u> $f_n : E_{n+1} \longrightarrow E_n$. <u>S'il n'existe aucune suite infinie</u> $(x_n)_{n\geq 1}$ <u>telle que</u> $x_n \in E_n$ <u>et que</u> $f_n(x_{n+1}) = x_n$ <u>pour tout</u> n , <u>alors</u> E_n <u>est vide pour</u> n <u>assez grand</u>.

Autrement dit, si toutes les suites (x_n) telles que $f_n(x_{n+1}) = x_n$ sont <u>finies</u>, leurs longueurs sont <u>bornées</u>. Ça peut s'exprimer en termes de limites projectives : une limite projective d'ensembles finis non vides est non vide (cf. Top. Géné., Chap. I, 2e éd. §9, n°6, prop.8, 2°)).

Raisonnons, en effet, par l'absurde. S'il existe des E_n non vides pour n arbitrairement grand, aucun E_n n'est vide (car $E_n = \emptyset$ entraîne $E_{n+1} = \emptyset$ vu l'existence de $f_n : E_{n+1} \longrightarrow E_n$). Appelons "cohérentes" les suites finies $(x_j)_{1\leq j\leq n}$ telles que $f_j(x_{j+1}) = x_j$ pour $j = 1 ,\dots, n - 1$. Démontrons, par récurrence sur n , l'existence d'une suite cohérente $(a_1 ,\dots, a_n)$ $(a_i \in E_i)$ qui, pour tout $q \geq n$, peut être prolongée en une suite cohérente $(a_1 ,\dots, a_n , x_{n+1} ,\dots, x_q$ de longueur q . C'est évident pour $n = 0$, car aucun E_q n'est vide. Passons de n à $n + 1$. Si, pour tout $x \in f_n^{-1}(\{a_n\}) \subset E_{n+1}$, toutes des suites cohérentes prolongeant $(a_1 ,\dots, a_n , x)$ avaient des longueurs bornées par un entier q(x), alors toutes les suites cohérentes prolongeant $(a_1 ,\dots, a_n)$ seraient de longueurs bornées (par $\sup_x q(x)$) car E_{n+1} est fini ; il existe donc $a_{n+1} \in f_n^{-1}(\{a_n\})$ tel que la suite cohérente $(a_1 ,\dots, a_n , a_{n+1})$ admette des prolongements de longueur arbitraire. Ceci étant on a une suite infinie $(a_n)_{n\geq 1}$ qui contredit l'hypothèse.

Il résulte du lemme 3 que si A est un ensemble artinien de type fini, alors l'ensemble ordonné G(A) de ses chaînes est fini : on prend, en effet, pour E_n l'ensemble des chaînes $(x_n \in x_{n-1} \in \dots \in x_1 \in$ à $n + 1$ termes (qui est fini car les composants de A d'ordre $\leq n + 1$ sont en nombre fini et sont tous finis), et pour f_n l'application $(x_{n+1} \in x_n \in x_{n+1} \dots) \longmapsto (x_n \in x_{n-1} \in \dots)$. Or l'ensemble des classes d'isomorphisme d'ensembles ordonnés finis est <u>dénombrable</u> : en effet, la donnée d'une structure d'ordre sur une partie finie de $\mathbb{N}$ équivaut à celle de son graphe, qui est une partie finie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; d'autre part l'ensemble des parties finies d'un ensemble dénombrable est dénombrable (chap. III). Il résulte de (*) et du lemme 1, que l'ensemble $\mathfrak{G}$ des ensembles artiniens de type fini est dénombrable. Il est infini par le lemme 2 (ou, plus simplement, par usage de la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ définie au moyen de $z_o = \emptyset$, $z_{n+1} = \{z_n\}$). Ceci termine la démonstration de b).

<u>Remarque</u>. On vient de démontrer que, si A est un ensemble artinien de type fini, il n'a qu'un nombre fini de composants. Il existe donc un entier n tel que A soit de type n .

Passons à la démonstration de c). Soient $\underline{\underline{c}}$ un cardinal infini, U un univers admettant un élément de cardinal $\underline{\underline{c}}$, et A un ensemble artinien de type $\underline{\underline{c}}$. Alors l'ensemble ordonné G(A) a un cardinal $\leq \underline{\underline{c}}$ (formule (2) ci-dessus). La seconde assertion du lemme 1, appliquée à G(A) , montre que l'application $(x_o, \dots, x_n) \rightsquigarrow x_n$ de G(A) prend ses valeurs dans U . Autrement dit tous les composants de A sont éléments de U . Ceci démontre c). La démonstration de c') est analogue : si A est un ensemble artinien de type fini, on vient de voir que G(A) est fini ; comme U est non-vide, il contient un élément équipotent à G(A) par le cor. à la prop. 7 (n° 1). C.Q.F.D.

7. Remarques métamathématiques vaseuses

a) L'axiome "tout ensemble est artinien" est inoffensif. En effet, si on a un modèle M de la Théorie des Ensembles, l'ensemble M' des éléments artiniens de M est aussi un modèle (cf. prop. 11).

b) L'axiome (A.6) des univers (et l'axiome équivalent (A'.6) des cardinaux fortement inaccessibles) est indépendant du reste de la Théorie des Ensembles. En effet soit $\underline{\underline{c}}$ le premier cardinal fortement inaccessible non dénombrable. L'univers $U_{\underline{\underline{c}}}$ des ensembles artiniens de type strict $\underline{\underline{c}}$ (th. 2, b)) est un modèle de la Théorie des Ensembles sans (A.6) : on appelle "ensembles" les éléments de $U_{\underline{\underline{c}}}$, la "relation d'appartenance" est la restriction à $U_{\underline{\underline{c}}}$ de l'ordinaire, etc. Les "univers" du modèle sont donc les univers ordinaires qui sont éléments de $U_{\underline{\underline{c}}}$. Or on a vu que les seuls univers qui sont éléments de $U_{\underline{\underline{c}}}$ sont les deux pequeños $U_o = \emptyset$ et U_1 . Ainsi U_1 est un "ensemble" qui n'est élément d'aucun "univers". On a donc un modèle de la Théorie des Ensembles où (A.6) est faux.

c) Bourbaki a été trop prudent en se contentant de "présumer" que l'axiome de l'infini (A.5) est indépendant des axiomes et schémas précédents. Il l'est effectivement, car l'univers dénombrable U_1 des ensembles artiniens de type fini est un modèle où (A.5) est faux, et où les axiomes et schémas précédents sont vrais.

d) Il serait très intéressant de démontrer que l'axiome (A.6) des univers est inoffensif. Ça paraît difficile et c'est même indémontrable, dit Paul Cohen.

L'adjectif "vaseuses" dans le titre veut dire qu'on ne s'est pas donné la peine, en construisant des modèles, de canuler le symbole τ de sorte qu'il n'en fasse pas sortir. La clef de ça, si on considère un modèle M, est de remplacer le $\tau_x(\underline{R}(x))$ ordinaire par :

$$\tau_x(\underline{R}(x) \text{ et } x \in M) \quad .$$

Encore faut-il vérifier que ça transforme bien les quantificateurs ordinaires en les quantificateurs autrefois dits "typiques" :

$$(\forall x \in M) \quad \text{et} \quad (\exists x \in M) \quad .$$

Exercices

1) Soit n un entier ≥ 1 . Montrer que l'ensemble des ensembles artiniens de type n est infini (les ensembles $z_o = \emptyset$, $z_1 = \{\emptyset\}$, $z_{q+1} = \{z_q\}$ sont de type 1).

2) Appelons hauteur d'un ensemble A la borne supérieure (finie ou infinie) des entiers n tels qu'il existe une suite $x_n \in x_{n-1} \in \ldots \in x_o =$. Montrer que les ensembles de hauteur $\leq$ n sont finis et forment un ensemble fini, dont le cardinal p_n se calcule au moyen de $p_o = 1$, $p_{n+1} = 2^{p_n}$ (procéder par récurrence sur n, en notant que les éléments d'un ensemble A de hauteur $\leq$ n sont des ensembles de hauteur $\leq$ n - 1).

3) Soit G un ensemble ordonné noethérien admettant un plus petit élément g_o et tel que pour tout $h \in G$, l'ensemble de $g \leq h$ sont fini et totalement ordonné.

a) Montrer que tout élément $h \neq g_o$ de G admet un prédécesseur et un seul.

b) Soit φ l'application de G définie dans le lemme 1 (i.e. $\varphi(g)$ est l'ensemble des $\varphi(g')$ où g' parcourt l'ensemble des successeurs de g) . On pose $A = \varphi(g_o)$. Montrer que A est un ensemble artinien. Pour $g \in G$, soit $g_o < g_1 < \ldots < g_n = g$ la suite des éléments $\leq g$; posons $f(g) = (\varphi(g_o),\varphi(g_1),\ldots,\varphi(g_n))$; montrer que f est une application croiss et surjective de G sur l'ensemble ordonné $G(A)$ du texte. Montrer que, si f est <u>injective</u>, c'est un <u>isomorphisme</u> de G sur $G(A)$.

c) Pour $g \in G$, soit M_g l'ensemble des majorants de g . On suppose que, pour tout couple d'éléments distincts g , g' ayant même prédécesseur p, les ensembles ordonnés M_g et $M_{g'}$ sont non isomorphes. Montrer que l'application f de b) est alors un <u>isomorphisme</u> de G sur $G(A)$.
[Si $f(g) = f(g')$ avec $g \neq g'$ et si $g_o < g_1 < \ldots < g_n = g$ et $g'_o < g'_1 < \ldots < g'_{n'} = g'$ sont la suite des éléments $\leq g$ et celles des éléments $\leq g'$, montrer que $n = n'$, et qu'on peut supposer que g et g' ont le même prédécesseur p ; considérer alors l'ensemble des $p \in G$ tels qu'il existe deux successeurs distincts g, g' de p tels que $f(g) = f(g')$, un élément maximal q de cet ensemble, et deux successeurs distincts h , h' de q tels que $f(h) = f(h')$; noter que les restrictions de f à M_h et à $M_{h'}$ sont injectives, donc (par b)) sont des isomorphismes de M_h sur $G(\varphi(h))$ et de $M_{h'}$ sur $G(\varphi(h'))$; déduire de l'hypothèse de non-isomorphis de M_h et $M_{h'}$ qu'on a $\varphi(h) \neq \varphi(h')$, ce qui contredit $f(h) = f(h')$].

N.B. L'exercice 3) donne des renseignements très précis sur la manière dont sont "fabriqués" les ensembles artiniens. On savait déjà qu'un tel ensemble A est déterminé par la classe d'isomorphisme de l'ensemble ordonné G(A) (lemme 1). On sait maintenant caractériser les ensembles ordonnés G isomorphes à des G(A) :

α) G est noethérien et admet un plus petit élément ;

β) Pour tout $g \in G$, l'ensemble des $h \leq g$ est totalement ordonné et fini(d'où l'existence et l'unicité du prédécesseur de g) ;

γ) Si g , g' sont des éléments distincts ayant même prédécesseur, l'ensemble M_g des majorants de g et celui $M_{g'}$ des majorants de g ne sont pas isomorphes.

4) Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ la suite des ordinaux finis, définie par $A_o = \emptyset$, $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$. Montrer que l'ensemble ordonné $G(A_n)$ a 2^n éléments, et que le nombre de ses éléments de hauteur q (au sens de l'exerc. 2)) est $\binom{n}{q}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. MITCHELL, Theory of categories, Academie Press (1965).

S G A 4

E X P O S E II

TOPOLOGIES ET FAISCEAUX

par J.L. Verdier

Après la définition des topologies et prétopologies (n° 1) et des faisceaux d'ensembles (n° 2), on aborde dans le n° 3 le théorème central de cet exposé (3.4) : l'existence du faisceau associé à un préfaisceau. Afin de couvrir tous les cas rencontrés dans la pratique, l'existence de ce foncteur est démontrée pour les préfaisceaux sur un U-site (3.0.2). Les n° 4 et n° 5 tirent les conséquences de ce théorème sur le comportement des limites inductives et projectives dans les catégories de faisceaux. Au n° 6 on définit et étudie les faisceaux à valeurs dans des catégories quelconques, pour porter tout de suite l'attention sur les faisceaux d'anneaux, de groupes, de modules etc... .

1. Topologies, familles couvrantes, prétopologies

Définition 1.1. Une topologie sur une catégorie C est la donnée, pour tout objet X de C, d'un ensemble J(X) de cribles de X, cette donnée étant soumise aux axiomes suivants :

T 1) (Stabilité par changement de base). Pour tout objet X de C, tout crible $R \in J(X)$, tout morphisme $f : Y \longrightarrow X$ ($Y \in ob(C)$), le crible $R \times_X Y$ de Y appartient à J(Y).

T 2) (Caractère local). Si R et R' sont deux cribles de X, si $R \in J(X)$, et si pour tout $Y \in ob(C)$ et tout morphisme $Y \longrightarrow R$ le crible $R' \times_X Y$

appartient à $J(Y)$, alors R' appartient à $J(X)$.

T 3) Pour tout objet X de C, X appartient à $J(X)$.

1.1.1. Les cribles appartenant à $J(X)$ seront appelés les cribles couvra[nts]
X, ou encore les raffinements de X. Des axiomes (T1), (T2), (T3), on déduit immédiatement que l'ensemble des cribles couvrant X est stable par intersections finies, et que tout crible contenant un crible couvrant est un crible couvrant. L'ensemble $J(X)$, ordonné par inclusion, est donc cofiltrant (I 8).

1.1.2. Soient C une catégorie, T et T' deux topologies sur C. La topologie T est dite plus fine que la topologie T' si pour tout objet X de C tout raffinement de X pour la topologie T' est un raffinement de X pour la topologie T. On définit, de cette façon, une structure d'ordre sur l'ensemble des topologies.

1.1.3. Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille de topologies sur C. Les ensembles, pour tout objet X de C, des cribles de X qui sont couvrants pour toutes les topologies T_i, vérifient les axiomes (T 1), (T 2) et (T 3) et définissent donc une topologie : la topologie intersection des T_i, i.e. la borne inférieure des T_i. C'est la plus fine des topologies qui soit moins fine que toutes les topologies T_i. La famille $(T_i)_{i \in I}$ admet par suite une borne supérieure : la topologie intersection des topologies plus fines que chacune des T_i.

1.1.4. En particulier la donnée J(X) = l'ensemble de tous les cribles de X, est une topologie plus fine que toute topologie sur C, que nous appellerons topologie discrète.

Il existe une topologie moins fine que toute topologie sur C ; la topologie pour laquelle $J(X) = \{X\}$ pour tout X de C. Cette topologie est appelée la topologie grossière ou chaotique.

1.1.5. Une catégorie C munie d'une topologie est appelée un site. La catégorie C est appelée la catégorie sous-jacente au site.

Définition 1.2. Soient C un site, X un objet de C. Une famille de morphismes $(f_\alpha : X_\alpha \longrightarrow X)$, $\alpha \in A$, est dite couvrante si le crible engendré par la famille f_α (I 4.3.3) est un crible couvrant X.

1.1.6. Soit C une catégorie. Donnons-nous pour chaque objet X de C, un ensemble de familles de morphismes de but X. Il existe alors une topologie T qui est la moins fine des topologies pour lesquelles les familles données soient couvrantes, à savoir l'intersection (1.1.3) de toutes les topologies en question. On appelle cette topologie la topologie engendrée par les ensembles de familles de morphismes donnés. Il est malaisé de décrire, en général, tous les cribles couvrants de cette topologie. Cependant la situation est plus agréable dans le cas suivant :

Définition 1.3. Soit C une catégorie. Une prétopologie sur C est la donnée, pour chaque objet X de C, d'un ensemble Cov(X) de familles de morphismes de but X, cette donnée étant soumise aux axiomes suivants :

PT 0) Pour tout objet X de **C**, les morphismes des familles de morphismes de Cov(X) sont quarrables. (Rappelons qu'un morphisme $Y \longrightarrow X$ est dit quarrable si pour tout morphisme $Z \longrightarrow X$ le produit fibré $Z \times_X Y$ est représentable).

PT 1) Pour tout objet X de C, toute famille $(X_\alpha \longrightarrow X)_{\alpha \in A}$ appartenant à Cov(X), et tout morphisme $Y \longrightarrow X$ ($Y \in \mathrm{ob}(C)$), la famille :
$(X_\alpha \times_X Y \longrightarrow Y)_{\alpha \in A}$ appartient à Cov(Y). (Stabilité par changement de base)

PT 2) Si $(X_\alpha \longrightarrow X)_{\alpha \in A}$ appartient à Cov(X) et si pour chaque $\alpha \in A$, $(X_{\beta_\alpha} \longrightarrow X_\alpha)_{\beta_\alpha \in B_\alpha}$ appartient à $\mathrm{Cov}(X_\alpha)$, alors la famille $(X_\gamma \longrightarrow X)_{\gamma \in \coprod_{\alpha \in A} B_\alpha}$ (où pour tout $\gamma = (\alpha, \beta_\alpha)$, $\alpha \in A$, $\beta_\alpha \in B_\alpha$, le morphisme $X_\gamma \longrightarrow X$ est le morphisme composé : $X_\gamma = X_{\beta_\alpha} \longrightarrow X_\alpha \longrightarrow X$) appartient à Cov(X). (Stabilité par composition).

PT 3) La famille : $X \xrightarrow{id_X} X$ appartient à Cov(X).

1.3.1. La définition de 1.1.6 nous permet de considérer, pour une prétopologie donnée sur C, la topologie sur C engendrée par cette prétopologie. Notons que si **C** est une catégorie où les produits fibrés sont représentables, alors toute topologie T de C peut être définie par une prétopologie, savoir celle pour laquelle Cov(X) est formé de toutes les familles couvrant X pour la topologie T.

Proposition 1.4. Soient **C** une catégorie, E une prétopologie sur C, T la topologie définie par la prétopologie E (1.1.6), X un objet de C. Désignons par $J_E(X)$ l'ensemble des cribles de X engendrés par les familles de la prétopologie, et par $J_T(X)$ l'ensemble des raffinements de X pour la topologie T. Alors $J_E(X)$ est cofinal dans $J_T(X)$. En d'autres termes, pour qu'un crible R de X appartienne à $J_T(X)$, il faut et il suffit qu'il existe un crible $R' \in J_E(X)$ tel que $R' \subset R$.

Preuve. Soit, pour tout objet X de C, $J'(X)$ l'ensemble des cribles de X qui contiennent un crible de $J_E(X)$. On a évidemment $J'(X) \subset J_T(X)$. Pour montrer que $J'(X) = J_T(X)$, il suffit de montrer que la donnée des $J'(X)$ définit une topologie sur C. Or les $J'(X)$ vérifient évidemment les axiomes (T 1) et (T 3). Il reste donc à vérifier (T 2). Pour cela il suffit de démontrer que si R' est un sous-crible de $R \in J_E(X)$ tel que pour tout $Y \longrightarrow R$, le crible $R' \times_X Y$ de Y appartienne à $J'(X)$, le crible R' appartient à $J'(X)$. Or le crible R est engendré par une famille $(X_\alpha \longrightarrow X)$ appartenant à $Cov(X)$, et pour tout α le crible $R' \times_X X_\alpha$ contient un crible engendré par une famille $(X_{\beta_\alpha} \longrightarrow X_\alpha)$ appartenant à $Cov(X_\alpha)$. On en déduit que le crible R' contient un crible engendré par la famille $(X_{\beta_\alpha} \longrightarrow X)$. Donc, d'après l'axiome (PT 2), R' contient un crible de $J_E(X)$ et par suite appartient à $J'(X)$, cqfd.

2. Faisceaux d'ensembles

Définition 2.1. Soit C un site dont la catégorie sous-jacente est une U-catégorie. Un préfaisceau F à valeurs dans U-Ens est dit séparé (resp. est un faisceau) si pour tout crible R couvrant X, objet de C, l'application :

$$\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(X,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R,F)$$

est une injection (resp. une bijection). La sous-catégorie pleine de $C^\wedge$

dont les objets sont les faisceaux est appelée la catégories des faisceaux d'ensembles sur C, et est notée le plus souvent $\widetilde{C}$ (1). Lorsqu'aucune ambiguïté n'en résultera, nous dirons simplement catégorie des faisceaux sur C; en revanche nous préciserons quelquefois en disant catégorie des faisceaux à valeur dans U-Ens ou encore catégorie des U-faisceaux.

Proposition 2.2. Soient C une U-catégorie, $\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$ une famille de U-préfaisceaux sur C. Désignons, pour chaque objet X de C, par $J_{\mathcal{F}}(X)$ l'ensemble des cribles $R \longrightarrow X$ tels que pour tout morphisme $Y \longrightarrow X$ de C de but X, le crible $R \times_X Y$ possède la propriété suivante : l'application

$$\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(Y,F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R \times_X Y, F_i)$$

est bijective (resp. injective) pour tout $i \in I$. Alors les ensembles $J_{\mathcal{F}}(X)$ définissent une topologie sur C, qui est la plus fine des topologies pour laquelle chacun des F_i soit un faisceau (resp. un préfaisceau séparé).

Preuve. Les $J_{\mathcal{F}}(X)$ vérifient évidemment des axiomes (T 1) et (T 3). Il reste à montrer qu'ils vérifient (T 2). Pour cela il suffit de montrer que :
1) Si $R' \hookrightarrow R \hookrightarrow X$ sont deux cribles de X, tels que $R \in J_{\mathcal{F}}(X)$ et tels que pour tout $Y \longrightarrow R$ (où Y est un objet de C) le crible $R' \times_X Y$ appartienne à $J_{\mathcal{F}}(Y)$, alors le crible R' appartient à $J_{\mathcal{F}}(X)$.
2) Si $R' \hookrightarrow R \hookrightarrow X$ sont deux cribles de X tels que $R' \in J_{\mathcal{F}}(X)$, alors le crible R appartient à $J_{\mathcal{F}}(X)$.

Notons que, dans le cas 2), pour tout $Y \longrightarrow R$ (où Y est un objet de C) le crible $R' \times_X Y$ appartient à $J_{\mathcal{F}}(Y)$. Or, dans les cas 1) et 2), R est limite inductive des Y, objets de C, au-dessus de R (I 3.4).

(1) ou $C^\sim$, suivant l'humeur de la machine à écrire.

Les limites inductives dans $C^\wedge$ sont universelles (I 3.3). Par suite dans les cas 1) et 2), R' est limite inductive des $R' \times_X Y$. Or, dans les cas 1) et (2), $R' \times_X Y$ appartient à $J_{\mathcal{F}}(Y)$. On en déduit, en passant à la limite inductive sur les objets Y de C au-dessus de R, que l'application

$$\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R,F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R',F_i)$$

est une bijection (resp. une injection) pour tout $i \in I$. Par suite les applications

$$\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(X,F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R',F_i) \text{ et } \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(X,F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R,F_i)$$

sont, dans les cas 1) et 2), des bijections (resp. des injections). De plus, les hypothèses 1) et 2) sont visiblement stables par changement de base quelconque $Y \longrightarrow X$ (Y objet de C). On en déduit alors que pour tout objet Y de C au-dessus de X et tout $i \in I$, les applications

$$\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(Y,F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R \underset{X}{\times} Y,F_i)$$

$$\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(Y,F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R' \underset{X}{\times} Y,F_i)$$

sont dans les deux cas des bijections (resp. des injections) ; ce qui montre que R' et R appartiennent à $J_{\mathcal{F}}(X)$, cqfd.

Corollaire 2.3. *Soient* C *une* U-*catégorie*, *et pour tout* X *de* C *un ensemble* $K(X)$ *de cribles de* X. *On suppose que les* $K(X)$ *vérifient l'axiome* (T 1) *de* (1.1). *Pour qu'un préfaisceau* F *soit un faisceau* (*resp. un préfaisceau séparé*) *pour la topologie engendrée* (1.1.6) *par les* $K(X)$, *il faut et il suffit que pour tout objet* X *de* C *et tout crible* $R \in K(X)$, *l'application*

$$\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(X,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R,F)$$

soit une bijection (*resp. une injection*).

Corollaire 2.4. En particulier, soit C une U-catégorie munie d'une prétopologie. Pour qu'un préfaisceau F soit un faisceau (resp. un préfaisceau séparé), il faut et il suffit que pour tout objet X de C et pour toute famille $(X_\alpha \longrightarrow X)$ appartenant à Cov(X), le diagramme d'ensembles

$$F(X) \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} F(X_\alpha) \rightrightarrows \prod_{(\alpha,\beta)\in A \times A} F(X_\alpha \times_X X_\beta)$$

soit exact (resp. l'application

$$F(X) \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} F(X_\alpha)$$

soit injective).

Preuve. On applique 2.3, puis (I 3.5) et (I 2.12).

On retrouve avec le corollaire 2.4 la définition donnée dans [1].

Définition 2.5. Soit C une U-catégorie. On appelle topologie canonique de C la topologie la plus fine pour laquelle les foncteurs représentables soient des faisceaux (2.2). Un crible couvrant X pour la topologie canonique sera appelé crible épimorphique strict universel. Une famille couvrante pour la topologie canonique sera appelée famille épimorphique stricte universelle. Lorsque de plus les morphismes de la famille couvrante sont quarrables, la famille sera dite épimorphique effective universelle [2].

Remarque 2.5.1. Pour presque tous les sites qu'on a eu à utiliser jusqu'à présent, la topologie est moins fine que la topologie canonique, en d'autres termes, les foncteurs représentables sur C sont des faisceaux, i.e. les familles couvrantes de C sont épimorphiques strictes universelles.

La seule exception à cette règle est le site $\hat{C}$ étudié au n° 5 (dont la topologie est plus fine, et le plus souvent strictement plus fine, que la topologie canonique).

Proposition 2.6. Pour qu'un crible $R \hookrightarrow X$ soit épimorphique strict universel, il faut et il suffit que pour tout objet $Y \longrightarrow X$ de C au-dessus de X, et pour tout objet Z de C, l'application :

$$\mathrm{Hom}_C(Y,Z) \longrightarrow \varprojlim_{C/(Y \times_X R)} \mathrm{Hom}_C(\cdot,Z)$$

soit une bijection.

Preuve. Immédiat en appliquant 2.2 puis (I 5.3).

Remarques 2.7. 1) La proposition 2.6 donne une caractérisation des cribles épimorphiques stricts universels d'une catégorie C, indépendante de l'univers dans lequel les préfaisceaux prennent leurs valeurs, à la seule condition que les ensembles de morphismes $\mathrm{Hom}(X,Y)$ de C appartiennent à cet univers. Elle permet ainsi de définir la topologie canonique pour toute catégorie C, sans qu'il soit pour cela nécessaire de préciser les univers.

2) Soient **C** un site dont la catégorie sous-jacente soit une $\underline{U}$-catégorie, F un $\underline{U}$-préfaisceau et $\underline{V}$ un univers contenant $\underline{U}$. La catégorie sous-jacente à C est une $\underline{V}$-catégorie, et F peut être considéré comme un $\underline{V}$-préfaisceau. Le $\underline{U}$-préfaisceau F est un faisceau (resp. un préfaisceau séparé) si et seulement si le $\underline{V}$-préfaisceau F est un faisceau (resp. un préfaisceau séparé). En d'autres termes, la condition pour un préfaisceau F d'être un faisceau (resp. un préfaisceau séparé) ne dépend pas (au sens qu'on

vient de préciser) de l'univers dans lequel le préfaisceau F prend ses valeurs. En particulier soient C un site et F un U-préfaisceau ; on dit que F est un faisceau (resp. un préfaisceau séparé) s'il existe un univers V contenant U tel que la catégorie C soit une V-catégorie et tel que F soit un V-faisceau (resp. un V-préfaisceau séparé). Cette propriété ne dépend pas dépend pas de l'univers V.

3. Faisceau associé à un préfaisceau

Définition 3.0.1. Soit C un site. On appelle famille topologiquement génératrice (où lorsqu'aucune confusion n'en résulte, famille génératrice) de C, un ensemble G d'objets de C tel que tout objet de C soit but d'une famille couvrante de morphismes de C (1.2) dont les sources sont des éléments de G.

Définition 3.0.2. Soit U un univers. On appelle U-site un site C dont la catégorie sous-jacente est une U-catégorie (I 1.1), qui possède une petite famille topologiquement génératrice. Soit C une U-catégorie; on appelle U-topologie sur C une topologie sur C faisant de C un U-site. On dit qu'un site C est U-petit, ou par abus de langage, petit, si la catégorie sous-jacente à C est petite (I 1.0).

3.0.3. Il résulte immédiatement des définitions que toute topologie plus fine qu'une U-topologie est une U-topologie, et qu'un petit site est un U-site.

<u>Proposition</u> 3.0.4. <u>Soient</u> C <u>un</u> <u>U-site</u>, G <u>une petite famille topologiquement génératrice de</u> C. <u>Pour tout</u> $X \in \mathrm{ob}\, C$, <u>désignons par</u> $J_G(X)$ <u>l'ensemble des cribles couvrant</u> X <u>engendrés par une famille de morphismes</u> $(Y_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} X)$, $\alpha \in A$, <u>où</u> $Y_\alpha \in G$.

1) <u>L'ensemble</u> $J_G(X)$ <u>est petit</u>.

2) <u>L'ensemble</u> $J_G(X)$ <u>est cofinal dans l'ensemble</u> $J(X)$ <u>de tous les cribles couvrant</u> X, <u>ordonné par inclusion</u>.

3) <u>Pour tout</u> $R \in J_G(X)$, <u>il existe une petite famille épimorphique</u> (I 10.2) $(u_\alpha : Y \longrightarrow R)$, $\alpha \in A$, <u>avec</u> $Y \in G$.

<u>Preuve</u>. 1) Posons $A(X) = \coprod_{Y \in G} \mathrm{Hom}(Y,X)$. L'ensemble $A(X)$ est petit (I 0) et $\mathrm{card}(J_G(X)) \leq 2^{\mathrm{card}(A(X))}$. Par suite $J_G(X)$ est petit.

2) Soit $R \in J(X)$. Posons $A(R) = \coprod_{Y \in G} \mathrm{Hom}(Y,R)$ et soit R' le crible de X engendré par la famille $(Y \xrightarrow{u} R \hookrightarrow X)$, $u \in A(R)$. On a $R' \subset R$ et il suffit de montrer que R' est couvrant. D'après l'axiome (T2) de 1.1 , il suffit de montrer que pour tout morphisme $Z \longrightarrow R$, $Z \in \mathrm{ob}\, C$, le crible $R' \times_X Z$ de Z est couvrant. Or le crible $R' \times_X Z$ contient le crible engendré par la famille de tous les morphismes $Y \longrightarrow Z$ avec $Y \in G$, famille qui est, par hypothèse, couvrante. Le crible $R' \times_X Z$ de Z est donc couvrant (axiome T2 de 1.1).

3) Soit $R \in J_G(X)$. La famille $(Y \xrightarrow{u} R)$, $u \in A(R) = \coprod_{Y \in G} \mathrm{Hom}(Y,R)$ est, par hypothèse, épimorphique. Or, pour tout $Y \in \mathrm{ob}\, C$, $\mathrm{Hom}(Y,R)$ est contenu dans $\mathrm{Hom}(Y,X)$ qui est petit. Par suite $A(R)$ est petit.

3.0.5. Soient C un <u>U</u>-site, <u>V</u> un univers tel que $C \in \underline{V}$ et $\underline{U} \subset \underline{V}$, G une <u>U</u>-petite famille topologiquement génératrice de C. La catégorie $C^\wedge$ des préfaisceaux de <u>U</u>-ensembles sur C est une <u>V</u>-catégorie (I 1.1.1). Soit

X un objet de C. L'ensemble $J(X)$ des cribles couvrant X est $\underline{V}$-petit et, ordonné par inclusion, il est cofiltrant (1.1.1). Pour tout $\underline{U}$-préfaisceau F, la limite inductive $\varinjlim_{J(X)} \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R,F)$ est donc représentable par un élément de V (I 2.4.1). De plus, il résulte de (3.0.4 3)) que, pour tout $R \in J_G(X)$, $\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R,F)$ est $\underline{U}$-petit, et comme $J_G(X)$ est un $\underline{U}$-petit ensemble cofinal dans $J(X)$ (loc. cit.), il résulte de (I 2.4.2) que $\varinjlim_{J(X)} \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R,F)$ est $\underline{U}$-petit. Choisissons alors, pour tout F et pour tout X, un élément de $\underline{U}$ qui représente cette limite inductive et posons

$$LF(X) = \varinjlim_{J(X)} \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(\,.\,,F)$$

Soit $g : Y \longrightarrow X$ un morphisme de C. Le foncteur changement de base $g^* : J(X) \longrightarrow J(Y)$ définit une application :

$$LF(g) : LF(X) \longrightarrow LF(Y)$$

qui fait de $X \longmapsto LF(X)$ un préfaisceau sur C.

Le morphisme $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ étant un élément de $J(X)$ on a, pour tout objet X de C, une application :

$$\ell(F)(X) : F(X) \longrightarrow LF(X),$$

définissant visiblement un morphisme de foncteurs :

$$\ell(F) : F \longrightarrow LF \quad .$$

Il est clair de plus que $F \longmapsto LF$ est un foncteur en F et que les morphismes $\ell(F)$ définissent un morphisme

$$\ell : \mathrm{Id} \longrightarrow L \quad .$$

Enfin soit $R \hookrightarrow X$ un raffinement de X. La définition de $LF(X)$ et (I 1.4) nous fournissent une application :

$$z_R : \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(X,LF) \,,$$

et pour tout morphisme de C , $Y \xrightarrow{g} X$, la définition du foncteur LF nous montre que le diagramme ci-après, est commutatif :

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} Z_R : & \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R,F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(X,LF) \arrow[d] \\ Z_{R\times_X Y}: & \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R \times_X Y,F) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(Y,LF) \end{tikzcd}$$

(les flèches verticales sont les flèches évidentes).

Copions alors [2].

Lemme 3.1.

1) Pour tout raffinement $i_R : R \hookrightarrow X$ et tout $u : R \to F$, le diagramme :

$$(**)\qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "\ell(F)"] & LF \\ R \arrow[u, "u"] \arrow[r, hook, "i_R"'] & X \arrow[u, "Z_R(u)"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif.

2) Pour tout morphisme $v : X \to LF$, il existe un raffinement R de X et un morphisme $u : R \to F$ tel que $Z_R(u) = v$.

3) Soient Y un objet de C et $u,v : Y \rightrightarrows F$ deux morphismes tels que $\ell(F)\circ u = \ell(F)\circ v$. Alors le noyau du couple (u,v) est un raffinement de Y.

4) Soient R et R' deux raffinements de X, $u : R \to F$ et $u' : R' \to F$ deux morphismes. Pour que $Z_R(u) = Z_{R'}(u')$, il faut et il suffit que u et u' coïncident sur un raffinement $R'' \hookrightarrow R \times_X R'$.

Preuve. La seule assertion non triviale est l'assertion 1). Il faut montrer que $Z_R(u)\circ i_R = \ell(F)\circ u$. Pour cela il suffit de montrer (I 3.4) que les composés de ces morphismes avec tout morphisme $Y \xrightarrow{g} R$ (Y objet de C) sont égaux. Or, considérons $f = i_R \circ g$ et le produit fibré $R \times_X Y$:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\ell(F)"] & LF \\
R \arrow[u, "u"] \arrow[r, hook, "i_R"'] & X \arrow[u, "Z_R(u)"'] \\
R \underset{X}{\times} Y \arrow[u, "g'"] \arrow[r, "\sim", "i'"'] & Y \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "g"]
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme ci-dessus, i' est un monomorphisme qui admet une section. Par suite (1.3.3) i' est un isomorphisme. Or par définition du morphisme $\ell(F)$, le morphisme $Z_{R\times_X Y}(u\circ g')$ est égal à $\ell(F)\circ u\circ g$.

D'autre part la commutativité du diagramme (*) nous fournit l'égalité $Z_{R\times_X Y}(u\circ g') = Z_R(u)\circ f$, et par suite on a bien l'égalité $\ell(F)\circ u\circ g = Z_R(u)\circ i_R\circ g$.

Proposition 3.2.

1) Le foncteur L est exact à gauche (I 2.3.2).

2) Pour tout préfaisceau F, LF est un préfaisceau séparé .

3) Le préfaisceau F est séparé si et seulement si le morphisme $\ell(F) : F \longrightarrow LF$ est un monomorphisme. Le préfaisceau LF est alors un faisceau.

4) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\ell(F) : F \longrightarrow LF$ est un isomorphisme.

ii) F est un faisceau.

Preuve

1) Il suffit de montrer (I 3.1) que pour tout objet X de C, le foncteur $F \longmapsto LF(X)$ commute aux limites projectives finies. Or par définition de

la limite projective, le foncteur

$$F \longmapsto \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R,F) \qquad R \hookrightarrow X \in ob(J(X))$$

commute aux limites projectives, et la limite inductive $\varinjlim_{J(X)}$ commute aux limites projectives finies car $J(X)$ est un ensemble cofiltrant (I 2.7).

2) soient X un objet de C et $f,g : X \rightrightarrows LF$ deux morphismes qui coïncident sur un raffinement $R \hookrightarrow X$ de X. En vertu de 3.1 2), il existe un crible couvrant $R' \hookrightarrow X$, qu'on peut toujours supposer contenu dans R, et deux morphismes $u,v : R' \rightrightarrows F$ tels que $Z_{R'}(u) = f$ et $Z_{R'}(v) = g$. En vertu de 3.1 1) on a alors $\ell(F)\circ u = \ell(F)\circ v$. Par suite (3.1 4)) u et v coïncident sur un raffinement $R'' \hookrightarrow R'$. Soit w la restriction de u à R''. On a $Z_{R''}(w) = Z_{R'}(u) = Z_{R'}(v)$ et par suite $f = g$. Le préfaisceau LF est donc séparé.

3) Si F est séparé, le morphisme $\ell(F)$ est un monomorphisme car une limite inductive filtrante de monomorphismes est un monomorphisme. Si $\ell(F)$ est un monomorphisme, le préfaisceau F est un sous-préfaisceau d'un préfaisceau séparé, donc il est séparé. Montrons que LF est alors un faisceau. Soient $i : R \hookrightarrow X$ un crible couvrant un objet X de C, et $u : R \longrightarrow LF$ un morphisme. Il nous suffit de montrer que u se factorise par X. Posons $R' = F \times_{LF} R$ et $v = Z_{R'}(pr_1)$:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\ell(F)"] & LF & \\
R' \arrow[u, "pr_1"] \arrow[r, "pr_2"] & R \arrow[u, "u"'] \arrow[r, "i"] & X \arrow[ul, "v"'] \\
R'' \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_2"] & Y \arrow[u, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

Pour montrer que $u = v \circ i$, il suffit de montrer (I 3.4) que pour tout morphisme $m : Y \longrightarrow R$ (Y objet de C), $v \circ i \circ m = u \circ m$. Posons $R'' = Y \times_R R'$ et soient p_1 et p_2 les projections. La projection $R'' \xhookrightarrow{p_2} Y$ est un monomorphisme et fait de R'' un crible couvrant Y (3.1.2)). On a $v \circ i \circ pr_2 = \ell(F) \circ pr_1$ (3.1 1)), et par suite $v \circ i \circ pr_2 = u \circ pr_2$. On en déduit $v \circ i \circ pr_2 \circ p_1 = u \circ pr_2 \circ p_1$ i.e. $v \circ i \circ m \circ p_2 = u \circ m \circ p_2$. Comme le préfaisceau LF est séparé, on a $v \circ i \circ m = u \circ m$, cqfd.

4) Clair.

Remarque 3.3. Soit $J'(X)$ un sous-ensemble cofinal de $J(X)$. On a

$$LF(X) = \varinjlim_{J'(X)} \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(\,.\,,F) \quad .$$

En particulier, si la topologie de C est définie par une prétopologie $X \longmapsto \mathrm{Cov}(X)$ (1.1.3), le foncteur L peut se décrire à l'aide des familles couvrantes de $\mathrm{Cov}(X)$ (I 2.12 et I 3.5). En explicitant les formules on retrouve la construction de [

Théorème 3.4. *Soit C un U-site. Le foncteur d'inclusion $i : C^\sim \hookrightarrow C^\wedge$ des faisceaux dans les préfaisceaux admet un adjoint à gauche $\underline{a}$*, exact à gauche (I 2.3.2) :

$$\widetilde{C} \underset{i}{\overset{\underline{a}}{\leftrightarrows}} C^\wedge \quad .$$

Le foncteur $i \circ \underline{a}$ est canoniquement isomorphe au foncteur $L \circ L$ (cf. *Pour tout préfaisceau F le morphisme d'adjonction $F \longrightarrow i \circ \underline{a}(F)$ se déduit par l'isomorphisme précédent du morphisme* $\ell(LF) \circ \ell(F) : F \longrightarrow L \circ L(F)$.

Pour montrer que $u = v\circ i$, il suffit de montrer (I 3.4) que pour tout morphisme $m : Y \longrightarrow R$ (Y objet de C), $v\circ i\circ m = u\circ m$. Posons $R'' = Y \times_R R'$ et soient p_1 et p_2 les projections. La projection $R'' \xhookrightarrow{p_2} Y$ est un monomorphisme et fait de R'' un crible couvrant Y (3.1.2)). On a $v\circ i\circ pr_2 = \ell(F)\circ pr_1$ (3.1 1)), et par suite $v\circ i\circ pr_2 = u\circ pr_2$. On en déduit $v\circ i\circ pr_2\circ p_1 = u\circ pr_2\circ p_1$ i.e. $v\circ i\circ m\circ p_2 = u\circ m\circ p_2$. Comme le préfaisceau LF est séparé, on a $v\circ i\circ m = u\circ m$, cqfd.

4) Clair.

<u>Remarque</u> 3.3. Soit J'(X) un sous-ensemble cofinal de J(X). On a

$$LF(X) = \varinjlim_{J'(X)} \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(\ .\ ,F) \quad .$$

En particulier, si la topologie de C est définie par une prétopologie $X \longmapsto \mathrm{Cov}(X)$ (1.1.3), le foncteur L peut se décrire à l'aide des familles couvrantes de Cov(X) (I 2.12 et I 3.5). En explicitant les formules on retrouve la construction de [

<u>Théorème</u> 3.4. <u>Soit</u> C <u>un</u> <u>U-site</u>. <u>Le foncteur d'inclusion</u> $i : C^\sim \hookrightarrow C^\wedge$ <u>des faisceaux dans les préfaisceaux admet un adjoint à gauche</u> <u>a</u>, exact à gauche (I 2.3.2) :

$$\tilde{C} \underset{i}{\overset{a}{\rightleftarrows}} C^\wedge \quad .$$

<u>Le foncteur</u> $i\circ \underline{a}$ <u>est canoniquement isomorphe au foncteur</u> $L\circ L$ (cf. 3.05
<u>Pour tout préfaisceau</u> F <u>le morphisme d'adjonction</u> $F \longrightarrow i\circ \underline{a}(F)$ <u>se déduit par l'isomorphisme précédent du morphisme</u> $\ell(LF)\circ\ell(F) : F \longrightarrow L\circ L(F)$.

Définition 3.5. *Le faisceau* $\underline{a}F$ *est appelé le* faisceau associé au préfaisceau F.

Le théorème 3.4 résulte immédiatement de la proposition 3.2.

Proposition 3.6. *Soient* C *un* $\underline{U}$*-site et* $\underline{V} \supset \underline{U}$ *un univers. Notons* $C^{\wedge}_{\underline{U}}$ et $C^{\sim}_{\underline{U}}$ (*resp.* $C^{\wedge}_{\underline{V}}$ *et* $C^{\sim}_{\underline{V}}$) *les catégories de* $\underline{U}$*-préfaisceaux et de* $\underline{U}$*-faisceaux* (*resp. de* $\underline{V}$*-préfaisceaux et de* $\underline{V}$*-faisceaux*) *et* $\underline{a}_{\underline{U}} : C^{\wedge}_{\underline{U}} \longrightarrow C^{\sim}_{\underline{U}}$ (*resp.* $\underline{a}_{\underline{V}} : C^{\wedge}_{\underline{V}} \longrightarrow C^{\sim}_{\underline{V}}$) *les foncteurs "faisceaux associés" correspondants. Le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
C^{\wedge}_{\underline{U}} \arrow[r, "\underline{a}_{\underline{U}}"] \arrow[d, hook] & C^{\sim}_{\underline{U}} \arrow[d, hook] \\
C^{\wedge}_{\underline{V}} \arrow[r, "\underline{a}_{\underline{V}}"] & C^{\sim}_{\underline{V}}
\end{tikzcd} ,$$

où les foncteurs verticaux sont les inclusions canoniques, est commutatif à isomorphisme canonique près.

Preuve. Résulte de la construction des foncteurs $\underline{a}_{\underline{U}}$ et $\underline{a}_{\underline{V}}$ (3.4 et 3.0.5).

4. Propriétés d'exactitude de la catégorie des faisceaux

Les propriétés d'exactitude de la catégorie des faisceaux se déduisent des propriétés d'exactitude de la catégorie des préfaisceaux via le théorème 3.4. Le présent numéro explicite cette philosophie sur des énoncés-types parmi les plus utiles.

Théorème 4.1. *Soient* C *un* $\underline{U}$*-site,* $\widetilde{C}$ *la catégorie des faisceaux,* $\underline{a} : C^{\wedge} \longrightarrow \widetilde{C}$ *le foncteur faisceau associé,* $i : \widetilde{C} \longrightarrow C^{\wedge}$ *le foncteur d'inclusion.*

1) *Le foncteur* $\underline{a}$ *commute aux limites inductives et est exact.*

2) Les U-limites inductives dans $\widetilde{C}$ sont représentables. Pour toute petite catégorie I et pour tout foncteur $E : I \longrightarrow \widetilde{C}$, le morphisme canonique

$$\varinjlim_{I} E \longrightarrow \underline{a}(\varinjlim_{I} i \cdot E)$$

est un isomorphisme.

3) Les U-limites projectives dans $\widetilde{C}$ sont représentables. Pour tout objet X de C, le foncteur sur $\widetilde{C}$: $F \longmapsto F(X)$ commute aux limites projectives, i.e. le foncteur d'inclusion $i : \widetilde{C} \longrightarrow \hat{C}$ commute aux limites projectives.

Preuve. Ces propriétés résultent essentiellement du théorème 3.4 et de (I 2.11).

Ainsi, dans la catégorie des faisceaux, les produits indexés par un élément de $\underline{U}$, produits fibrés, sommes indexées par un élément de $\underline{U}$, sommes amalgamées, noyaux, conoyaux, images, coimages sont représentables.

Corollaire 4.1.1. soient C un U-site et F un faisceau d'ensembles sur C. L'homomorphisme canonique

$$\varinjlim_{C/F} aX \longrightarrow F$$

est un isomorphisme.

Preuve. Résulte de (I 3.4) et du fait que $\underline{a}$ commute aux limites inductives.

Proposition 4.2. Tout morphisme de $\widetilde{C}$, qui est à la fois un épimorphisme et un monomorphisme, est un isomorphisme.

Preuve. Soit $u : G \longrightarrow H$ un morphisme de $\widetilde{C}$ qui est un épimorphisme et un monomorphisme. Remarquons tout d'abord que le morphisme u est un monomorphisme de préfaisceaux (4.1 1)). Construisons la somme amalgamée $H \amalg_G H = K$ et les deux morphismes canoniques i_1 , i_2 : $H \rightrightarrows K$ dans la catégorie des préfaisceaux. Comme u est un monomorphisme de préfaisceaux, on vérifie immédiatement que le diagramme ci-après est cartésien et cocartésien (I 10.1) :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{u} & H \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_2} \\ H & \xrightarrow{i_1} & K \end{array} \quad .$$

En appliquent le foncteur "faisceau associé", on obtient donc un diagramme cartésien et cocartésien de la catégorie des faisceaux (4.1 1)) :

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{u} & H \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underline{a}i_2} \\ H & \xrightarrow{\underline{a}i_1} & \underline{a}K \end{array} \quad .$$

Comme u est un épimorphisme de faisceaux, le morphisme $\underline{a}i_1$ est un isomorphisme et comme le diagramme (*) est cartésien, le morphisme u est un isomorphisme.

Proposition 4.3.

1) Les limites inductives dans $C^{\sim}$ qui sont représentables, sont universelles (I 2.5).

2) Toute famille épimorphique (I 10.2) de morphismes est épimorphique effective universelle (2.6).

3) Toute relation d'équivalence est effective universelle (I 10.6).

4) Les $\underline{U}$-limites inductives filtrantes commutent aux limites projectives finies (I 2.6).

Preuve. Les assertions 1) à 4) sont vraies dans la catégorie des ensembles donc dans la catégorie des préfaisceaux (I 3.1). Les assertions 1) et 4) résultent alors immédiatement des assertions correspondantes pour les préfaisceaux et de 4.1. Démontrons 3). Soit p_1, p_2 : $R \rightrightarrows X$ une relation d'équivalence de $C^{\sim}$. Le diagramme $R \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} X$ est alors une relation d'équivalence de préfaisceaux (4.1 1)). Il existe donc un morphisme de préfaisceaux $u : X \longrightarrow Y$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{p_2} & X \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

soit cartésien et cocartésien dans la catégorie des préfaisceaux. En appliquant le foncteur "faisceau associé", on obtient un diagramme cartésien et cocartésien dans la catégorie des faisceaux (4.1 1)). Par suite $R \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} X$ est une relation d'équivalence effective. Comme toute relation d'équivalence est effective d'après ce qui précède, toute relation d'équivalence est effective universelle. Démontrons 2). Soit $(u_i : X_i \longrightarrow X)$, $i \in I$, une famille épimorphique de $C^{\sim}$. D'après (II 2.6) et (I 2.12), il suffit de démontrer les assertions suivantes :

a) Pour tout morphisme de faisceaux $v : Y \longrightarrow X$, la famille de morphismes $pr_{2,i} : X_i \times_X Y \longrightarrow Y$, $i \in I$, est une famille épimorphique de $C^{\sim}$.

b) Pour tout faisceau Z le diagramme d'ensembles :

$$\mathrm{Hom}(X,Z) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(X_i,Z) \rightrightarrows \prod_{(i,k)\in I\times I} \mathrm{Hom}(X_i \times_X X_k, Z)$$

est exact.

Soient X' la réunion des images des morphismes u_i au sens des préfaisceaux et $j : X' \hookrightarrow X$ l'injection canonique. Pour tout $i \in I$, le morphisme $u_i : X_i \longrightarrow X$ se factorise en un morphisme $u_i' : X_i \longrightarrow X'$ et le morphisme j, et la famille $u_i' : X_i \longrightarrow X'$, $i \in I$, est une famille épimorphique de $C^\wedge$. Comme j est un monomorphisme, le morphisme $\underline{a}j : \underline{a}X' \longrightarrow X$ est un monomorphisme de faisceaux (4.1). Comme pour tout $i \in I$, on a $u_i = \underline{a}j\underline{a}u_i'$, $\underline{a}j$ est un épimorphisme de faisceaux. Par suite $\underline{a}j$ est un isomorphisme (4.2). Soit $v : Y \longrightarrow X$ un morphisme de faisceaux. On en déduit par changement de base un morphisme $j_v : X' \times_X Y \to Y$ et des morphismes $u_{i,v}' : X_i \times_X Y \longrightarrow X' \times_X Y$. Comme $\underline{a}$ commute aux produits fibrés, $\underline{a}j_v$ est un isomorphisme. Comme les familles épimorphiques de $C^\wedge$ conservent ce caractère par changement de base, la famille $u_{i,v}'$, $i \in I$, est épimorphique dans $C^\wedge$. Comme $\underline{a}$ commute aux limites inductives, la famille $\underline{a}u_{i,v}' : X_i \times_X Y \longrightarrow \underline{a}(X' \times_X Y)$, $i \in I$, est épimorphique dans $C^\sim$ d'où a).

Démontrons b). Soit Z un faisceau. Comme $\underline{a}j$ est un isomorphisme, l'application

$$\mathrm{Hom}(X,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X',Z)$$

est une bijection. Comme les u_i', $i \in I$, forment une famille épimorphique de $C^\wedge$, le diagramme d'ensemble :

$$\mathrm{Hom}(X',Z) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}(X_i,Z) \rightrightarrows \prod_{(i,k) \in I \times I} \mathrm{Hom}(X_i \times_{X'} X_k, Z)$$

est exact. Enfin comme X' est un sous-préfaisceau de X, le préfaisceau $X_i \times_{X'} X_k$, $(i,k) \in I \times I$, est canoniquement isomorphe à $X_i \times_X X_k$, d'où b).

Remarques 4.3.1.

1) La proposition 4.3 2) nous fournit formellement une seconde démonstration de 4.2 : Il est clair que, dans toute catégorie, un morphisme qui est à la fois un épimorphisme effectif universel et un monomorphisme est en fait un isomorphisme.

2) On déduit des propositions précédentes que tout morphisme dans la catégorie des faisceaux se factorise de manière unique en un épimorphisme effectif et un monomorphisme effectif. Cette propriété généralise de façon naturelle, pour les catégories non additives, l'axiome (AB2) des catégories abéliennes (coim $\xrightarrow{\sim}$ im)[Tohoku].

4.4.0. Soit C un U-site. Le foncteur h : C $\longrightarrow$ C^ (I 1.3.1), composé avec le foncteur faisceau associé, fournit un foncteur

$$\varepsilon_C : C \longrightarrow C^{\sim} \quad ,$$

appelé foncteur canonique de C dans $C^{\sim}$, qui sera constamment utilisé par la suite. Le foncteur ε_C commute aux limites projectives finies. Lorsque la topologie de C est moins fine que la topologie canonique, ε_C est pleinement fidèle, et commute aux limites projectives; il est alors, d'ailleurs, défini lorsque C ne possède pas nécessairement de petite famille topologiquement génératrice. Nous n'étudierons pas en détail le comportement de ε_C par rapport aux limites inductives (cf. [SGA 3 IV]). Nous aurons cependant besoin des propositions ci-après.

Théorème 4.4. Soient C un U-site et $(u_i : X_i \longrightarrow X), i \in I$, une famille de morphismes de C de but X. Les conditions suivantes sont équivalentes (*) :

i) La famille $(\varepsilon_C u_i : \varepsilon_C X_i \longrightarrow \varepsilon_C X), i \in I$, est une famille épimorphique de

(*) Lorsque le site C ne possède pas nécessairement de petite famille topologiquement génératrice et lorsque la topologie de C est moins fine que la topologie canonique, on a ii) $\Longrightarrow$ i) (cf. démonstration de 4.4)

$C^{\sim}$ (I 10.2).

ii) La famille $(u_i : X_i \longrightarrow X), i \in I$, est une famille couvrante de C (1.2).

Preuve. ii) $\Longrightarrow$ i). Soient $R \hookrightarrow X$ le crible engendré par les u_i, $i \in I$ (I 4.3.3), et $u'_i : X_i \longrightarrow R$ les morphismes induits par les u_i. La famille des u'_i, $i \in I$, est une famille épimorphique de $C^{\wedge}$, et R est un crible couvrant X. Par suite, pour tout faisceau F, l'application

$$\mathrm{Hom}(X,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,F)$$

est bijective et l'application

$$\mathrm{Hom}(R,F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(X_i,F)$$

est injective. Donc l'application

$$\mathrm{Hom}(X,F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(X_i,F)$$

est injective et par suite l'application

$$\mathrm{Hom}(\underline{a}X,F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(\underline{a}X_i,F)$$

est injective, d'où i).

i) $\Longrightarrow$ ii). Avec les notations introduites précédemment, soit $J_R : R \hookrightarrow X$ l'injection canonique dans X du crible engendré par les u_i, $i \in I$. Il résulte de i) que le morphisme de faisceaux $\underline{a}J_R : \underline{a}R \longrightarrow \underline{a}X$ est à la fois un épimorphisme de faisceaux et un monomorphisme de faisceaux. C'est donc un isomorphisme de faisceaux (4.2). On a, avec les notations du n° 3, un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\ell(X)"] & LX \arrow[r, "\ell(LX)"] & \underline{a}X \\
R \arrow[u, hook, "J_R"] \arrow[r, "\ell(R)"'] & LR \arrow[u, hook, "LJ_R"] \arrow[r, "\ell(LR)"'] & \underline{a}R \arrow[u, "\underline{a}J_R"', "\wr"]
\end{tikzcd}$$

.

Tout d'abord, d'après 3.1 2), il existe un crible couvrant $J_{S_1} : S_1 \to X$ et un morphisme $u_1 : S_1 \longrightarrow LR$ tel que

$$(4.6.1) \qquad \ell(LX)\circ\ell(X)\circ J_{S_1} = \underline{a}J_R\circ\ell(LR)\circ u_1 = \ell(LX)\circ LJ_R\circ u_1 \quad .$$

Posons $m = \ell(X)\circ J_{S_1}$ et $n = LJ_R\circ u_1$. Les morphismes m et n sont des morphismes de S_1 dans LX. Soit $S_2 \hookrightarrow S_1$ le noyau du couple de flèches (m,n). Pour tout objet Y de C et tout morphisme $\alpha : Y \longrightarrow S_1$, on a, en vertu de (4.6.1), $\ell(LX)\circ m\circ\alpha = \ell(LX)\circ n\circ\alpha$. Il résulte alors de (3.1.3)) que le noyau $S_2 \times_{S_1} Y$ du couple de flèches $(m\circ\alpha, n\circ\alpha)$ est un crible couvrant Y. Par suite, d'après l'axiome (T2) des topologies, $J_{S_2} : S_2 \hookrightarrow X$ est un crible couvrant X. On a donc un morphisme $u_2 : S_2 \longrightarrow LR$ et un diagramme commutatif :

$$(4.6.2) \qquad \begin{tikzcd} S_2 \arrow[rr, hook, "J_{S_2}"] \arrow[dd, "u_2"'] & & X \arrow[dd, "\ell(X)"] \\ & R \arrow[ur, hook, "J_R"'] \arrow[dl, "\ell(R)"] & \\ LR \arrow[rr, "LJ_R"] & & LX \end{tikzcd} \quad .$$

Soient Y un objet de C et $\beta : Y \longrightarrow S_2$ un morphisme. D'après 3.1 1), il existe un crible couvrant $J_{Q_1} : Q_1 \hookrightarrow Y$ et un morphisme $v_1 : Q_1 \longrightarrow R$ tels que $u_2\circ\beta\circ J_{Q_1} = \ell(R)\circ v_1$. Posons $f = J_{S_2}\circ\beta\circ J_{Q_1}$, $g = J_R\circ v_1$. Soient Q_2 le noyau du couple $(f,g) : Q_1 \rightrightarrows X$ et $J_{Q_2} : Q_2 \hookrightarrow Y$, l'injection canonique. Pour tout objet Z de C et tout morphisme $\gamma : Z \longrightarrow Q_1$, on a, en vertu de la commutativité de (4.6.2) :

$$\ell(X)\circ f\circ\gamma = \ell(X)\circ J_{S_2}\circ\beta\circ J_{Q_1}\circ\gamma = LJ_R\circ u_2\circ\beta\circ J_{Q_1}\circ\gamma =$$

$$= LJ_R\circ\ell(R)\circ v_1\circ\gamma = \ell(X)\circ J_R\circ v_1\circ\gamma = \ell(X)\circ g\circ\gamma \quad .$$

Il résulte alors de 3.1.2) que le noyau $Q_2 \times_{Q_1} Z$ du couple $(f \circ \gamma, g \circ \gamma)$ est un crible couvrant Z . D'après l'axiome (T 2) des topologies, $J_{Q_2} : Q_2 \hookrightarrow Y$ est un crible couvrant Y . Pour tout morphisme $\beta : Y \longrightarrow S$, il existe donc un crible couvrant $J_{Q_2} : Q_2 \hookrightarrow Y$ et un morphisme $v_2 : Q_2 \longrightarrow R$ tels que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\beta"] & S_2 \arrow[r, "J_{S_2}"] & X \\
Q_2 \arrow[u, hook, "J_{Q_2}"] \arrow[r, "v_2"] & R \arrow[ur, hook, "J_R"'] &
\end{tikzcd}$$

Notons alors $S_2 \cap R$ le produit fibré de S_2 et de R au-dessus de X . Le crible (de Y) : $(S_2 \cap R) \times_{S_2} Y$ contient le crible Q_2 et par suite $(S_2 \cap R) \times_{S_2} Y$ est un crible couvrant Y . Il résulte alors de l'axiome (T 2) des topologies que $S_2 \cap R$ est un crible couvrant X et par suite le crible R qui contient $S_2 \cap R$ est un crible couvrant X , cqfd.

Corollaire 4.4.4. Soient T la topologie du $\mathfrak{U}$-site $\mathcal{C}$,T' (resp. T") la topologie la plus fine sur $\mathcal{C}$ parmi celles pour lesquelles les objets de $\hat{\mathcal{C}}$ sont des faisceaux (resp. des préfaisceaux) (2.2). Alors T = T' = T" .

En effet, on a trivialement $T \leqslant T' \leqslant T''$, et 4.4 et 2.2 impliquent que $T'' \leqslant T$, cqfd.

Définition 4.5. Un objet initial d'une catégorie A est un objet $\emptyset_A$ qui représente la limite inductive vide i.e. tel que pour tout $X \in \text{ob}\, A$, il existe une flèche et une seule $\emptyset_A \longrightarrow X$. On dit qu'un objet $\emptyset_A$ est initial strict s'il est initial et si tout morphisme de but $\emptyset_A$ est un isomorphisme. Soit (S_i), $i \in I$, une famille d'objets d'une catégorie A . Supposons que la somme $s = \coprod_{i \in I} S_i$ soit représentable On dit que la somme S est disjointe si les morphismes structuraux $S_i \longrightarrow S$ sont quarrables, s'ils sont des monomorphismes et si pour tout couple i,j , $i \neq j$ le produit $S_i \times_S S_j$ est un objet initial de A . On dit que la somme S est disjointe universelle si elle est disjointe et si elle reste somme disjointe après tout changement de base $T \longrightarrow S$; il en résulte que pour tout couple i,j, $i \neq j$, les objets $S_i \times_S S_j$ sont des objets initiaux stricts de A.

Exemple 4.5.1. Dans la catégorie des ensembles, les sommes directes sont disjointes et universelles. Il en est donc de même dans toute catégorie de préfaisceaux d'ensembles (I 3.1) et par suite dans toute catégorie de faisceaux d'ensembles sur un U-site (4.1) ; en particulier, l'objet initial de $C^{\sim}$ est strict.

Proposition 4.6. Soient C une U-catégorie et $(s_i : X_i \longrightarrow X), i \in I$, une famille de morphismes de C. Pour toute U-topologie $\mathscr{C}$ sur C (3.0.2), on désigne par $C^{\sim}_{\mathscr{C}}$ la catégorie de faisceaux correspondante et par $\varepsilon_{\mathscr{C}} : C \longrightarrow C^{\sim}_{\mathscr{C}}$ le foncteur correspondant

1) Soit $\mathscr{C}$ une U-topologie telle que

$$\coprod_{i\in I} \varepsilon_{\mathscr{C}}(X_i) \xrightarrow{(\varepsilon_{\mathscr{C}}(s_i))} \varepsilon_{\mathscr{C}}(X)$$

soit un isomorphisme. Alors pour toute topologie $\mathscr{C}'$ plus fine que $\mathscr{C}$, le morphisme :

$$\coprod_{i\in I} \varepsilon_{\mathscr{C}'}(X_i) \xrightarrow{(\varepsilon_{\mathscr{C}'}(s_i))} \varepsilon_{\mathscr{C}'}(X)$$

est un isomorphisme.

2) Soit $\mathscr{C}$ une U-topologie sur C. Les propriétés suivantes (i) et (ii) sont équivalentes :

i) a) La famille $(s_i : X_i \longrightarrow X), i \in I$, est couvrante pour $\mathscr{C}$.

b) Pour tout $i \in I$, le morphisme diagonal de préfaisceaux

$\Delta_i : X_i \hookrightarrow X_i \times_X X_i$ est transformé par le foncteur "faisceau associé" (pour $\mathcal{C}$) en un isomorphisme (ce qui est le cas si les s_i sont des monomorphismes).

c) Pour tout couple (i,j), $i \neq j$, d'éléments de I, le préfaisceau. $X_i \times_X X_j$ est transformé par le foncteur "faisceau associé" (pour $\mathcal{C}$) en l'objet initial de $C^{\sim}_{\mathcal{C}}$.

ii) $\varepsilon_{\mathcal{C}}(X)$ est somme de $\varepsilon_{\mathcal{C}}(X_i)$.

Preuve.

1) Un faisceau F pour $\mathcal{C}'$ est un faisceau pour $\mathcal{C}$. Par suite, pour tout faisceau F pour $\mathcal{C}'$, le morphisme

$$\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(X,F) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(X_i,F)$$

est un isomorphisme, ce qui entraîne l'assertion.

2) Par définition, on a la propriété ii) si et seulement si le morphisme de préfaisceaux

$$\Phi = (h(s_i), i \in I) : \coprod_i h(X_i) \longrightarrow h(X)$$

est transformé par le foncteur "faisceau associé" en un isomorphisme i.e. (4.2) si et seulement si $\underline{a}(\Phi)$ est un épimorphisme et et monomorphisme de faisceaux. D'après (4.4), le morphisme $\underline{a}(\Phi)$ est un épimorphisme si et seulement si on a la propriété a). Le morphisme diagonal

$$\Delta : \coprod_i h(X_i) \longrightarrow (\coprod_i h(X_i)) \times_{h(X)} (\coprod_i h(X_i))$$

est somme directe d'une famille $\Delta_{i,j}$, $(i,j) \in I \times I$, de morphismes définis comme suit :

β) Lorsque $i = j$, $\Delta_{i,i}$ est le morphisme diagonal $h(X_i) \longrightarrow h(X_i) \times_{h(X)} h(X_i)$

γ) Lorsque $i \neq j$, $\Delta_{i,j}$ est le morphisme $\emptyset_{C^\wedge} \longrightarrow h(X_i) \times_{h(X)} h(X_j)$ ($\emptyset_{C^\wedge}$ désigne l'objet initial de $C^\wedge$).

Le morphisme $\underline{a}(\Phi)$ est un monomorphisme si et seulement si $\underline{a}(\Delta)$ est un isomorphisme, et d'après (4.1) $\underline{a}(\Delta)$ est isomorphisme si et seulement si les $\underline{a}(\Delta_{i,j})$ sont des isomorphismes i.e. si et seulement si on a les propriétés b) et c).

Corollaire 4.6.1. *Soient C une U-catégorie et X un objet de C.*

1) Soit $\mathcal{C}$ une U-topologie sur C. L'objet X de C est transformé par le foncteur "faisceau associé" (pour la topologie $\mathcal{C}$) en l'objet initial de $C^{\sim}_{\mathcal{C}}$ si et seulement si le crible vide recouvre X.

2) Lorsque X est un objet initial strict de C, le faisceau associé à X, pour toute U-topologie plus fine que la topologie canonique, est un objet initial.

Preuve.

1) On prend pour ensemble I dans 4.6 2) l'ensemble vide.

2) D'après 1) et 4.6 1), il suffit de montrer que le crible vide recouvre X pour la topologie canonique i.e. (2.6) il suffit de montrer que pour tout objet $Y \longrightarrow X$ au-dessus de X, Y est un objet initial de X, ce qui résulte de la définition (4.5).

Corollaire 4.6.2. *Soient C un U-site et $(s_i : X_i \longrightarrow X), i \in I$, une famille de morphismes quarrables de C de même but possèdant les propriétés suivantes :*

α) La famille des s_i, $i \in I$, est couvrante.

β) Pour tout $i \in I$, $s_i : X_i \longrightarrow X$ est un monomorphisme.

γ) Pour tout couple (i,j), $i \neq j$, d'éléments de I, $X_i \times_X X_j$ est recouvert par le crible vide, i.e. pour tout faisceau F sur C, $F(X_i \times_X X_j)$ est un ensemble réduit à un élément.

Alors $\epsilon_C(X)$ est somme des $\epsilon_C(X_i)$, $i \in I$.

Preuve. Résulte immédiatement de 4.6 2) et de 4.6.1 1).

Corollaire 4.6.3. *Soient* C *une* *U-catégorie et* $(s_i : X_i \longrightarrow X)$, $i \in I$, *une famille de morphisme quarrables de même but*. *Supposons que la topologie canonique de* C *soit une* *U-topologie*. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

i) *Il existe une* *U-topologie* $\mathcal{C}$ *sur* C, *moins fine que la topologie canonique*, *telle que* $\varepsilon_{\mathcal{C}}(X)$ *soit somme des* $\varepsilon_{\mathcal{C}}(X_i)$, $i \in I$.

ii) *L'objet* X *est somme disjointe et universelle* (4.5) (*dans* C) *des* X_i.

Preuve. ii) $\Longrightarrow$ i). Comme X est somme universelle des X_i, $i \in I$, la famille des s_i, $i \in I$, est couvrante pour la topologie canonique de C (2.6). La condition α) de 4.6.2 est donc satisfaite lorsqu'on munit C de la topologie canonique. La condition β) est évidemment satisfaite et la propriété γ) résulte de 4.6.1) 2), d'où i).

i) $\Longrightarrow$ ii). Soit $\mathcal{C}$ une topologie sur C moins fine que la topologie canonique telle que $\varepsilon_{\mathcal{C}}(X)$ soit somme des $\varepsilon_{\mathcal{C}}(X_i)$. Pour tout faisceau F, pour $\mathcal{C}$, l'application canonique $\mathrm{Hom}(X,F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(X_i,F)$ est une bijection. De plus, tout préfaisceau représentable est un faisceau. Il en résulte aussitôt que X est somme dans C des X_i, $i \in I$. Appliquant ceci au cas où l'ensemble I est vide, on voit que si un objet de C est transformé en l'objet initial de $C^{\sim}$, cet objet est un objet initial de C. Le foncteur $\varepsilon_{\mathcal{C}} : C \longrightarrow C^{\sim}$ est pleinement fidèle et commute aux limites projectives finies. Par suite la condition b) de 4.6 2) entraîne que les s_i, $i \in I$, sont des monomorphismes de C, et la condition c) entraîne, d'après de qui précède, que les $X_i \times_X X_j$, $i \neq j$, sont des objets initiaux de C. Par suite X est somme disjointe des X_i. Comme $\varepsilon_{\mathcal{C}}$ commute aux produits fibrés, cette dernière propriété est stable par tout changement de base $Y \longrightarrow X$, et par suite X est somme disjointe et universelle des X_i, $i \in I$.

Corollaire 4.6.4. Soient C une U-catégorie et X un objet de C. Supposons que la topologie canonique sur C soit une U-topologie. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Il existe sur C une topologie moins fine que la topologie canonique telle que $\varepsilon_{\mathcal{C}}(X)$ soit un objet initial de $C^{\sim}_{\mathcal{C}}$.

ii) X est un objet initial strict de C.

Preuve. On prend pour ensemble I l'ensemble vide dans 4.6.3 .

Proposition 4.7. Soient C une U-catégorie, $C^{\sim}$ la catégorie des faisceaux sur C pour la topologie canonique, $\varepsilon_C : C \longrightarrow C^{\sim}$ le foncteur canonique (4.4.0), $R \rightrightarrows X$ une relation d'équivalence dans C admettant un conoyau Y dans C. Soit $\pi : X \longrightarrow Y$ le morphisme canonique et supposons-le quarrable. Considérons alors les propriétés suivantes :

i) $\varepsilon_C(Y)$ est le quotient de la relation d'équivalence $\varepsilon_C(R) \rightrightarrows \varepsilon_C(X)$.

ii) La relation d'équivalence $R \rightrightarrows X$ est effective universelle (cf. n° 7).

On a ii) $\Longrightarrow$ i). Lorsque C possède une U-topologie moins fine que la topologie canonique, on a i) $\Longrightarrow$ ii).

Preuve. ii) $\Longrightarrow$ i). Le morphisme canonique $R \longrightarrow X \times_Y X$ est un isomorphisme. Soit $S \longrightarrow Y$ le crible engendré par $\pi : X \longrightarrow Y$. Pour tout préfaisceau F, on a un diagramme exact (I 2.12) :

$$\mathrm{Hom}(S,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,F) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(R,F) \quad .$$

Il suffit donc de montrer que pour tout faisceau F pour la topologie canonique, l'application

$$\mathrm{Hom}(X,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S,F)$$

est une bijection i.e. il suffit de montrer que S est couvrant pour la topologie canonique, ou encore que le crible engendré par $\pi : X \longrightarrow Y$ est couvrant, ce qui résulte de la définition 2.5.

i) $\Longrightarrow$ ii). Le foncteur $\varepsilon_C : C \longrightarrow C^{\sim}$ commute aux limites projectives finies et est pleinement fidèle. Or le morphisme canonique $\varepsilon_C(R) \longrightarrow J_C(X) \times_{J_C(Y)} J_C(X)$ est un isomorphisme (4.3). Par suite le morphisme canonique $R \longrightarrow X \times_Y X$ est un isomorphisme. Le morphisme $\varepsilon_C(X) \longrightarrow \varepsilon_C(Y)$ est un épimorphisme, ce qui entraîne (4.4) que $\pi : X \longrightarrow Y$ est un morphisme couvrant de C pour la topologie canonique, cqfd.

<u>Proposition</u> 4.8. <u>Soit</u> C <u>un</u> <u>U</u>-<u>site</u>. <u>La catégorie des faisceaux sur</u> C <u>possède les propriétés suivantes</u> :

a) <u>Les limites projectives finies sont représentables</u>.

b) <u>Les sommes directes indexées par un élément de</u> <u>U</u> <u>sont représentables</u>. <u>Elles sont disjointes et universelles</u>.(4.5).

c) <u>Les relations d'équivalence sont effectives universelles</u>.

Cela a été vu dans 4.1, 2) et 3), 4.3, 3), et 4.5.1.

Ces propriétés ont été mises en évidence car elles permettront plus tard de caractériser les <u>U</u>-catégories équivalentes à des catégories de faisceaux sur des catégories appartenant à <u>U</u> (IV 1.2).

<u>Remarque</u>. Rappelons que la propriété a) est équivalente à la propriété :

il existe un objet final, et les produits fibrés sont représentables (I 2.3.1).

4.9. Soient C un site dont la catégorie sous-jacente soit une $\underline{U}$-catégorie. Alors la catégorie $\widetilde{C}$ des $\underline{U}$-faisceaux sur C satisfait aux conditions envisagées dans I 7.3 ((i) ou (ii), au choix), donc par loc. cit. les diverses variantes envisagées dans I 7.1 pour la notion de *famille génératrice* dans $\widetilde{C}$ coïncident. Ceci posé :

Proposition 4.10. *Avec les notations précédentes, considérons le foncteur canonique* $\varepsilon : C \longrightarrow \widetilde{C}$ (4.4.0), *et soit* $G \subset \mathrm{ob}\, C$ *une famille topologiquement génératrice dans* C (3.0.1). *Alors la famille* $(\varepsilon(X))_{X \in G}$ *d'objets de* $\widetilde{C}$ *est une famille génératrice. En particulier la famille* $(\varepsilon(X))_{X \in \mathrm{ob}\, C}$ *d'objets de* $\widetilde{C}$ *est génératrice.*

Il faut prouver que tout morphisme $u : F \longrightarrow F'$ dans $\widetilde{C}$ tel que

(4.10.1) $$\mathrm{Hom}(\varepsilon(X),F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\varepsilon(X),F')$$

soit une bijection pour tout $X \in G$, est un isomorphisme. Or l'application précédente s'identifie à l'application

(4.10.2) $$u(X) : F(X) \longrightarrow F'(X) \quad ,$$

et il faut montrer que si celle-ci est bijective pour tout $X \in G$, il en est de même pour tout $X \in \mathrm{ob}\, C$. Or soit $(X_i \longrightarrow X)_{i \in I}$ une famille couvrante de X par des objets de G, et pour tout couple d'indices (i,j) de I, considérons l'ensemble de tous les morphismes $X_{ijk} \longrightarrow X_i \times_X X_j$ dans $\hat{C}$, avec $X_{ijk} \in G$ (k variant dans un ensemble d'indices $I_{i,j}$). On obtient alors un homomorphisme de diagrammes exacts d'ensembles

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_i F(X_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\wr"] & \prod_{ijk} F(X_{ijk}) \arrow[d, "\wr"] \\
F'(X) \arrow[r] & \prod_i F'(X_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{ijk} F'(X_{ijk})
\end{tikzcd} \quad ,$$

où par hypothèse les deux dernières flèches verticales sont des bijections. Il en est donc de même de la première flèche verticale, cqfd.

Corollaire 4.11. Supposons que C soit un U-site (3.0.2). Alors la catégorie $\tilde{C}$ est une U-catégorie et admet une U-petite famille génératrice.

En effet, par hypothèse on peut prendre dans 4.10 pour G une petite famille génératrice, ce qui prouve l'existence d'une petite famille génératrice. D'autre part, si F, F' $\in$ ob C, un homomorphisme de F dans F' est connu quand on connait l'homomorphisme (4.10.1) i.e. (4.10.2) pour tout X $\in$ ob G (I 7.1.1), d'où s'ensuit que l'application

$$\mathrm{Hom}(F,F') \longrightarrow \prod_{X \in G} \mathrm{Hom}(F(X),\ F'(X))$$

est injective. Comme le deuxième membre est U-petit, il en est de même du premier, ce qui prouve que $\tilde{C}$ est une U-catégorie.

Corollaire 4.12. Soit C un U-site. Alors pour tout objet de $\tilde{C}$, l'ensemble des sous-objets de X et l'ensemble des objets quotients de X est U-petit.

Cela résulte de I 7.4 resp. I 7.5, qui s'appliquent grâce à 4.11.

5. Extension d'unetopologie de C à C^

Proposition 5.1. Soient C un U-site et f: H $\longrightarrow$ K un morphisme de C^. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout X $\longrightarrow$ K, avec X $\in$ ob C, le morphisme correspondant $H \times_K X \longrightarrow X$ a pour image un crible couvrant de X.

ii) Le morphisme a(f) : aH $\longrightarrow$ aK sur les faisceaux associés est un *épimorphisme de* $\widetilde{C}$.

ii bis) *Pour tout faisceau* F *sur* C, *l'application* $\mathrm{Hom}(K,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H,F)$ *déduite de* f *est injective*.

Preuve. Il est clair que ii) équivaut à ii bis).

Prouvons que (i) $\Longrightarrow$ (ii). En vertu de 4.4, (i) signifie que $u : (H\times_K X) \longrightarrow \underline{a}(X)$ est un épimorphisme. Or, comme $\underline{a}(H\times_K X) \simeq \underline{a}(H)\times_{\underline{a}(K)}\underline{a}(X)$, $\underline{a}$ commutant aux $\varprojlim$ finies (4.1), le morphisme envisagé se déduit de $\underline{a}(f) : \underline{a}(H) \longrightarrow \underline{a}(K)$ par changement de base. Comme les épimorphismes de $\widetilde{C}$ sont universels, cela montre que (ii) $\Longrightarrow$ (i). Inversement, comme la famille des $X_i \longrightarrow K$ est épimorphique, il en est de même de la famille des $\underline{a}(X) \longrightarrow \underline{a}(K)$ dans $\widetilde{C}$ (4.1), donc pour vérifier que $\underline{a}(f) : \underline{a}(H) \longrightarrow \underline{a}(K)$ est épimorphique, il suffit de le voir après tout changement de base du type précédent $\underline{a}(X) \longrightarrow \underline{a}(K)$, ce qui prouve i) $\Longrightarrow$ ii), cqfd.

Définition 5.2. 1) *Un morphisme* $f : H \longrightarrow K$ *satisfaisant aux trois conditions équivalentes de* 5.1 *est appelé un* morphisme couvrant. *Une famille de morphismes* $f_i : H_i \longrightarrow K$, $i\in I$, *de même but est dite* couvrante *si le morphisme correspondant* $f : \coprod_i H_i \longrightarrow K$ *est couvrant*.

2) *Un morphisme* $f : H \longrightarrow K$ *est dit* bicouvrant *s'il est couvrant et si le morphisme diagonal* $H \longrightarrow H\times_K H$ *est couvrant*. *Une famille* $f_i : H_i \longrightarrow K$, $i \in I$, *de même but est dite* bicouvrante *si le morphisme correspondant* $f : \coprod_i H_i \longrightarrow K$ *est bicouvrant*.

Par la condition i) de 5.1, dire qu'une famille $(f_i : H_i \longrightarrow K)$, $i \in I$, est couvrante, signifie que pour tout morphisme $X \longrightarrow K$, avec $X \in \mathrm{ob}\, C$, la famille des $H_i\times_K X \longrightarrow X$, $i \in I$, a pour image un crible couvrant de X ; ou encore, par ii), la famille des morphismes $\underline{a}(f_i) : \underline{a}H_i \longrightarrow \underline{a}K$ dans $C^\sim$ est épimorphique (compte tenu de ce que le foncteur $\underline{a}$ commute aux sommes directes (4.1)).(*)

Proposition 5.3. Soit C un U-site et $f : H \longrightarrow K$ un morphisme de $C^\wedge$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Le morphisme f est bicouvrant (5.2.2)).

i bis) Le morphisme f est couvrant et pour tout objet X de C et tout couple de morphismes $u,v : X \rightrightarrows H$ tel que $fu = fv$, le noyau de (u,v) est un crible couvrant de X.

ii) Le morphisme $\underline{a}(f) : \underline{a}H \longrightarrow \underline{a}K$ est un isomorphisme de $C^\sim$.

ii bis) Pour tout faisceau F sur C, l'application $\mathrm{Hom}(K,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H,F)$ est une bijection.

Preuve. L'équivalence i) $\Longleftrightarrow$ i bis) résulte de la condition i) de 5.1, appliquée au morphisme diagonal $H \longrightarrow H\times_K H$; l'équivalence ii) $\Longleftrightarrow$ ii bis) est triviale.

i) $\Longrightarrow$ ii). Le morphisme $\underline{a}(f) : \underline{a}H \longrightarrow \underline{a}K$ est un épimorphisme (5.1). Comme le foncteur $\underline{a}$ commute à la formation des produits fibrés (4.1), le morphisme diagonal $\underline{a}H \longrightarrow \underline{a}H\times_{\underline{a}K}\underline{a}H$ est un épimorphisme (5.1). Comme le morphisme diagonal est toujours un monomorphisme, c'est un isomorphisme (4.2). Par suite le morphisme $\underline{a}(f)$ est un monomorphisme. C'est donc un isomorphisme (4.2).

ii) $\Longrightarrow$ i). Comme le foncteur $\underline{a}$ commute à la formation des produits fibrés, le morphisme f et le morphisme diagonal $H \longrightarrow H\times_K H$ sont transformés par $\underline{a}$ en isomorphismes. En particulier, ils sont transformés par $\underline{a}$ en épimorphismes. Ils sont donc couvrants, cqfd.

(*) Notons que la propriété pour un morphisme ou une famille de morphismes de $C^\wedge$ d'être couvrant (resp. bicouvrant) est stable par changement de base.

5.3.1. Il résulte de 5.3, et du fait que $\underline{a}$ commute aux sommes directes, qu'une famille $(f_i : H_i \longrightarrow K)$, $i \in I$, de morphismes de $C^\wedge$ est bicouvrante si et seulement si les f_i induisent sur les faisceaux associés un isomorphisme de la somme directe $\coprod_i \underline{a}H_i$ sur $\underline{a}K$, ou encore si et seulement si, pour tout faisceau F, l'application

$$\mathrm{Hom}(K,F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(H_i,F)$$

est bijective.

Proposition 5.4. *Soit C un U-site. Il existe sur $C^\wedge$ une topologie (évidemment unique) telle qu'une famille $H_i \longrightarrow K$ de flèches de $C^\wedge$ de même but soit couvrante pour cette topologie si et seulement si elle est couvrante au sens de 5.2. C'est aussi la topologie la moins fine sur $C^\wedge$ parmi les topologies T ayant les propriétés suivantes :*

a) *T est plus fine que la topologie canonique de $C^\wedge$ (i.e. toute famille épimorphique de $C^\wedge$ est couvrante pour T).*

b) *Toute famille couvrante dans C est couvrante dans $C^\wedge$.*

Preuve. Nous nous bornerons à donner des indications. Nous laissons au lecteur le soin de montrer que les familles couvrantes au sens de 5.2 sont les familles couvrantes d'une topologie T_C sur $C^\wedge$ (on utilise 4.1). Les familles couvrantes de la topologie canonique sur $C^\wedge$ sont les familles épimorphiques sur $C^\wedge$ (2.6 et I 3.1). Comme $\underline{a}$ commute aux limites inductives (4.1), la topologie T_C est plus fine que la topologie canoniques de $C^\wedge$. De plus les familles couvrantes de C sont des familles couvrantes de T_C (5.1). Si donc T' désigne la moins fine des topologie de $C^\wedge$ possèdant les propriétés a) et b), T_C est plus fine que T'. Soit $(f_i : H_i \longrightarrow K)$, $i \in I$, une famille couvrante de T_C. Montrons que $(f_i, i\in I)$ est une famille couvrante de T'. Soient $s_i : H_i \longrightarrow H = \coprod_i H_i$ les monomorphismes canoniques et $f = (f_i, i\in I) : H = \coprod_i H_i \longrightarrow K$ le morphisme défini par les f_i. La famille des s_i est couvrante pour T'. Pour montrer que $(f_i, i\in I)$ est une famille couvrante de T', il suffit donc de montrer, en vertu de l'axiome (T2) des topologies, que le morphisme $f : H \longrightarrow K$ est couvrant pour T'. Il existe une famille épimorphique de $C^\wedge$, $u_\lambda : X_\lambda \longrightarrow K$, $\lambda \in \Lambda$, $X_\lambda \in \mathrm{ob}\, C$ (I 3.4). Pour montrer que $f : H \longrightarrow K$ est couvrant pour T', il suffit donc, en vertu de l'axiome (T 2) des topologies, de montrer que pour tout $\lambda \in \Lambda$, le morphisme $pr_2 : H\times_K X_\lambda \longrightarrow X_\lambda$ est couvrant pour T'. Soit alors $v_j : Y_j \longrightarrow H\times_K X_\lambda$, $j \in J$, $Y_j \in \mathrm{ob}\, C$, une famille épimorphique de $C^\wedge$. La famille $(pr_2 \circ v_j\ ,\ j \in J)$ est couvrante pour T_C. C'est donc une famille couvrante de C (5.1). C'est donc une famille couvrante de T'. Par suite le crible engendré par $pr_2 : H\times_K X \longrightarrow X$ contient un crible couvrant pour T'. Il est donc couvrant pour T' et par suite $pr_2 : H\times_K X \longrightarrow X$ est couvrant, cqfd.

<u>Remarque</u> 5.4.1. La démonstration de 5 .4 montre en fait que toute topologie T' sur $C^\wedge$, plus fine que la topologie canonique de $C^\wedge$, est la moins fine des topologies T sur $C^\wedge$ qui possèdent les propriétés suivantes :

a) T est plus fine que la topologie canonique de $C^\wedge$.

b) Toute famille couvrante pour T' de la forme $u_i : X_i \longrightarrow X$, $i\in I$, où X et les X_i sont des objets de C, est couvrante pour T.

En particulier, toute topologie T' sur $C^\wedge$, plus fine que la topologie canonique, est uniquement déterminée par les familles $u_i : X_i \longrightarrow X$, $i\in I$, X_i et X objets de C, qui sont couvrantes pour T'.

Remarque 5.4.2. On peut facilement montrer que pour toute topologie T' sur C^, plus fine que la topologie canonique, l'ensemble des familles de morphismes$(X_i \longrightarrow X), i\in I$, de même but de C, qui sont couvrantes pour T', est l'ensemble des familles couvrantes d'une topologie sur C. Donc 5.4 et 5.4.1 permettent d'établir une correspondance biunivoque entre les topologies sur C et les topologies sur C^ plus fines que la topologie canonique.

5.5.0. Soit C une petite catégorie. Désignons par Caf l'ensemble des sous-catégories strictement pleines (tout objet isomorphe à un objet de la sous-catégorie est un objet de la sous-catégorie) de C^ dont le foncteur d'injection admette un adjoint à gauche qui commute aux limites projectives finies. Désignons aussi par $\mathfrak{C}$ l'ensemble des topologies sur C. Le théorème 3.4 nous définit une application :

$$\Phi : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathrm{Caf} \quad .$$

Nous allons définir une application en sens inverse. Pour cela, il faut associer à tout élément $e = (i' : C' \overset{a'}{\rightleftarrows} C^\wedge$, $\underline{a}'$ adjoint à gauche de i') une topologie T_e sur C. Pour tout objet X de C, nous définirons $J_e(X)$ comme étant l'ensemble des sous-objets de X dont le morphisme d'injection est transformé par $\underline{a}'$ en un isomorphisme. On vérifie immédiatement, à l'aide des hypothèses faites sur $\underline{a}'$, qu'on définit ainsi une topologie T_e sur C. On a donc défini une application :

$$\Psi : \mathrm{Caf} \longrightarrow \mathfrak{C} \quad .$$

On a alors le **résultat** (dû à J. GIRAUD) :

<u>Théorème</u> 5.5. <u>L'application</u> Φ <u>est une bijection</u>, <u>et</u> Ψ <u>est l'application inverse</u>.

<u>Preuve</u>. L'application $\Psi\circ\Phi$ est l'identité. En effet, ceci résulte immédiatement de 5.1. L'application $\Phi\circ\Psi$ est l'identité. En effet, soient $(i' : C' \underset{}{\overset{\underline{a}'}{\leftrightarrows}} C\hat{})$ un élément de Caf, T_e la topologie qui lui correspond par Ψ, C_e la catégorie des faisceaux pour T_e. On démontre alors, en utilisant la définition de la topologie T_e et la définition des morphismes bicouvrants (5.2), l'équivalence des assertions suivantes :

i) Le morphisme u de $C\hat{}$ est bicouvrant pour la topologie T_e.

ii) Le morphisme u de $C\hat{}$ est transformé par $\underline{a}'$ en un isomorphisme.

Il est clair que C' est une sous-catégorie pleine de C_e. Il suffit donc de montrer que tout faisceau F pour la topologie T_e est un objet de C'. Mais, d'après l'équivalence ci-dessus, le morphisme $F \longrightarrow i' \circ a'(F)$ est bicouvrant, et sa source et son but étant des faisceaux, on en déduit par 5.3 (ii) que $F \longrightarrow i' \circ a'(F)$ est un isomorphisme, cqfd.

<u>6. Faisceaux à valeurs dans une catégorie</u>

6.0. Soient C et D deux catégories. Un foncteur contravariant de C dans D, $F : C^{\circ} \longrightarrow D$, est appelé un <u>préfaisceau sur</u> C <u>à valeurs dans</u> D.

<u>Définition</u> 6.1. <u>Soient</u> C <u>un site</u>, D <u>une catégorie</u>. <u>Un préfaisceau</u> $F : C^{\circ} \rightarrow D$ <u>est appelé un</u> faisceau sur C à valeurs dans D (<u>ou</u>, <u>plus brièvement</u>, <u>un faisceau à valeurs dans</u> D) <u>si pour tout objet</u> S <u>de</u> D, <u>le préfaisceau d'ensembles</u> :

$$X \longmapsto \mathrm{Hom}_D(S,F(X)) \quad , \qquad X \in ob(C)$$

<u>est un faisceau</u>. <u>La sous-catégorie pleine de</u> <u>Hom</u>(C°,D) <u>formée des faisceaux sur</u> C <u>à valeurs dans</u> D <u>sera notée</u> <u>Hom</u>$^{\sim}(C^{\circ},D)$.

Remarques 6.2.

1) La condition 6.1 signifie que pour tout objet X de C, tout crible couvrant R de X, et tout objet S de D, on a un isomorphisme (I 3.5 et 2.1) :

$$\mathrm{Hom}_D(S,F(X)) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{C/R} F(.) \quad .$$

On retrouve ainsi, lorsque D est la catégorie des $\underline{U}$-ensembles, la définition des faisceaux d'ensembles (loc. cit.).

2) Soient D' une $\underline{U}$-catégorie et G : D $\longrightarrow$ D' un foncteur commutant aux limites projectives. Le foncteur G transforme, par composition, les faisceaux à valeur dans D en faisceaux à valeur dans D'.

6.3.0. Soient γ une espèce de structure algébrique définie par limites projectives finies (I 2.9) et $\underline{U}$-γ la catégorie des γ-ensembles qui appartiennent à $\underline{U}$. Désignons par esj : $\underline{U}$-$\gamma \longrightarrow \underline{U}$-Ens le foncteur "ensemble sous-jacent". Le foncteur esj commute aux limites projectives et, par suite, d'après la remarque précédente , définit par composition des foncteurs :

$$\mathrm{esj}^{\wedge} : \underline{\mathrm{Hom}}(C^{\circ},\underline{U}\text{-}\gamma) \longrightarrow C^{\wedge}$$

$$\mathrm{esj}^{\sim} : \underline{\mathrm{Hom}}^{\sim}(C^{\circ},\underline{U}\text{-}\gamma) \longrightarrow C^{\sim} \quad .$$

Le foncteur esj$^{\sim}$ est appelé le foncteur "faisceau d'ensembles sous-jacent". En fait, il se factorise de façon canonique par la catégorie γ-$\widetilde{C}$ des γ-objets de $C^{\sim}$, et désignant encore par $\widetilde{\mathrm{esj}}$ le foncteur

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\sim}(C^{\circ},\underline{U}\text{-}\gamma) \longrightarrow \gamma\text{-}\widetilde{C}$$

obtenu, on peut énoncer :

<u>Proposition</u> 6.3.1. <u>Le foncteur</u> esj$^{\sim}$ <u>établit une équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux sur</u> C <u>à valeur dans</u> $\underline{U}$-γ, <u>celle des</u> γ-<u>objets de la catégorie des faisceaux d'ensembles</u>, <u>et la catégorie des</u> γ-<u>objets de la catégorie des préfaisceaux d'ensembles dont le préfaisceau sous-jacent est un faisceau</u>.

Preuve. La preuve utilise essentiellement (I 3.2) et le fait qu'une limite projective finie de faisceaux dans la catégorie des préfaisceaux est un faisceau (4.1).

6.3.2. La proposition précédente justifie l'abus de langage qui consiste à identifier un faisceau à valeur dans $\underline{U}$-γ et le γ-objet correspondant dans $C^\sim$. Nous ferons désormais systématiquement cet abus de langage.

Nous emploierons la terminologie classique : *faisceaux de groupes*, *faisceaux de groupes commutatifs* (que nous appellerons le plus souvent *faisceaux abéliens*), *faisceaux d'anneaux*, *faisceaux de A-modules*...

6.3.3 Nous désignons par

$$C^\sim_\gamma \quad (\text{resp. } C^\wedge_\gamma)$$

la catégorie des γ-objets de $C^\sim$ (resp. de $C^\wedge$). Lorsque γ est l'espèce de structure "A-module", on écrit aussi $C^\sim_A$, ou simplement $\widetilde{C}_{ab}$ lorsque $A = \mathbb{Z}$.

Supposons que C soit un $\underline{U}$-site. Le foncteur "faisceau associé" est exact à gauche (4.1) et par suite :

Proposition 6.4. *Le foncteur d'inclusion* $i_\gamma : C^\sim_\gamma \longrightarrow C^\wedge_\gamma$ *admet un adjoint à gauche* a_γ *exact à gauche*, *i.e.* *on a un isomorphisme* :

$$\mathrm{Hom}_{C^\sim_\gamma}(a_\gamma,\ ) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{C^\wedge_\gamma}(\ ,i_\gamma) \quad .$$

Soit X *un objet de* $C^\wedge_\gamma$. *Le faisceau d'ensembles sous-jacent à* $a_\gamma(X)$ *est canoniquement isomorphe au faisceau d'ensembles associé au préfaisceau d'ensembles sous-jacent à* X. *Le morphisme de préfaisceaux d'ensembles sous-jacents au morphisme d'adjonction* $\mathrm{id} \longrightarrow i_\gamma\, a_\gamma$ *s'identifie au morphisme d'adjonction appliqué au préfaisceau d'ensembles sous-jacent*.

Proposition 6.5. Supposons que le foncteur esj : γ-$\underline{U} \longrightarrow \underline{U}$-Ens admette un adjoint à gauche (*) :

$$\mathrm{Hom}_{\underline{U}\text{-Ens}}(.,\mathrm{esj}(.)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\gamma\text{-}\underline{U}}(\mathrm{Lib}(.),.) \quad .$$

Le foncteur $\mathrm{esj}^{\sim} : C^{\sim}_{\gamma} \longrightarrow C^{\sim}$ (resp. $\mathrm{esj}^{\wedge} : C^{\wedge}_{\gamma} \longrightarrow C^{\wedge}$) admet un adjoint à gauche $\mathrm{Lib}^{\sim}$ (resp. $\mathrm{Lib}^{\wedge}$) et on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Lib}^{\sim} = a_{\gamma}\mathrm{Lib}^{\wedge}\, i \quad .$$

Preuve. La preuve est formelle et est laissée au lecteur.

Corollaire 6.6. Soit (X_i), $i \in I$, une famille génératrice de $C^{\sim}$ (4.9). Alors la famille $\mathrm{Lib}^{\sim}(X_i)$ est une famille génératrice de $C^{\sim}_{\gamma}$.

Preuve. La preuve est formelle une fois qu'on a remarqué que le foncteur $\mathrm{esj}^{\sim}$ commute aux limites projectives et qu'il est conservatif ($\mathrm{esj}^{\sim}(u)$ est un isomorphisme $\Longleftrightarrow$ u est isomorphisme).

Proposition 6.7. Soient A un $\underline{U}$-faisceau d'anneaux, ou bien un petit anneau, $C^{\sim}_{A}$ (resp. $C^{\wedge}_{A}$) la catégorie des faisceaux (resp. des préfaisceaux) de A-modules unitaires (6.3.3) sur un $\underline{U}$-site C. Alors $C^{\sim}_{A}$ est une $\underline{U}$-catégorie abélienne vérifiant les axiomes (AB 5) ("existence de limites inductives filtrantes exactes à gauche") et (AB 3) * ("existence de produits infinis") de [TOHOKU]. Elle possède une famille de générateurs indexée par un élément de $\underline{U}$.

Preuve. Il est clair que la catégorie $C^{\wedge}_{A}$ est une catégorie abélienne vérifiant les axiomes (AB 3), (AB 4), et (AB 5) (I 2.8 et I 3.3). On

---

(*) On démontre qu'un tel adjoint existe toujours [C.F.] : groupe libre, groupe abélien libre, A-module libre... .

déduit alors de 6.4 que la catégorie $C^{\sim}_{A}$ est une catégorie additive où les noyaux et conoyaux sont représentables. Plus précisément, soient i_A et a_A les foncteurs inclusion dans les préfaisceaux et faisceaux associés et $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme de $C^{\sim}_{A}$. Le foncteur a_A est exact à gauche et commute aux limites inductives. Le foncteur i_A commute aux limites projectives. Par suite le foncteur $i_A a_A : C^{\wedge}_{A} \longrightarrow C^{\wedge}_{A}$ est un foncteur additif exact à gauche. On en déduit des isomorphismes canoniques :

(*) $$i_a(\mathrm{Ker}(u)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(i_A(u)) \quad ,$$

(* *) $$\mathrm{coker}(u) \xrightarrow{\sim} a_A\ \mathrm{coker}(i_a(u)) \quad .$$

On a par suite un isomorphisme canonique :

(* * *) $$\mathrm{coim}(u) \xrightarrow{\sim} a_A \mathrm{coim}(i_a(u)) \quad .$$

Montrons que le morphisme canonique $\mathrm{coim}(u) \longrightarrow \mathrm{im}(u)$ est un isomorphisme. Pour cela, il suffit de montrer, d'après (*), que la suite :

$$0 \longrightarrow i_A(\mathrm{coim}(u)) \longrightarrow i_A(Y) \longrightarrow i_A(\mathrm{coker}(u))$$

est exacte. Utilisant les isomorphismes (* *) et (* * *) et remarquant que $a_A i_A(Y)$ est isomorphe à Y, on voit que cette suite est isomorphe à la suite :

$$0 \longrightarrow i_a a_A(\mathrm{coim}(i_A(u)) \longrightarrow i_A a_A i_A(Y) \longrightarrow i_A a_A(\mathrm{coker}(i_A(u)) \quad ,$$

qui n'est autre que la transformée par le foncteur $i_A a_A$ de la suite :

$$0 \longrightarrow \mathrm{coim}(i_A(u)) \longrightarrow i_A(Y) \longrightarrow \mathrm{coker}(i_A(u)) \quad .$$

Or, cette suite est exacte et le foncteur $i_A a_A$ est exact à gauche. La catégorie $C^{\sim}_{A}$ est donc une catégorie abélienne. Le foncteur $a_A : C^{\wedge}_{A} \rightarrow C^{\sim}_{A}$

est exact à gauche et commute aux limites inductives quelconques. Par suite il est additif, exact et commute aux limites inductives. La catégorie $C_A^{\wedge}$ vérifiant l'axiome (AB 5), il en est de même de la catégorie $C_A^{\sim}$. Enfin il est clair que dans la catégorie $C_A^{\sim}$, les produits indexés par un élément de $\underline{U}$ sont représentables et, par suite, que l'axiome (AB 3)* est vérifié, ce qui achève la démonstration de la première assertion.

Pour tout anneau A élément de $\underline{U}$, le foncteur :

$$\mathrm{esj} : \underline{U}\text{-A-module} \longrightarrow \underline{U}\text{-Ens}$$

admet un adjoint à gauche X_A (A-module libre engendré). Il suffit donc d'appliquer 4.10 et 6.6 pour achever la preuve.

Notation 6.8. Soit H un faisceau d'ensembles. Le faisceau de A-modules associé au préfaisceau (cf. notation 6.5)

$$X \longmapsto \mathrm{Lib}_A H(X) \qquad X \in \mathrm{ob}\, C$$

est noté A_H. Lorsque $H = \underline{a}(X)$ (faisceau associé au préfaisceau représenté par X) on écrit parfois simplement A_X (par abus de notation). La démonstration de 6.7 montre que la famille de faisceaux de A-module $\underline{A}_X$, $(X \in \mathrm{ob}(C))$, est une famille génératrice, indexée par un élément de $\underline{U}$, de la catégorie des faisceaux de A-modules.

Remarque 6.9.

D'après [TÔHOKU], 6.7 montre que la catégorie $C_A^{\sim}$, lorsque A est un élément de $\underline{U}$, possède suffisament d'injectifs. On sait, par ailleurs, que les produits infinis ne sont pas nécessairement exacts dans $C_A^{\sim}$, et, par suite, que la catégorie $C_A^{\sim}$ n'admet pas, en général, suffisament de projectifs [ROOS].

Bibliographie

[1] M. ARTIN ; Grothendieck's topologies.

[2] M. DEMAZURE : Séminaire de Géométrie Algébrique III, Exposé IV
Lecture Notes. Springer-Verlag.

[3] A. GROTHENDIECK : Sur quelques points d'Algèbre Homologique.
Tohoku Math. Journal.

[4] J. E. ROOS : CR

S G A 4

E X P O S E III

FONCTORIALITE DES CATEGORIES DE FAISCEAUX

par J.L. Verdier

Dans I 5, on a étudié le comportement des catégories de préfaisceaux par rapport aux foncteurs entre les catégories d'arguments. Dans cet exposé, on étend cette étude au cas des sites et des catégories de faisceaux (n° 1 et 2). Après avoir introduit la topologie induite (n° 3), on aborde au n° 4 le lemme de comparaison qui jouera un rôle important dans Exp. IV. Au numéro 5, on étudie, pour le lecteur patient, certains diagrammes commutatifs liés aux catégories localisées (du type C/X). Dans le théorème I 5.1 on fait des hypothèses de petitesse sur les catégories envisagées. Ces hypothèses ne sont pas, en général , satisfaites par les sites rencontrés dans la pratique ($\underline{U}$-sites). Ceci oblige à quelques contorsions (4.2, 4.3, 4.4).

1. Foncteurs continus

Définition 1.1. Soient C et C' deux $\underline{U}$-sites et u : C $\longrightarrow$ C' un foncteur entre les catégories sous-jacentes. On dit que u est continu si pour tout faisceau d'ensembles F sur C', le préfaisceau X $\longmapsto$ F $\circ$ u(X) ser C est un faisceau.

Cette notion de continuité dépend a priori de l'univers $\underline{U}$ pour lequel les deux sites sont des $\underline{U}$-sites. La proposition 1.5 montre qu'elle n'en dépend pas.

1.11. Désignons par $i : C^{\sim} \longrightarrow C^{\wedge}$ (resp. $i' : C'^{\sim} \longrightarrow C'^{\wedge}$) le foncteur d'inclusion canonique des faisceaux dans les préfaisceaux. D'après la définition 1.1, le foncteur u est continu si et seulement s'il existe un foncteur $u_s : C'^{\sim} \longrightarrow C^{\sim}$ tel que l'on ait l'égalité $iu_s = u^*i'$ (avec $u^*F = F\circ u$ (I 5.0)).

Proposition 1.2. *Soient* C *un petit site,* C' *un* U*-site et* $u : C \longrightarrow C'$ *un foncteur entre les catégories sous-jacentes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *Le foncteur* u *est continu.*

ii) *Pour tout objet* X *de* C *et tout crible* $R \hookrightarrow X$ *couvrant* X, *le morphisme* $u_! R \hookrightarrow u(X)$ *est bicouvrant dans* $C'^{\wedge}$ (II 5.2 et I 5.1).(*)

iii) *Pour tout famille bicouvrante* $H_i \longrightarrow K$, $i \in I$, *de* $C^{\wedge}$, *la famille des* $u_! H_i \longrightarrow u_! K$, $i \in I$, *est bicouvrante dans* $C'^{\wedge}$.

iv) *Il existe un foncteur* $u^s : C^{\sim} \longrightarrow C'^{\sim}$, *commutant aux limites inductives et "prolongeant u", i.e. tel que le diagramme de foncteurs canoniques*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & C' \arrow[d, "\varepsilon_{C'}"] \\ C^{\sim} \arrow[r, "u^s"] & C'^{\sim} \end{tikzcd},$$

soit commutatif à isomorphisme près.

De plus, lorsque C *n'est plus nécessairement un petit site, mais un* U*-site, on a toujours* i) $\Longleftrightarrow$ iv) *et le foncteur* u^s *de* iv) *est nécessairement un adjoint à gauche du foncteur* $u_s : \widetilde{C}' \longrightarrow \widetilde{C}$, *et est par suite déterminé à isomorphisme unique près.*

(*) "Couvrant" au lieu de "bicouvrant" ne suffisait pas nécessairement, cf. exemple 1.9.3 ci-dessous.

Preuve : La démonstration de i) $\Longleftrightarrow$ iv) lorsque C est un $\underline{U}$-site sera faite en 4.2. Supposons C petit. Il est clair que iii) $\Longrightarrow$ ii).

i) $\Longrightarrow$ iii) : Soit $H_i \longrightarrow K$, $i \in I$, une famille bicouvrante de $C^\wedge$. Pour tout faisceau F sur C', le préfaisceau u^*F (I 5.0) est un faisceau sur C. Donc (II 5.3) l'application canonique

$$\mathrm{Hom}(K,u^*F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(H_i,u^*F) \quad ,$$

est bijective. Par adjonction (I 5.1), on en déduit que l'application canonique

$$\mathrm{Hom}(u_!K,F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(u_!H_i,F)$$

est bijective. Par suite (II 5.3) la famille $u_!H_i \longrightarrow u_!K$, $i \in I$, est bicouvrante.

ii) $\Longrightarrow$ i) Soient X un objet de C , $R \hookrightarrow X$ un crible couvrant, F un faisceau sur C'. D'après (II 5.3), l'application

$$\mathrm{Hom}(u_!X,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(u_!R,F)$$

est bijective. Par adjonction (I 5.1), on en déduit que l'application

$$\mathrm{Hom}(X,u^*F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,u^*F)$$

est bijective. Par suite u^*F est un faisceau.

i) $\Longrightarrow$ iv) : Utilisons les notations habituelle $\underline{a}$ et i (resp. $\underline{a}'$ et i') pour les foncteurs "faisceau associé" et "inclusion dans les préfaisceaux". Pour tout faisceau G sur C, posons $u^sG = \underline{a}'u_!i\,G$. Pour tout faisceau F sur C', on a la suite d'isomorphismes naturels :

$$\mathrm{Hom}(G,u_sF) \simeq \mathrm{Hom}(iG,iu_sF) \simeq \mathrm{Hom}(iG,u^*i'F) \simeq \mathrm{Hom}(u_!iG,i'F) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{a}'u_!iG,F).$$

(Le premier isomorphisme provient de ce que i est pleinement fidèle ; le deuxième isomorphisme provient de la définition de u_s ; les troisième et quatrième isomorphisme s'obtiennent par adjonction). Par suite u^s est adjoint à gauche à u_s. En particulier u^s commute aux limites inductives. Pour tout préfaisceau K sur C et tout faisceau F sur C', on a la suite d'isomorphismes naturels : $\mathrm{Hom}(u^s\underline{a}K,F) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\underline{a}K,u_sF) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}(K,iu_sF) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}(K,u^*i'F) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}(u_!K,i'F) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\underline{a}'u_!K,F)$ (le troisième isomorphisme provient de la définition de u_s ; les autres s'obtiennent par adjonction) ; d'où un isomorphisme fonctoriel $u^s\underline{a}K \xleftarrow{\sim} \underline{a}'u_! K$. En particulier, en utilisant cet isomorphisme lorsque K est représentable, on obtient, compte tenu de I 5.4 3), un diagramme commutatif à isomorphisme près :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & C' \arrow[d, "\varepsilon_{C'}"] \\ \widetilde{C} \arrow[r, "u^s"] & \widetilde{C}' \end{tikzcd}$$

iv)$\Longrightarrow$ ii) : Soit $h : C \longrightarrow C^\wedge$ (resp. $h' : C' \longrightarrow C'^\wedge$) le foncteur qui associe à un objet le préfaisceau qu'il représente. Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h"'] & C' \arrow[d, "h'"] \\ C^\wedge \arrow[r, "u_!"] \arrow[d, "\underline{a}"'] & C'^\wedge \arrow[d, "\underline{a}'"] \\ C^\sim \arrow[r, "u^s"] & C'^\sim \end{tikzcd} .$$

Le carré du haut est commutatif (1.4 3)) et on a $\underline{a}h = \varepsilon_C$, $\underline{a}'h' = \varepsilon_{C'}$.
Pour tout objet K de $C^\wedge$, on a un isomorphisme canonique (I 3.4) :

$$\varinjlim_{(h(X) \to K) \in \mathrm{ob}(C/K)} h(X) \xrightarrow{\sim} K \quad .$$

Comme les foncteurs $u_!$, u^s , $\underline{a}$ et $\underline{a}'$ commutent aux limites inductives, on en déduit des isomorphismes :

$$\varinjlim_{(h(X) \to K) \in \mathrm{ob}(C/K)} u^s\,\underline{a}h(X) \xrightarrow{\sim} u^s\,\underline{a}K \quad ,$$

$$\varinjlim_{(h(X) \to K) \in \mathrm{ob}(C/K)} \underline{a}'\,u_!h(X) \xrightarrow{\sim} \underline{a}'u_!K \quad .$$

On a $u_!h = h'u$ et, par hypothèse, on a un isomorphisme $\underline{a}'h'u \simeq u^s\underline{a}h$, d'où un isomorphisme :

$$u^s\underline{a}\,K \simeq \underline{a}'u_!\,K \quad ,$$

dont on vérifie immédiatement qu'il est fonctoriel en K. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} C^\wedge \arrow[r, "u_!"] \arrow[d, "\underline{a}"'] & C'^\wedge \arrow[d, "\underline{a}'"] \\ C^\sim \arrow[r, "u^s"] & C'^\sim \end{tikzcd} \quad ,$$

est donc commutatif à isomorphisme près. Comme $\underline{a}i$ est isomorphe au foncteur identique, on a un isomorphisme $u^s \simeq \underline{a}'u_!i$, d'où l'unicité de u^s. Soit $v : H \to K$ un morphisme bicouvrant de $C^\wedge$. Alors $\underline{a}(v)$ est un isomorphisme (II 5.3) et par suite $\underline{a}'u_!(v)$ (isomorphe à $u^s\underline{a}(v)$) est un isomorphisme. Donc $u_!(v)$ est transformé par $\underline{a}'$ en un isomorphisme, et par suite $u_!(v)$ est bicouvrant (II 5.3), d'où ii).

L'assertion supplémentaire, dans le cas C petit, a été prouvée en cours de démonstration, cqfd.

1.2.1. Le foncteur $u^s : C^\sim \longrightarrow C'^\sim$ de 2.2 iv) pourra s'interpréter souvent comme un foncteur "image réciproque" par un "morphisme de topos" $C'^\sim \longrightarrow C^\sim$, cf. IV 4.9. Ses propriétés sont résumées dans la proposition suivante :

Proposition 1.3. Soit $u : C \longrightarrow C'$ un foncteur continu entre un petit site C et un U-site C' .

1) Le foncteur u^s est adjoint à gauche au foncteur u_s .

2) On a un isomorphisme canonique $u^s \simeq \underline{a}' u_! i$.

3) On a un isomorphisme canonique $u^s \underline{a} \simeq \underline{a}' u_!$

4) Le foncteur u^s commute aux limites inductives.

5) Lorsque le foncteur $u_!$ est exact à gauche (cf. I 5.4 4)), le foncteur u^s l'est aussi. Plus généralement le foncteur u^s commute aux types de limites projectives finies auxquels le foncteur $u_!$ commute.

Preuve : Les assertions 1), 2), 3), 4) ont été prouvées en cours de démonstration de 1.2. L'assertion 5) résulte de l'isomorphisme 2), compte tenu de ce que i commute aux limites projectives et de ce que $\underline{a}'$ commute aux limites projectives finies (II 4.1).

Remarque 1.4. En combinant I 5.4 3) et 1.3 3) on obtient un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h"'] & C' \arrow[d, "h'"] \\
C^\wedge \arrow[r, "u_!"] \arrow[d, "\underline{a}"'] & C'^\wedge \arrow[d, "\underline{a}'"] \\
C^\sim \arrow[r] & C'^\sim
\end{tikzcd} ,$$

où le carré du haut est commutatif et le carré du bas commutatif à isomorphisme près. Mais les foncteurs $\underline{a}$, $\underline{a}'$, $u_!$, u^s ne sont définis qu'à isomorphisme près. Le lecteur pourra vérifier qu'on peut choisir les foncteurs $\underline{a}$, $\underline{a}'$ et u^s de façon que :

1) Les foncteurs composés $\underline{a}h$ et $\underline{a}'h'$ soient injectifs sur les ensembles d'objets;

2) le diagramme

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\underline{a}h"'] & C' \arrow[d, "\underline{a}'h'"] \\ C^{\sim} \arrow[r, "u^s"] & C'^{\sim} \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Plus précisément, on peut choisir les foncteurs $\underline{a}$ et $\underline{a}'$ de façon à remplir la condition 1). Les foncteurs $\underline{a}$ et $\underline{a}'$ étant choisis, on peut choisir le foncteur u^s de façon à remplir la condition 2).

<u>Proposition</u> 1.5. <u>Soient $\underline{U} \subset \underline{V}$ deux univers</u>, C <u>et</u> C' <u>deux $\underline{U}$-sites</u>, $u : C \to C'$ <u>un foncteur entre les catégories sous-jacentes</u>. <u>Alors</u> u <u>est continu relativement à $\underline{U}$ si et seulement s'il est continu relativement à $\underline{V}$</u>. <u>De plus, lorsque</u> u <u>est continu, désignons par $u^s_{\underline{U}}$ (resp. $u^s_{\underline{V}}$) le foncteur entre catégories de $\underline{U}$-faisceaux (resp. $\underline{V}$-faisceaux) introduit en</u> 1.2 iv). <u>Alors le diagramme</u>

(1.5.1)
$$\begin{tikzcd} \widetilde{C}_{\underline{U}} \arrow[r, "u^s_{\underline{U}}"] \arrow[d] & \widetilde{C}'_{\underline{U}} \arrow[d] \\ \widetilde{C}_{\underline{V}} \arrow[r, "u^s_{\underline{V}}"] & \widetilde{C}'_{\underline{V}} \end{tikzcd} ,$$

où les foncteurs verticaux sont les foncteurs d'inclusion canoniques, est commutatif à isomorphisme canonique près.

Preuve. Nous ne ferons la démonstration que dans le cas où C est $\underline{U}$-petit. Le cas général sera démontré en 4.3. Il est clair que si le foncteur u^* transforme tout $\underline{V}$-faisceau sur C' en $\underline{V}$-faisceau sur C, il transforme tout $\underline{U}$-faisceau sur C' en $\underline{U}$-faisceau sur C. Supposons que u^* transforme tout $\underline{U}$-faisceau sur C' en $\underline{U}$-faisceau sur C. Notons $C^{\wedge}_{\underline{U}} \hookrightarrow C^{\wedge}_{\underline{V}}$ (resp. $C'^{\wedge}_{\underline{U}} \hookrightarrow C'^{\wedge}_{\underline{V}}$ les catégories de $\underline{U}$-préfaisceaux et $\underline{V}$-préfaisceaux, $u_{\underline{U}!}$ et $u_{\underline{V}!}$ les foncteurs "image réciproque" pour les $\underline{U}$-préfaisceaux et les $\underline{V}$-préfaisceaux respectivement. On a un diagramme commutatif (cf. la construction explicite de $u_!$ dans I 5.1) :

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} C^{\wedge}_{\underline{U}} \arrow[r, "u_{\underline{U}!}"] \arrow[d, hook] & C'^{\wedge}_{\underline{V}} \arrow[d, hook] \\ C^{\wedge}_{\underline{V}} \arrow[r, "u_{\underline{V}!}"] & C'^{\wedge}_{\underline{V}} \end{tikzcd} .$$

Les foncteurs d'inclusion des $\underline{U}$-préfaisceaux dans les $\underline{V}$-préfaisceaux sont pleinement fidèles et commutent aux limites projectives. Il résulte alors de (II 5.1 i)) qu'un morphisme bicouvrant de $\underline{U}$-préfaisceaux est un morphisme bicouvrant de $\underline{V}$-préfaisceaux. Soit alors $R \hookrightarrow X$ un crible couvrant un objet X de C. D'après 1.2 ii), le morphisme $u_{\underline{U}!}R \longrightarrow u_{\underline{U}!}X$ est bicouvrant. Utilisant la commutativité de (*) et ce qui précède, on en déduit que le morphisme $u_{\underline{V}!}R \longrightarrow u_{\underline{V}!}X$ est bicouvrant. Par suite (1.2), le foncteur u^* transforme les $\underline{V}$-faisceaux sur C' en $\underline{V}$-faisceaux sur C. La commutativité de 1.5.1 résulte alors de la commutativité de (*), de II 3.6 et de 1.3 2).

Proposition 1.6. Soient C et C' deux U-sites, $u : C \longrightarrow C'$ un foncteur entre les catégories sous-jacentes. Considérons les conditions :

i) u est continu (cf. 1.1 et 1.2).

ii) Pour tout famille couvrante $(X_i \longrightarrow X), i \in I$, de C, la famille $(uX_i \longrightarrow uX), i \in I$, de C', est couvrante.

On a l'implication i) $\Longrightarrow$ ii).

Supposons que la topologie de C puisse être définie par une prétopologie T (II 1.3) et que le foncteur u commute aux produits fibrés.(*) Alors les conditions i) et ii) sont équivalentes et sont équivalentes à la condition suivante :

iii) Le foncteur u transforme les familles couvrantes de T en familles couvrantes de C'.

En particulier, supposons que dans C les produits fibrés soient représentables et que le foncteur u commute aux produits fibrés. Alors les conditions i) et ii) sont équivalentes.

Preuve. Montrons que i) $\Longrightarrow$ ii). Soit $X_i \longrightarrow X$, $i \in I$, une famille couvrante de C. Pour tout faisceau F sur C', u^*F est un faisceau. Par suite, l'application

$$\mathrm{Hom}(X, u^*F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(X_i, u^*F)$$

est injective (II 5.1). D'où une application injective

$$\mathrm{Hom}(u_!X, F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(u_!X_i, F) \quad .$$

Donc la famille $u_!X_i \longrightarrow u_!X$, $i \in I$, est couvrante dans C' (II 5.1).

Toute famille couvrante de la prétopologie T est une famille couvrante de C, d'où ii) $\Longrightarrow$ iii). Montrons que iii) $\Longrightarrow$ i). Soit X un

---

(*) En fait, il suffit que n commute aux produits fibrés intervenant dans les changements de base pour des morphismes provenant de famille couvrantes pour T .

objet de C et $X_i \longrightarrow X$, $i \in I$, une famille couvrante de Cov(X) (II 1.3). Les morphismes $X_i \longrightarrow X$ sont quarrables et le foncteur u commute aux produits fibrés. Par suite, les produits fibrés $u(X_i) \times_{u(X)} u(X_j)$ sont représentables et canoniquement isomorphes à $u(X_i \times_X X_j)$. Soit F un faisceau sur C'. Alors le diagramme d'ensembles :

$$F(u(X) \longrightarrow \prod_i F(u(X_i)) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(u(X_i \times_X X_j)$$

est exact (II 2.1 , I 3.5 et I 2.12) . Par suite le diagramme d'ensembles

$$u^*F(X) \longrightarrow \prod_i u^*F(X_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} u^*F(X_i \times_X X_j)$$

est exact. Donc u^*F est un faisceau (II 2.4), d'où i). La dernière assertion de 1.6 résulte de ce qui précède et du fait que, lorsque les produits fibrés sont représentables dans C, toutes les familles couvrantes de C [1] définissent sur C une prétopologie dont la topologie associée est la topologie de C.

<u>Proposition</u> 1.7. <u>Soient</u> C <u>un petit site</u>, C' <u>un</u> <u>U</u>-<u>site et</u> u : C $\longrightarrow$ C' <u>un foncteur continu</u>. <u>Soit</u> γ <u>une structure algébrique définie par limites projectives finies</u>, <u>telle que dans la catégorie des</u> γ-<u>objets de</u> <u>U</u>-Ens <u>les</u> <u>U</u>-<u>limites inductives soient représentables</u> [2]. <u>On utilise les notations de la proposition</u> II 6.4 . <u>Le foncteur</u> u_s <u>commute aux limites projectives et par suite définit un foncteur</u> $u_s^\gamma : C_\gamma^\sim \longrightarrow C'^\sim_\gamma$. <u>Le foncteur</u> u_s^γ <u>admet un adjoint à gauche</u> u_γ^s <u>qui possède les propriétés suivantes</u>

---

(1) indexées par les ensembles appartenant à un univers convenable.

(2) On peut montrer en fait que cette condition est toujours satisfaite.

1) *On a un isomorphisme canonique* $u^s_Y \xrightarrow{\sim} \underline{a}'_Y\, u_{Y!}\, i_Y$, *et* u^s_Y *commute aux limites projectives finies auxquelles* $u_{Y!}$ *commute.*

2) *On a un isomorphisme canonique* $u^s_Y\, \underline{a}_Y \xrightarrow{\sim} \underline{a}'_Y\, u'_{Y!}$.

3) *Le foncteur* u^s_Y *commute aux limites inductives.*

4) *Si* u^s *est exact à gauche, le diagramme* (notation de II 6.3.0)

$$\begin{tikzcd} C^\sim_Y \arrow[r, "u^s_Y"] \arrow[d, "esj^\sim"'] & C'^\sim_Y \arrow[d, "esj'^\sim"'] \\ C^\sim \arrow[r, "u^s"] & C'^\sim \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près et le foncteur u^s_Y *est exact.*

5) *Supposons que le foncteur* $esj^\sim$ (*resp.* $esj'^\sim$) *possède un adjoint à gauche* $Lib^\sim$ (*resp.* $Lib'^\sim$) (II 6.5). *On a un isomorphisme canonique* : $u^s_Y\, Lib^\sim \xrightarrow{\sim} Lib'^\sim u^s$.

De plus, lorsque C *n'est pas nécessairement un petit site mais un* $\underline{U}$*-site, le foncteur* u^Y_s *admet un adjoint à gauche* u^s_Y . *Enfin si* $\underline{V}$ *est un univers contenant* $\underline{U}$ *et si* $u^s_{Y\,\underline{U}}$ (*resp.* $u^s_{Y\,\underline{V}}$) *désigne l'adjoint à gauche de* u_s *relativement à l'univers* $\underline{U}$ (*resp.* $\underline{V}$), *le diagramme suivant, analogue au diagramme* 1.5.1 :

$$\begin{tikzcd} \tilde{C}_{Y\,\underline{U}} \arrow[r, "u^s_{Y\,\underline{U}}"] \arrow[d, hook] & \tilde{C}'_{Y\,\underline{U}} \arrow[d, hook] \\ \tilde{C}_{Y\,\underline{V}} \arrow[r, "u^s_{r\underline{V}}"] & \tilde{C}'_{Y\,\underline{V}} \end{tikzcd} \tag{1.7.1}$$

est commutatif à isomorphisme canonique près.

Preuve. La démonstration, dans le cas où C est un petit site, est laissée au lecteur. Elle sera complétée en 4.3 dans le cas où C est un $\underline{U}$-site.

Notation 1.8. Nous emploierons dorénavant la notation u_s pour désigner le foncteur u_s^Y. Cette notation ne risque pas d'apporter de confusion, car le foncteur u_s (défini sur les faisceaux d'ensembles) commute aux limites projectives finies.

De même, lorsque u^s est exact à gauche, nous emploierons la notation u^s pour désigner le foncteur u_Y^s. Cet abus de notation est justifié par 1.7 4).

Exemple 1.9.1. Soit X un petit espace topologique. Désignons par Ouv(X) la catégorie des ouverts de X (les objets de Ouv(X) sont les sous-ensembles ouverts de X, les morphismes de Ouv(X) sont les inclusions) munie de la topologie canonique. Une famille $(U_i \subset U), i \in I$, est couvrante si et seulement si les ouverts U_i recouvrent U (II 2.6). Les faisceaux d'ensembles sur Ouv(X) sont donc les faisceaux d'ensembles au sens de [TF]. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. On en déduit un foncteur $f^{-1} : \mathrm{Ouv}(Y) \longrightarrow \mathrm{Ouv}(X)$: pour tout ouvert U de Y, $f^{-1}(U)$ est l'image réciproque de U par l'application f. Le foncteur f^{-1} est un foncteur continu (1.6). Le foncteur $f_s^{-1} : \mathrm{Ouv}(X)^\sim \longrightarrow \mathrm{Ouv}(Y)^\sim$ est le foncteur image directe pour les faisceaux, au sens de [TF]. Le foncteur $(f^{-1})^s : \mathrm{Ouv}(Y)^\sim \longrightarrow \mathrm{Ouv}(X)^\sim$ est le foncteur image réciproque pour les faisceaux au sens de [TF]. Le foncteur $(f^{-1})^s$ commute aux limites projectives finies, grâce à 1.3 5).

Exemple 1.9.2. Soient X un espace topologique et $Y \hookrightarrow X$ un ouvert de X. Tout ouvert de Y est un ouvert de X, d'où un foncteur $\Phi : \mathrm{Ouv}(Y) \to \mathrm{Ouv}(X)$. Le foncteur Φ est continu (1.6). Le foncteur $\Phi_s : \mathrm{Ouv}(X)^\sim \longrightarrow \mathrm{Ouv}(Y)^\sim$ est le foncteur "restriction à Y". Le foncteur Φ^S_{ab} : $\text{Ouv}(Y)^{\sim}_{ab} \longrightarrow \text{Ouv}(X)^{\sim}_{ab}$ (II 6.3.3, I 1.7) est le foncteur "prolongement par zéro en dehors de Y " introduit dans [TF]. Le foncteur Φ^S : $\text{Ouv}(Y)^{\sim} \longrightarrow \text{Ouv}(X)^{\sim}$ (1.3) est analogue au foncteur "prolongement par zéro" : pour tout faisceau H sur Y et tout point $y \in Y$, la fibre en y de $\Phi^S H$ est canoniquement isomorphe à la fibre en y de H ; pour tout point $x \in X$, $x \notin Y$, la fibre en x de $\Phi^S H$ est vide. Le foncteur Φ^S est appelé le foncteur "prolongement par le vide en dehors de Y". Le foncteur Φ^S commute aux produits fibrés et aux produits finis sur un ensemble d'indices non vide, mais il ne transforme pas l'objet final de $\text{Ouv}(Y)^{\sim}$ en l'objet final de $\text{Ouv}(X)^{\sim}$.

Exemple 1.9.3. Soient C et C' deux petits sites, u : $C \longrightarrow C'$ un foncteur entre les catégories sous-jacentes qui transforme toute famille couvrante de C en famille couvrante de C'. Le foncteur u n'est pas continu en général (cf. cependant 1.6). Voici un contre-exemple. Soit S un ensemble de cardinal infini de l'univers $\underline{U}$, et C la sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles, dont les objets sont les sous-ensembles finis, non-vides, de S. On munit C de la topologie canonique. On remarquera que les familles couvrantes de C sont les familles surjectives d'applications et que les familles couvrantes ne sont pas vides. On remarquera de plus qu'il n'y a, à isomorphisme près, que deux faisceaux constants sur C : le faisceau de valeur l'ensemble vide et le faisceau de valeur l'ensemble à un élément. Posons C = C' et soit u : $C \rightarrow C'$ un foncteur constant. Le foncteur u transforme les familles couvrantes de C en familles couvrantes de C'. Le foncteur u n'est pas continu. En effet, comme les préfaisceaux représentables de C' sont des faisceaux, pour tout objet X de C', il existe un faisceau F sur C' tel que le cardinal de l'ensemble $F(X)$ soit ≥ 2, et par suite le préfaisceau u^*F n'est pas un faisceau.

2. Foncteurs cocontinus

Définition 2.1. Soient C et C' deux U-sites et $u : C \longrightarrow C'$ un foncteur entre les catégories sous-jacentes. On dit que u est cocontinu s'il possède la propriété suivante :

(COC) Pour tout objet Y de C et pour tout crible couvrant $R \hookrightarrow u(Y)$, le crible de Y engendré par les flèches $Z \longrightarrow Y$ telles que $u(Z) \rightarrow u(Y)$ se factorise par R, couvre Y.

Proposition 2.2. Soient C un petit site, C' un U-site et $u : C \longrightarrow C'$ un foncteur entre les catégories sous-jacentes. Notons $\hat{u}_* : C^\wedge \longrightarrow C'^\wedge$ le foncteur adjoint à droite au foncteur $F \longmapsto F \circ u = \hat{u}^*F$ (I 5.1). Le foncteur u est cocontinu si et seulement si pour tout faisceau G sur C, $\hat{u}_*G$ est un faisceau sur C'.

Preuve. La condition est suffisante. Supposons que pour tout faisceau G sur C, le préfaisceau $\hat{u}_*G$ soit un faisceau. Soient Y un objet de C et $R \hookrightarrow u(Y)$ un crible couvrant. On a un isomorphisme $\mathrm{Hom}(u(Y), u_*G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(R, u_*G)$, d'où par adjoinction (I 5.1) un isomorphisme $\mathrm{Hom}(\hat{u}^* \circ u(Y), G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\hat{u}^*R, G)$. On en déduit (II 5.3) que le morphisme $\hat{u}^*R \longrightarrow \hat{u}^*u(Y)$ est bicouvrant. Mais le foncteur $\hat{u}^*$ commute aux limites projectives et par suite le morphisme $\hat{u}^*R \longrightarrow \hat{u}^*u(Y)$ est un monomorphisme. C'est donc un monomorphisme couvrant. D'autre part on a un morphisme canonique $Y \xrightarrow{p} \hat{u}^*u(Y)$ déduit du morphisme d'adjonction

$id_C \longrightarrow \hat{u}^*u$, (I 5.4 3)). Faisons alors le changement de base $Y \xrightarrow{p} \hat{u}^*u(Y)$. On obtient un crible couvrant Y :

$$\hat{u}^*R \times_{\hat{u}^*u(Y)} Y \longrightarrow Y \quad ,$$

et lorsqu'on cherche les flèches $Z \to Y$ qui se factorisent par ce crible, on obtient le crible décrit par la propriété (COC).

<u>La condition est nécessaire</u> : Soient S un objet de C' et $R \hookrightarrow S$ un crible couvrant S. On doit démontrer que pour tout faisceau G sur C on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(S, u_*G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(R, u_*G) \quad .$$

Utilisant alors la proposition II 5.3 et les isomorphismes d'adjonction, on voit qu'il suffit de démontrer que le monomorphisme $\hat{u}^*R \longrightarrow \hat{u}^*S$ est couvrant. Pour cela, il suffit de démontrer (II 5.1) que pour tout changement de base $Y \longrightarrow \hat{u}^*S$ le crible $\hat{u}^*R \times_{\hat{u}^*S} Y$ est couvrant, (Y objet de C). Mais, d'après les propriétés des foncteurs adjoints et I 5.4 3), le morphisme $Y \longrightarrow \hat{u}^*S$ se factorise par $Y \xrightarrow{p} \hat{u}^*u(Y) \longrightarrow \hat{u}^*S$, et par suite le crible $\hat{u}^*R \times_{\hat{u}^*S} Y \hookrightarrow Y$ est le transformé par le changement de base $Y \xrightarrow{p} \hat{u}^*u(Y)$ du monomorphisme $\hat{u}^*R \times_{\hat{u}^*S} \hat{u}^*u(Y) \xhookrightarrow{q} \hat{u}^*u(Y)$. Or le foncteur $\hat{u}^*$ commute aux limites projectives, et par suite le monomorphisme q est le transformé par $\hat{u}^*$ du crible $R \times_S u(Y) \hookrightarrow u(Y)$, qui est couvrant. L'hypothèse (COC) nous permet alors de dire que le crible $\hat{u}^*R \times_{\hat{u}^*S} Y \hookrightarrow Y$ est couvrant, cqfd.

<u>Proposition</u> 2.3. <u>Soient</u> C <u>et</u> C' <u>deux</u> <u>U-sites</u> <u>et</u> $u : C \longrightarrow C'$ <u>un foncteur cocontinu</u>. <u>Notons</u> $u^* : \widetilde{C}' \longrightarrow \widetilde{C}$ <u>le foncteur</u> $u^* = a\hat{u}^*i'$, <u>où</u> <u>a</u> <u>désigne le foncteur</u> "<u>faisceau associé</u>" <u>pour</u> $C^\wedge$, $\hat{u}^*$ <u>le foncteur</u> $F \longmapsto F \circ u$, i' <u>le</u>

foncteur d'inclusion $\widetilde{C}' \longrightarrow C'^{\wedge}$.

1) Le foncteur u^* commute aux limites inductives et est exact.

2) On a un isomorphisme canonique $u^*\underline{a}' \simeq \underline{a}\hat{u}^*$, où $\underline{a}'$ désigne le foncteur "faisceau associé" pour $C'^{\wedge}$.

3) Le foncteur u^* admet un adjoint à droite $u_* : \widetilde{C} \longrightarrow \widetilde{C}'$. Lorsque C est petit, le diagramme

$$(2.3.1)\qquad \begin{tikzcd} C^{\sim} \arrow[r, "u_*"] \arrow[d, hook, "i"'] & \widetilde{C}' \arrow[d, hook, "i'"] \\ C^{\wedge} \arrow[r, "\hat{u}_*"] & C'^{\wedge} \end{tikzcd} ,$$

où le foncteur du bas est adjoint à droite au foncteur $\hat{u}^*$ (I 5.1), est commutatif à isomorphisme canonique près.

4) Soit $\underline{V} \supset \underline{U}$ un univers. Notons $u_{*\underline{U}} : C^{\sim}_{\underline{U}} \longrightarrow \widetilde{C}'_{\underline{U}}$ (resp. $u_{*\underline{V}} : C^{\sim}_{\underline{V}} \to \widetilde{C}'_{\underline{V}}$) le foncteur adjoint à droite relatif à l'univers $\underline{U}$ (resp. $\underline{V}$) dont l'existence est affirmé dans 3). Le diagramme

$$(2.3.2)\qquad \begin{tikzcd} C^{\sim}_{\underline{U}} \arrow[r, "u_{*\underline{U}}"] \arrow[d, hook] & \widetilde{C}'_{\underline{U}} \arrow[d, hook] \\ C^{\sim}_{\underline{V}} \arrow[r, "u_{*\underline{V}}"] & \widetilde{C}'_{\underline{V}} \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près.

Preuve. Les assertions 1) et 2) résultent immédiatement de II 3.4. L'assertion 3), lorsque C est petit, résulte de 2.2. Lorsque C est un $\underline{U}$-site, elle sera démontrée en 4.4. L'assertion 4), lorsque C est petit, résulte de l'assertion de commutativité analogue lorsque les topologies sur C et C' sont chaotiques et de I 3.5. Lorsque les topologies sur C et C' sont chaotiques, la commutativité de (2.3.2) se voit immédiatement sur la description explicite de u_* (I 5.1).

2.4. Nous ne développerons pas ici les considérations relatives aux γ-objets des catégories de faisceaux. Il nous suffira de remarquer que les foncteurs u^* et u_* introduits dans ce numéro commutent toujours aux limites projectives finies (contrairement à ce qui se passait dans le numéro précédent pour le foncteur u^s). Par suite ils se prolongent naturellement en des foncteurs définis sur les γ-objets, qui sont adjoints l'un de l'autre et qui commutent aux foncteurs "faisceau d'ensemble sous-jacent". Nous ferons les abus de notations signalés en 1.8, consistant à noter par u^* et u_* les prolongements aux γ-objets.

Proposition 2.5. Soient C et C' deux $\underline{U}$-sites et $C \underset{u}{\overset{v}{\rightleftarrows}} C'$ un couple de foncteurs, où v est adjoint à gauche de u. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Le foncteur u est continu.

ii) Le foncteur v est cocontinu.

De plus, sous ces conditions équivalentes, on a des isomorphismes canoniques $v_* \simeq u_s$, $v^* \simeq u^s$. En particulier, le foncteur u^s commute aux limites projectives finies.

Preuve. La propriété pour un foncteur d'être continu ou cocontinu ne dépend pas de l'univers $\underline{U}$ pour lequel C et C' sont des $\underline{U}$-sites (c'est immédiatement dans le cas d'un foncteur cocontinu, et cela résulte de 1.5 dans le cas d'un foncteur continu). On peut donc, quitte à augmenter l'univers, supposer que C et C' sont petits. La proposition résulte alors de 2.2 et I 5.6.

Proposition 2.6. Soit $u : C \longrightarrow C'$ un foncteur continu et cocontinu entre deux $\underline{U}$-sites. Alors le foncteur $u^* : C'^{\sim} \longrightarrow C^{\sim}$ (2.3) commute aux $\underline{U}$-limites inductives et projectives. Notons $u_! : C^{\sim} \longrightarrow C'^{\sim}$ et $u_* : C^{\sim} \longrightarrow C'^{\sim}$ les foncteurs adjoints à u^* à gauche et à droite respectivement. Le foncteur $u_!$ est pleinement fidèle si et seulement si le foncteur u_* est pleinement fidèle. Lorsque u est pleinement fidèle, $u_!$ est pleinement fidèle et la réciproque est vraie lorsque les topologies de C et C' sont moins fines que la topologie canonique.

Le foncteur u^* admet un adjoint à droite u_* (2.3) et un adjoint à gauche $u_!$ (1.2). Le foncteur u^* commute donc aux limites inductives et projectives (I 2.11). Le fait que le foncteur $u_!$ soit pleinement fidèle si et seulement si le foncteur u_* est pleinement fidèle est une propriété générale des foncteurs adjoints (I 5.7.1). Lorsque u est pleinement fidèle, le foncteur $\hat{u}_* : C^{\wedge}_{\underline{V}} \longrightarrow C'^{\wedge}_{\underline{V}}$ relatif aux $\underline{V}$-préfaisceaux, pour un univers $\underline{V}$ assez grand, est pleinement fidèle (I 5.7). Par suite le foncteur $u_* : C^{\sim} \longrightarrow \widetilde{C}'$ est pleinement fidèle en vertu de la commutativité de (2.3.1) et (2.3.2), donc $u_!$ est pleinement fidèle d'après ce qui précède. La réciproque se déduit de l'existence du diagramme commutatif 1.2 iv), compte tenu du fait que les foncteurs ε_C et $\varepsilon_{C'}$ sont pleinement fidèles lorsque les topologies sont moins fines que la topologie canonique, cqfd.

Exemple 2.7. Avec les notations de 1.9.2, le foncteur

$$\Phi : \mathrm{Ouv}(Y) \longrightarrow \mathrm{Ouv}(X)$$

est continu (1.9.2) et cocontinu (2.2). De plus, soient $i : Y \longrightarrow X$

l'injection canonique et i^{-1} : Ouv(X) $\longrightarrow$ Ouv(Y) le foncteur qu'elle permet de définir (1.9.1). Le foncteur i est adjoint à droite au foncteur Φ. On a donc une suite de trois foncteurs adjoints :

$$\begin{array}{ccc} \Phi^s , & \Phi_s & \\ & \| & \\ & \Phi^* , & \Phi_* , \end{array}$$

et des isomorphismes canoniques $\Phi^* \simeq (i^{-1})^s$, $\Phi_* \simeq i^{-1}_s$.

3. Topologie induite

3.1. Soient C' un site, C une catégorie et u : C $\longrightarrow$ C' un foncteur. Pour tout univers $\underline{U}$ tel que C' soit un $\underline{U}$-site et C une $\underline{U}$-petite catégorie, désignons par $\mathcal{C}_{\underline{U}}$ la plus fine parmi les topologies T sur C qui rendent u continu (1.1). (Une telle topologie existe grâce à II 2.2). La topologie $\mathcal{C}_{\underline{U}}$ ne dépend pas de l'univers $\underline{U}$. En effet, si $\underline{V} \supset \underline{U}$ est un univers on a $\mathcal{C}_{\underline{U}} = \mathcal{C}_{\underline{V}}$ (1.1 et 1.5). La topologie $\mathcal{C}_{\underline{U}}$ est appelée <u>la topologie induite sur</u> C <u>par la topologie de</u> C' <u>au moyen du foncteur</u> u [1].

<u>Proposition</u> 3.2. <u>Soient</u> C <u>une petite catégorie</u>, C' <u>un</u> $\underline{U}$<u>-site</u>, u : C $\rightarrow$ C' <u>un foncteur</u>, $\mathcal{C}$ <u>la topologie sur</u> C <u>induite par</u> u. <u>Soient</u> X <u>un objet de</u> C <u>et</u> R $\rightarrow$ X <u>un crible de</u> X. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

i) <u>Le crible</u> R $\hookrightarrow$ X <u>est couvrant pour</u> $\mathcal{C}$.

ii) <u>Pour tout changement de base</u> Y $\longrightarrow$ X, <u>où</u> Y <u>est un objet de</u> C, <u>le morphisme</u> $u_!(R \times_X Y) \longrightarrow u(Y)$ <u>est bicouvrant dans</u> C'^ (II 5.2).

<u>Preuve</u>. i) $\Longrightarrow$ ii) résulte de l'axiome (T1) des topologies et de 1.2.

ii) $\Longrightarrow$ i) : Pour tout faisceau F sur C', l'application

---

[1] Lorsqu'aucune confusion n'en résulte cette topologie est appelée la <u>topologie induite sur</u> C <u>par la topologie de</u> C'.

$$\mathrm{Hom}(Y,u^*F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R\times_X Y,u^*F)$$

est isomorphe, par adjonction (I 5.1), à l'application

$$\mathrm{Hom}(u(Y),F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(u_!(R\times_X Y),F)$$

qui est bijective (II 5.3). Par suite (II 2.2) le crible $R \hookrightarrow X$ est couvrant pour $\mathcal{C}$.

Corollaire 3.3. *Soient* C' *un site,* C *une catégorie,* $u : C \longrightarrow C'$ *un faisceau,* $\mathcal{C}$ *la topologie sur* C *induite par la topologie de* C'. *Soit* $(X_i \longrightarrow X)$ $i \in I$, *une famille de morphismes quarrables de* C *et supposons que* u *commute aux produits fibrés* (*). *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

i) *La famille* $X_i \longrightarrow X$, $i \in I$, *est couvrante pour* $\mathcal{C}$.

ii) *La famille* $(u(X_i) \longrightarrow u(X))$, $i \in I$, *est couvrante*.

Preuve. i) $\Longrightarrow$ ii) résulte de 1.6.

ii) $\Longrightarrow$ i) : Soit $\underline{U}$ un univers tel que C soit $\underline{U}$-petite et C' un $\underline{U}$-site. Soit $R \hookrightarrow X$ le crible engendré par les $X_i \longrightarrow X$. Le préfaisceau R est le conoyau du couple de flèches (I 2.12 et I 3.5)

$$\coprod_{i,j} X_i\times_X X_j \rightrightarrows \coprod_i X_i$$

(la somme directe est prise ici dans C^). Comme le foncteur $u_!$ commute aux limites inductives (I 5.4), le préfaisceau $u_!R$ est le conoyau du couple de flèches

$$\coprod_{i,j} u(X_i\times_X X_j) \rightrightarrows \coprod_i u(X_i) \quad .$$

Comme le foncteur u commute aux produits fibrés, le préfaisceau $u_!R$ est le conoyau du couple de flèches

(*) En fait, il suffit que u commute aux produits fibrés de la forme $X_i\times_X X'$.

$$\coprod_{i,j} u(X_i) \times_{u(X)} u(X_j) \rightrightarrows \coprod_i u(X_i) \quad ,$$

et par suite $u_! R \longrightarrow u(X)$ est un crible de $u(X)$ engendré par les $u(X_i) \longrightarrow u(X)$, $i \in I$. Utilisant encore une fois le fait que u commute aux produits fibrés, on montre que pour tout changement de base $Y \longrightarrow X$, où Y est un objet de C, $u_!(R \times_X Y) \longrightarrow u(Y)$ est un crible de $u(Y)$ engendré par les $u(X_i) \times_{u(X)} u(Y) \longrightarrow u(Y)$, $i \in I$. Comme la famille $u(X_i) \longrightarrow u(X)$, $i \in I$, est couvrante, la famille $u(X_i) \times_{u(X)} u(Y) \longrightarrow u(Y)$, $i \in I$, est couvrante. Donc $u_!(R \times_X Y) \longrightarrow u(Y)$ est un crible couvrant et par suite (3.2) $R \longrightarrow X$ est couvrant pour $\mathcal{C}$, cqfd.

Corollaire 3.4. Soient C' un U-site, C une sous-catégorie pleine de C', $u : C \longrightarrow C'$ le foncteur d'inclusion. On suppose que les produits fibrés sont représentables dans C et que u commute aux produits fibrés. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) a) Pour tout objet X de C, toute famille couvrante $(Y_j \longrightarrow X)$, $j \in J$, de C' est majorée par une famille couvrante $X_i \longrightarrow X$, $i \in I$, où les X_i sont des objets de C.

b) Il existe un petit ensemble G d'objets de C, tel que tout objet de C soit but d'une famille couvrante dans C' de morphismes dont les sources sont dans G .

ii) La topologie induite par la topologie de C' est une U-topologie (I 3.0.2) et le foncteur u est continu et cocontinu pour cette topologie.

Preuve. Résulte immédiatement de 3.3 et 2.1.

Proposition 3.5. *Soient* C *un* U*-site et* $\varepsilon_C : C \longrightarrow C^\sim$ *le foncteur canonique* (II 4.4.0). *Munissons* $C^\sim$ *de la topologie canonique. Alors la topologie du site* C *est la topologie induite par la topologie de* $C^\sim$.

Preuve. Les familles couvrantes de $C^\sim$ pour la topologie canonique sont les familles épimorphiques effectives universelles (II 2.5), i.e. (II 4.3) les familles épimorphiques. Soit T la topologie du site C et $\mathcal{C}_{\underline{U}}$ la topologie la plus fine des topologies T' sur C telles que pour tout faisceau F sur $C^\sim$, $F \circ \varepsilon_C$ soit un faisceau pour T'. Il suffit de montrer que $T = \mathcal{C}_{\underline{U}}$, car alors $\mathcal{C}_{\underline{U}}$ est une $\underline{U}$-topologie et par suite $\mathcal{C}_{\underline{U}}$ est la topologie induite.

A) *La topologie* T *est plus fine que* $\mathcal{C}_{\underline{U}}$: Soit $(X_i \longrightarrow X)$, $i \in I$, une famille couvrante de $\mathcal{C}_{\underline{U}}$. Alors pour tout faisceau F sur $C^\sim$, $F(\varepsilon_C(X) \longrightarrow \prod_i F(\varepsilon_C(X_i))$ est injective et par suite (II 5.2) $(\varepsilon_C X_i \longrightarrow \varepsilon_C X)$, $i \in I$, est couvrante pour la topologie canonique de $C^\sim$, donc (II 5.2) $(X_i \longrightarrow X)$, $i \in I$, est couvrante pour T.

B) *La topologie* T *est moins fine que* $\mathcal{C}_{\underline{U}}$: Il suffit de montrer que $\varepsilon_C : C \longrightarrow C^\sim$ est continu (1.1). Or on démontrera en IV n° 1 que tout faisceau sur $C^\sim$ est représentable et par suite, pour tout faisceau F sur $C^\sim$, $F \circ \varepsilon_C$ est un faisceau sur C. (On n'utilisera pas 3.5 jusqu'à IV 1).

Notons deux résultats qui seront utilisés en VI 7.

Proposition 3.6. *Soient* $(C_i)_{i\in I}$ *une famille de sites,* C *une catégorie et pour tout* $i \in I$, $u_i : C_i \longrightarrow C$ *un foncteur,* $\mathcal{U}$ *un univers tel que les catégories* C_i *et* C *soient* $\underline{U}$*-petites. Il existe une topologie* $\mathcal{C}_{\underline{U}}$ *sur* C *qui est la moins fine des topologies pour lesquelles les* u_i *soient continus. La topologie* $\mathcal{C}_{\underline{U}}$ *ne dépend pas de l'univers* $\underline{U}$ *pour lequel les catégories considérées sont petites.*

La dernière assertion de 3.6 résulte de 1.5.

Soit T une topologie sur C. Alors les foncteurs u_i sont continus si et seulement si pour tout $i \in I$ et pour tout crible couvrant $R \hookrightarrow X$ d'un objet X de

C_i , le morphisme

$$u_{i\,!}(R) \longrightarrow u_i(X)$$

de $\hat{C}$ est bicouvrant (1.2 (ii)). Donc 3.6 est une conséquence du

Lemme 3.6.1 Soient C une petite catégorie, $(u_i : F_i \longrightarrow G_i)_{i \in I}$ une famille de flèches de $\hat{C}$. Alors il existe sur C une topologie la moins fine parmi celles qui rendent les morphismes u_i couvrants (resp. bicouvrants) (II 5.2).

Dire que $u : F \longrightarrow G$ est couvrant pour une topologie donnée T signifie que pour toutes flèche $X \longrightarrow G$, avec $X \in \mathrm{Ob}\ C$, la flèche $F \times_G X \longrightarrow X$ correspondante est couvrante, ou encore que la famille des flèches $X' \longrightarrow X$ de C qui se factorisent par la flèche précédente est couvrante. Le fait qu'il existe une topologie la moins fine parmi celles pour lesquelles les $u_i : F_i \longrightarrow G_i$ sont couvrants résulte donc de I 1.1.6, d'où l'assertion non respée de 3.6.1. L'assertion respée s'en déduit, en se rappelant qu'un morphisme $u : F \longrightarrow G$ est bicouvrant si et seulement si les morphismes $u : F \longrightarrow F$ et $\mathrm{diag}_u : F \longrightarrow F \times_G G$ sont couvrants.

Proposition 3.7. Soient $(C_i)_{i \in I}$ une famille de sites, C une catégorie, pour tout $i \in I$, $u_i : C_i \longrightarrow C$ un foncteur, et $\underline{\mathcal{U}}$ un univers tel que les catégories C_i et C soient $\underline{U}$-petites. Il existe une topologie $\mathcal{E}_{\underline{U}}$ qui est la plus fine pour laquelle les u_i sont cocontinus . La topologie $\mathcal{E}_{\underline{U}}$ ne dépend pas de l'univers $\underline{U}$ pour lequel les catégories considérées sont petites.

Soit $\underline{U}$ un univers pour lequel les catégories considérées sont petites. Les foncteurs u_i sont cocontinus pour une topologie $\mathcal{E}$ de C si et seulement si pour tout $i \in I$ et tout faisceau F sur C_i le préfaisceau $\hat{u}_{i*}F$ est un faisceau pour $\mathcal{E}$ (2.2). Il en résulte que la topologie $\mathcal{E}_{\underline{U}}$ est la topologie la plus fine pour laquelle les préfaisceaux $\hat{u}_{i*}F$, $i \in I$, $F \in \mathrm{ob}\ C_i$, sont des faisceaux (II 2.2). La dernière assertion résulte de 2.2.

4. Lemme de comparaison

Théorème 4.1 (*lemme de comparaison*). *Soient* C *une petite catégorie*, C' *un site dont la catégorie sous-jacente est une* U-*catégorie et* $u : C \to C'$ *un foncteur* pleinement fidèle. *Munissons* C *de la topologie induite par* u (3.1). *Considérons les propriétés* :

i) *Tout objet de* C' *peut être recouvert par des objets provenant de* C.

ii) *Le foncteur* $F \mapsto F\circ u$ *induit une équivalence de catégories de la catégorie des faisceaux sur* C' *dans la catégorie des faisceaux sur* C.

On a toujours i) $\Longrightarrow$ ii). *Lorsque* C' *est un* U-*site et lorsque la topologie de* C' *est moins fine que la topologie canonique, on a* ii) $\Longrightarrow$ i).

4.1.1. Démontrons d'abord i) $\Longrightarrow$ ii). La démonstration se fait en deux pas.

Premier pas. *Pour tout préfaisceau* H *de* $C'^{\wedge}$ *le morphisme d'adjonction* $\varphi : u_! u^* H \longrightarrow H$ (I 5.1) *est bicouvrant* (II 5.3) *et le foncteur* $u_s : \widetilde{C}' \to \widetilde{C}$ (1.1.1) *est pleinement fidèle*.

Soit C/H la petite catégorie dont les objets sont les objets Y de C muni d'un morphisme $u(Y) \longrightarrow H$, et dont les morphismes sont les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} u(Y) \arrow[rr, "u(m)"] \arrow[dr] & & u(Y') \arrow[dl] \\ & H & \end{tikzcd}$$

On a $u^*H = \varinjlim_{Y \in \mathrm{ob}\, C/H} Y$ (I 3.4) et par suite (I 5.4) $u_! u^* H = \varinjlim_{Y \in \mathrm{ob}\, C/H} u(Y)$.

Le morphisme d'adjonction est le morphisme évident qui résulte de la description de $u_! u^* H$ comme limite inductive. Le morphisme φ possède la propriété suivante : (*) Pour tout objet Y de C, tout morphisme $m : u(Y) \to H$ se factorise de manière unique en le morphisme canonique $\alpha(m) : u(Y) \to u_! u^* H$ et le morphisme φ. Il résulte immédiatement de i) que le morphisme φ est couvrant (II 5.1), montrons qu'il est bicouvrant. Soient $p, q : Z \rightrightarrows u_! u^* H$ deux morphismes d'un objet Z de C' dans H' tels que $\varphi p = \varphi q$. Pour tout objet Y de C et tout morphisme $n : u(Y) \longrightarrow Z$, on a $\varphi p n = \varphi q n$. La propriété (*) entraîne alors que $pn = qn$, et comme les $u(Y)$ recouvrent Z, le noyau de (p,q) est un crible couvrant Z. Le morphisme φ est donc bicouvrant (II 5.3). Pour tout faisceau H sur C', $u^* H$ est un faisceau sur C noté $u_s H$ (1.1.1). On a de plus $u^s u_s H = \underline{a}' u_! u_s H$ (1.3), et le morphisme d'adjonction $u^s u_s H \longrightarrow H$ s'obtient en appliquant le foncteur "faisceau associé" au morphisme $\varphi : u_! u^* H \longrightarrow H$. Par suite (II 5.3) le morphisme d'adjonction $u^s u_s H \longrightarrow H$ est un isomorphisme. Donc $u_s : \widetilde{C}' \longrightarrow \widetilde{C}$ est pleinement fidèle.

<u>Deuxième pas</u>. <u>Le foncteur</u> u <u>est cocontinu et le foncteur</u> $u^s : C^\sim \to C'^\sim$ (1.2) <u>est pleinement fidèle</u>. <u>Par suite</u> $u_s : C'^\sim \longrightarrow C^\sim$ <u>est une équivalence</u>. Soient Y un objet de C et $i : R \hookrightarrow u(Y)$ un crible couvrant. Comme le foncteur u^* commute aux limites projectives (I 5.5) le morphisme $u^*(i) : u^*(R) \hookrightarrow u^* u(Y)$ est un monomorphisme. Comme u est pleinement fidèle, on a $u^* u(Y) \simeq Y$, d'où un crible de Y, $u^*(i) : u^*(R) \longrightarrow Y$. Pour montrer que u est cocontinu, il suffit de montrer que $u^*(i) : u^*(R) \hookrightarrow Y$ est un crible couvrant pour la topologie induite sur C (2.1). Pour cela, il suffit de montrer (3.2) que pour tout changement de base $m : X \to Y$, le morphisme $u_!(u^*(R) \times_Y X) \longrightarrow u(X)$ est bicouvrant. Mais comme u^* commute

aux limites projectives, on a $u^*(R)\times_Y X = u^*(R\times_{u(Y)} u(X))$ et $R\times_{u(Y)} u(X)$ est un crible couvrant X. Il suffit donc de montrer que pour tout objet Y de C et tout crible couvrant $i : R \hookrightarrow u(Y)$, le morphisme de $C'^{\wedge}$, $u_! u^*(R) \xrightarrow{u_! u^*(i)} u(Y)$, est bicouvrant. Or ce morphisme se factorise en le morphisme d'adjonction $u_! u^*(R) \longrightarrow R$, qui est bicouvrant (premier pas), et le monomorphisme $R \hookrightarrow u(Y)$ qui est couvrant. Il est donc bicouvrant (II 5.3). Ceci montre que u est cocontinu. Comme u est continu et pleinement fidèle, il résulte de 2.6 (utilisé dans le cas où C est peti que u^s (noté $u_!$ dans 2.6) est pleinement fidèle. Comme u^s et u_s sont adjoints l'un de l'autre et qu'ils sont pleinement fidèles, ce sont des foncteurs quasi-inverses et par suite u_s est une équivalence.

4.1.2. Démontrons maintenant que ii) $\Longrightarrow$ i). Les objets Y de C forment une famille génératrice de $C^{\sim}$ (II 4.10) et par suite, pour tout objet X de C', il existe une famille épimorphique (dans $C^{\sim}$) $v_i : Y_i \to u_s X$, $i \in I$. On a $u_s u(Y_i) = Y_i$ et, le foncteur u_s étant une équivalence de catégories, on a $v_i = u_s(x_i)$, où les $w_i : u(Y_i) \longrightarrow X$ forment une famille épimorphique de $C'^{\sim}$. Il résulte alors de II 5.1 que la famille $w_i : u(Y_i) \longrightarrow X$, $i \in I$, est couvrante.

4.2. <u>Fin de la démonstration de</u> 1.2.

Soient G une sous-catégorie pleine de C dont les objets forment une petite famille topologiquement génératrice de C (II 3.0.1). Munissons G de la topologie induite par le foncteur d'inclusion $i : G \longrightarrow C$ (3.1) Le foncteur $(u\circ i)_s = i_s \circ u_s$ (1.1.1) admet un adjoint à gauche d'après la première partie de la démonstration de 1.2. Comme i_s est une équivalence de catégories (4.1), le foncteur u_s admet un adjoint à gauche u^s et on a un isomorphisme fonctoriel $u^s \simeq (u\circ i)^s \circ i_s$. Montrons que le diagramme

(4.2.1)
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & C' \arrow[d, "\varepsilon_{C'}"] \\ C^{\sim} \arrow[r, "u^s"] & \widetilde{C}' \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près. Pour tout faisceau H sur C', on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\varepsilon_{C'}\, u\, X, H) \simeq u_s\, H\, (X)$, pour tout $X \in \mathrm{ob}\, C$. On a de plus $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(u^s\varepsilon_C\, X, H) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_C X, u_s H)$ par adjonction, puis $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_C X, u_s H) \simeq u_s H(X)$ par définition de ε_C. D'où un isomorphisme $\varepsilon_{C'} u\, X \simeq u^s\, \varepsilon_C\, X$ pour tout $X \in \mathrm{ob}\, C$. Ceci démontre i) $\Longrightarrow$ iv). Montrons que iv) $\Longrightarrow$ i). On a un diagramme commutatif

(4.2.2)
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varepsilon_G"'] & C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\varepsilon_C"] & C' \arrow[d, "\varepsilon_{C'}"] \\ \widetilde{G} \arrow[r, "i^s"] & \widetilde{C} \arrow[r, "u^s"] & \widetilde{C}' \end{tikzcd},$$

et par suite, d'après la première partie de la démonstration, le foncteur $i\circ u : G \longrightarrow C'$ est continu. On en déduit aussitôt par 4.1 et 1.1 que u est continu, d'où iv) $\Longrightarrow$ i). On obtient de plus l'unicité de u^s ; connaissant, par la première partie de la démonstration, l'unicité lorsque C est petit.

4.3. Fin de la démonstration de 1.5 et de 1.7

Soient $u : C \longrightarrow C'$ un foncteur entre deux $\underline{U}$-sites et G une sous-catégorie pleine de C dont l'ensemble des objets est une petite famille topologiquement génératrice de C (II 3.0.1). Munissons G de la topologie induite par le foncteur d'inclusion $i : G \longrightarrow C$. Il résulte immédiatement de 4.1 et de 1.1 que u est continu si et seulement si $u_{\circ}i$ est continu. De cette remarque et de la première partie de la démonstration de 1.5 résulte le cas général. Cette remarque permet aussi de ramener la démonstration de 1.7 au cas où la catégorie C est petit

4.4. Fin de la démonstration de 2.3.

Soient $u : C \longrightarrow C'$ un foncteur entre deux $\underline{U}$-sites, G une sous-catégorie pleine de C dont l'ensemble des objets est une petite famille topologiquement génératrice de C (II 3.0.1), munie de la topologie induite par le foncteur d'inclusion $i : G \longrightarrow C$. Il résulte de la démonstration de 4.1 (4.1.1 deuxième pas) que i est cocontinu. Par suite, lorsque u est cocontinu, le foncteur $u \circ i : G \longrightarrow C'$ est cocontinu. De plus, $i^{*} : \tilde{C}' \longrightarrow \tilde{G}$ est une équivalence de catégories (4.1). Donc le foncteur $u^{*} : \tilde{C}' \longrightarrow \tilde{C}$ admet un adjoint à droite. Ceci démontre 3). Pour démontrer 4), il suffit de remarquer que $(u \circ i)_{*} \simeq u_{*} \circ i_{*}$ et que i_{*} est une équivalence (4.1). La commutativité de (2.3.2) résulte alors de la commutativité de ces diagrammes lorsque C est petit.

5. Localisation

5.1. Soient maintenant C un U-site et X un objet de $C^\wedge$. Sauf mention expresse du contraire la catégorie C/X sera munie de la topologie $\mathcal{C}$ induite par le foncteur $j_X : C/X \longrightarrow C$ (3.1). La notation C/X désignera la catégorie C/X munie de la topologie $\mathcal{C}$. La proposition I 5.11 nous montre que le foncteur $j_{X!}$ commute aux produits fibrés et par suite transforme tout monomorphisme en monomorphisme. En particulier, pour tout objet $(Y \longrightarrow X)$ de C/X, le foncteur $j_{X!}$ établit une correspondance biunivoque entre les cribles, dans la catégorie C/X, de l'objet $(Y \longrightarrow X)$ et les cribles, dans C, de l'objet Y.

Proposition 5.2. *Soient* C *un* U*-site*, X *un objet de* $C^\wedge$ *et* $j_X : C/X \longrightarrow C$ *le foncteur continu correspondant*.

1) *Un crible* R *d'un objet* $(Z \longrightarrow X)$ *est couvrant dans* C/X *si et seulement si le crible* $j_{X!}(R) \hookrightarrow Z$ *est couvrant dans* C.

2) *Le foncteur* $j_X : C/X \longrightarrow C$ *est cocontinu et continu*.

3) *Soit* $m : Y \longrightarrow X$ *un morphisme de* $C^\wedge$. *On a alors le diagramme commutatif* :

$$\begin{tikzcd} C/Y \arrow[rr, "j_m"] \arrow[dr, "j_Y"'] & & C/X \arrow[dl, "j_X"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

La topologie induite par le foncteur j_Y *sur* C/Y *est égale à la topologie induite par* j_m *sur* C/Y.

4) *La topologie induite par* $j_X : C/X \longrightarrow C$ *est une* U*-topologie* (II 3.0.2).

Preuve. 1) Si le crible R de $(Z \longrightarrow X)$ est couvrant, le crible $j_{X!}(R) \hookrightarrow Z$ est couvrant (1.6).

Réciproquement, si le crible $j_{X!}(R) \longrightarrow Z$ est couvrant dans C, on voit qu'il en est de même pour tout crible obtenu en faisant un changement de base dans C/X. Le crible R est donc couvrant (3.2).

2) Se déduit immédiatemant de 1) en appliquant 2.1.

3) Se déduit immédiatemant de la description des cribles couvrants donnée par 1).

4) Soit $(G)_i, i \in I$, une petite famille topologiquement génératrice de C. On vérifie immédiatement que la petite famille $(u : G_i \longrightarrow X)$, $u \in \coprod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(G_i, X)$, est topologiquement génératrice dans C/X .

Terminologie et notations 5.3. D'après la proposition précédente le foncteur j_X est à la fois un foncteur continu et cocontinu. Il définit donc une suite de trois foncteurs adjoints (4.3.2.) entre les catégories de faisceaux d'ensembles (1.3 et 2.3) :

$$\begin{aligned} j_X^s \quad &: \quad (C/X)^\sim \longrightarrow C^\sim \\ j_X^* = j_{X,s} \quad &: \quad C^\sim \longrightarrow (C/X)^\sim \\ j_{X*} \quad &: \quad (C/X)^\sim \longrightarrow C^\sim \quad . \end{aligned}$$

Dans la situation particulière de la proposition 5.2 nous emploierons la terminologie et les notations suivantes :

1) Le foncteur j_{X*} sera appelé le foncteur image directe.

2) Le foncteur $j_{X,s} = j_X^*$ sera noté j_X^* et sera appelé le foncteur restriction à C/X.

3) Le foncteur j_X^s sur les faisceaux d'ensembles sera appelé le "foncteur prolongement par le vide à la catégorie C" et sera noté $j_{X!}$ (cf. 2.9.2).

On a donc une suite de trois foncteurs adjoints entre $(C/X)^\sim$ et $C^\sim$:

$$j_{X!}\ ,\quad j_X^*\ ,\quad j_{X*}\qquad .$$

Proposition 5.4. Le foncteur $j_{X!}:(C/X)^\sim \longrightarrow C^\sim$ se factorise par la catégorie $C^\sim/\underline{a}X$ ($\underline{a}$ est le foncteur faisceau associé) : $(C/X)^\sim \xrightarrow{e_X^\sim} C^\sim/\underline{a}X \longrightarrow C^\sim$. Le foncteur :

$$e_X^\sim\ :\ (C/X)^\sim \longrightarrow \widetilde{C}/\underline{a}X$$

est une équivalence de catégories. Le foncteur restriction à C/X, composé avec l'équivalence $e_X^\sim$, est isomorphe au foncteur "changement de base par $\underline{a}X \longrightarrow \varepsilon$", ($\varepsilon$ l'objet final de $C^\sim$) : $F \longmapsto (F \times \underline{a}X \xrightarrow{pr_2} \underline{a}X)$.

Preuve. L'image par $j_{X!}$ de l'objet final de $(C/X)^\sim$ est l'objet $\underline{a}X$; d'où la factorisation. Pour montrer que le foncteur $e_X^\sim$ est une équivalence, nous nous bornerons à quelques indications. D'après I 5.11, un préfaisceau sur C/X est défini par un préfaisceau F sur C muni d'un morphisme $F \longrightarrow X$. On démontre alors que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Le préfaisceau sur C/X défini par $F \longrightarrow X$ est un faisceau.

ii) Le diagramme suivant est cartésien (on dénote par i et $\underline{a}$ les foncteurs injection dans les préfaisceaux, et faisceau associé) :

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & i\underline{a}F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & i\underline{a}X \end{array}\qquad .$$

On en déduit alors immédiatement que $e_X^{\sim}$ est une équivalence. La dernière assertion est triviale.

Proposition 5.5. 1) *Soient* C *un* $\underline{U}$*-site*, X *un objet de* $C^{\wedge}$. *Le diagramme ci-dessous de catégories et foncteurs est commutatif à isomorphismes canoniques près :*

$$\begin{tikzcd}
C/X \arrow[r, "h_X"] \arrow[d] & (C/X)^{\wedge} \arrow[r, "\underline{a}_X"] \arrow[d, "e_X^{\wedge}"] & (C/X)^{\sim} \arrow[rr, "i_X"] \arrow[d, "e_X^{\sim}"] & & (C/X)^{\wedge} \arrow[d, "e^{\wedge}/X"] \\
C/X \arrow[r, "h/X"] & C^{\wedge}/X \arrow[r, "\underline{a}/X"] & C^{\sim}/\underline{a}X \arrow[r, "i/\underline{a}X"] & C^{\wedge}/i\underline{a}X \arrow[r, "\pi"] & C^{\wedge}/X
\end{tikzcd}$$

Les notations $\underline{a}_X$ *et* i_X *désignent les foncteurs "faisceau associé" et injection dans les préfaisceaux pour le site* C/X . *La notation* $\underline{a}/X$ *désigne le prolongement naturel du foncteur* $\underline{a}$ *(faisceau associé pour le site* C) *à la catégorie des flèches de but* X , *de même pour la notation* $i/\underline{a}X$. *Enfin la notation* π *désigne le foncteur changement de base par la flèche canonique* $X \longrightarrow i\underline{a}X$.

2) *Soit de plus* $m : Y \longrightarrow X$ *un morphisme de* $C^{\wedge}$. *Le diagramme ci-après est commutatif à isomorphisme canonique près :*

$$\begin{tikzcd}
C^{\sim}/\underline{a}X/\underline{a}Y \arrow[d, equal] & & (C/X)^{\sim}/\underline{a}_X Y \arrow[ll, "f"'] \\
& & & (C/X/Y)^{\sim} \arrow[ul, "g"'] \arrow[dl, "e_m^{\sim}"] \\
C^{\sim}/\underline{a}Y & & (C/Y)^{\sim} \arrow[ll, "e_Y^{\sim}"']
\end{tikzcd}$$

La flèche f *est le prolongement naturel de l'équivalence* $e^{\sim}/X$ *à la catégorie des flèches de but* $\underline{a}_X Y$, *et est par suite une équivalence de catégories*. *La flèche* g *n'est autre que l'équivalence de* 5.4 *appliquée à la situation* $(C/X)/[m]$.

3) *Désignons par* $j_{\underline{a}X\,!} : C^{\sim}/\underline{a}X \longrightarrow C^{\sim}$ *le foncteur* "*oublions* $\underline{a}X$ ", *et par* $j^{*}_{\underline{a}X} : C^{\sim} \longrightarrow C^{\sim}/\underline{a}X$ *le foncteur* "*produit par* $\underline{a}X$ ". *Les diagrammes ci-après sont commutatifs à isomorphisme canonique près* :

$$
\begin{tikzcd}
(C/X)^{\sim} \arrow[r, "j_{X!}"] \arrow[d] & C^{\sim} \arrow[d, equal] \\
C^{\sim}/\underline{a}X \arrow[r, "j_{\underline{a}X!}"] & C^{\sim}
\end{tikzcd}
\quad , \quad
\begin{tikzcd}
C^{\sim} \arrow[r, "j^{*}_{X}"] \arrow[d, equal] & (C/X)^{\sim} \arrow[d, "e^{\sim}/X"] \\
C^{\sim} \arrow[r, "j^{*}_{\underline{a}X}"] & C^{\sim}/\underline{a}X
\end{tikzcd}
\quad .
$$

Preuve. La preuve de ces assertions est immédiate à partir de la définition des équivalences $e^{\sim}_X$ (5.4) et $e^{\wedge}_X$ (I 5.11).

BIBLIOGRAPHIE

[TF] R. Godement, théorie des faisceaux, Hermann, 1958. Act. Scient. Ind n° 1252, (Paris).

E X P O S E IV

TOPOS

par A. Grothendieck et J. L. Verdier

0. Introduction

0.1. Nous avons vu dans II diverses propriétés d'exactitude de catégories de la forme $\tilde{\underline{C}}$ = catégorie des faisceaux d'ensembles sur $\underline{C}$, où $\underline{C}$ est un petit site, propriétés qu'on peut exprimer en disant qu'à beaucoup d'égards, ces catégories (que nous appelerons des topos) héritent des propriétés familières de la catégorie (Ens) des (petits) ensembles. D'un autre côté, l'expérience a enseigné qu'il y a lieu de considérer diverses situations en Mathématique surtout comme un moyen technique pour construire les catégories de faisceaux (d'ensembles) correspondantes, i.e. les "topos" correspondants. Il apparaît que toutes les notions vraiment importantes liées à un site (par exemple ses invariants cohomologiques, étudiés dans V, divers autres invariants "topologiques", tels ses invariants d'homotopie étudiés récemment par M. ARTIN et B. MAZUR [1] et les notions étudiées dans le livre de J. GIRAUD sur la cohomologie non commutative) s'expriment en fait directement en termes du topos associé. Dans cette optique, il convient de regarder deux sites comme étant essentiellement équivalents lorsque les topos associés sont des catégories équivalentes, et de considérer que la donnée d'un site (du moins dans le cas, surtout important en pratique , où sa topologie est moins fine que sa topologie canonique) revient à celle d'un topos $\underline{E}$ (savoir le topos associé, formé des faisceaux d'ensembles sur le site), et d'une famille génératrice d'éléments de $\underline{E}$

(cf. II 4.9, et 1.2.1 ci-dessous). Ce point de vue est analogue à celui qui consiste à associer un groupe à tout système de générateurs et tout système de relations entre ces générateurs, et à attacher son intérêt plutôt à la structure de ce groupe qu'au système de générateurs et relations qui ont servi à l'engendrer (considérés comme des données accessoires de la situation). D'ailleurs le "lemme de comparaison" III 5.1. fournit de nombreux exemples de couples de sites $\underline{C}$, $\underline{C}'$ non isomorphes, et même non équivalents en tant que catégories, et donnant naissance à des topos équivalents, de sorte qu'il y a lieu de considérer $\underline{C}$ et $\underline{C}'$ comme essentiellement équivalents.

0.2. Dans le présent exposé, nous donnons une caractérisation des topos par des propriétés d'exactitude simples (due à J. GIRAUD), nous étudions la notion naturelle de morphisme de topos, inspirée par la notion d'application continue d'un espace topologique dans un autre, et nous développons dans le cadre des topos certaines constructions familières en théorie des faisceaux habituelle (faisceaux $\underline{\mathrm{Hom}}$, faisceaux produit tensoriel, supports). Enfin, nous montrons (en suivant M. ARTIN) comment on peut réconstituer un topos à partir d'un "ouvert" de celui-ci, du "fermé" complémentaire, et d'un certain foncteur exact à gauche qui les relie, qui, a peu de choses près, peut être choisi d'ailleurs arbitrairemen

0.3. On a là un procédé de recollement de topos qui, appliqué à des topos provenant d'espaces topologiques ordinaires, donnera en général un topos qui ne sera plus du même type. Cela est une première indication de la stabilité remarquable de la notion de topos par diverses constructio naturelles, qui manque à la notion d'espace topologique (dont la notion de topos est inspirée). Pour un deuxième exemple remarquable, signalons aussi celle de topos classifiant relatif à un groupe d'un topos (cf. [1] ou 5.9 ci-dessous), inspirée de la notion classique d'espace classifiant d'un groupe topologique, et la notion de "topos modulaire" associé à divers "problèmes de modules" en Géométrie Algébrique ou en Géométrie Analytique [10] [13].

D'autre topos, tel le <u>topos étale</u> d'un schéma (étudié systématiquement dans le présent Séminaire, à partir de Exp. VII) ou le <u>topos cristallin</u> d'un schéma relatif [6] s'introduisent de façon naturelle lorsqu'on veut développer pour des variétés algébriques abstraites (et plus généralement des schémas) des théories de cohomologie utilisables, qui remplacent la cohomologie de Betti classique des variétés algébriques sur le corps des complexes.

0.4. On peut donc dire que la notion de topos, dérivé naturel du <u>point de vue faisceautique</u> en Topologie, constitue à son tour un élargissement substantiel de la notion d'espace topologique (*), englobant un grand nombre de situations qui autrefois n'étaient pas considérées comme relevant de l'intuition topologique. Le trait caractéristique de telles situations est qu'on y dispose d'une notion de "localisation", notion qui est formalisée précisément par la notion de site et, en dernière analyse, par celle de topos (via le topos associé au site). Comme le terme de "topos" lui-même est censé précisément le suggérer, il semble raisonnable et légitime aux auteurs du présent Séminaire de considérer que l'objet de la Topologie est l'étude des <u>topos</u> (et non des seuls espaces topologiques).

0.5. Il nous a semblé utile d'inclure dans cet exposé général sur les topos un assez grand nombre d'exemples, dont beaucoup n'ont que des

---

(*) Cf. [9], ou 4.1 et 4.2 plus bas, pour les relations précises entre la notion de topos et celle d'espace topologique.

rapports lointains avec le but initial que se proposait ce séminaire, (c'est-à-dire l'étude de la cohomologie étale). Le lecteur pressé, intéressé exclusivement par la cohomologie étale, pourra bien entendu omettre sans inconvénients la lecture de ces exemples, ainsi d'ailleurs que de la plus grande partie du présent exposé, auquel il lui suffira de se reporter en cas de besoin.

1. Définition et caractérisation des topos

Définition 1.1. On appelle $\underline{U}$-topos, ou simplement topos si aucune confusion n'est à craindre, une catégorie E telle qu'il existe un site $C \in \underline{U}$ tel que E soit équivalente à la catégorie $C^{\sim}$ des $\underline{U}$-faisceaux d'ensembles sur C.

1.1.1. Soit E un $\underline{U}$-topos. Nous considérons toujours E comme muni de sa topologie canonique (II 2.5), qui en fait donc un site, et même, en vertu de 1.1.2 d) ci-dessous, un $\underline{U}$-site (II 3.0.2). Sauf mention expresse du contraire, nous ne considérerons pas d'autre topologie sur E que celle qu'on vient d'expliciter.

1.1.2. On a vu dans II 4.8, 4.11 qu'un $\underline{U}$-topos E est une $\underline{U}$-catégorie (I 1.1) satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Les limites projectives finies sont représentables dans E.

b) Les sommes directes indexées par un élément de $\underline{U}$ sont représentables dans E. Elles sont disjointes et universelles (II 4.5).

c) Les relations d'équivalence dans E sont effectives universelles (I 10.6).

d) E admet une famille génératrice (II 4.9) indexée par un élément de $\underline{U}$.

En fait, nous allons voir que ces propriétés intrinsèques caractérisent les $\underline{U}$-topos:

Théorème 1.2 (J. Giraud). Soit E une $\underline{U}$-catégorie. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) E est un $\underline{U}$-topos (1.1).

ii) E satisfait aux conditions a), b), c) et d) de 1.1.2.

iii) Les $\underline{U}$-faisceaux sur E pour la topologie canonique sont représentables, et E possède une petite famille génératrice (condition 1.1.2 d)).

iv) Il existe une catégorie $C \in \underline{U}$ et un foncteur pleinement fidèle $i : E \longrightarrow \hat{C}$ (où $\hat{C}$ désigne la catégorie des $\underline{U}$-préfaisceaux sur C) admettant un adjoint à gauche a qui est exact à gauche.

i') Il existe un site $C \in \underline{U}$, tel que les limites projectives soient représentables dans C et que la topologie de C soit moins fine que sa topologie canonique (II 2.5), tel que E soit équivalent à la catégorie $C^{\sim}$ des $\underline{U}$-faisceaux d'ensembles sur C.

De plus :

Corollaire 1.2.1. Soit E un $\underline{U}$-topos, C une sous-catégorie pleine de E, qu'on munit de la topologie induite (III 3.1) par celle de E (1.1.1). Considérons le foncteur

$$E \longrightarrow C^{\sim}$$

qui associe à tout $X \in \mathrm{ob}\, E$ la restriction à C du foncteur représenté par X. Ce foncteur est une équivalence de catégories si et seulement si ob C est une famille génératrice de E.

L'équivalence i) $\Longleftrightarrow$ iv) résulte aussitôt de II 5.5 , et on a déjà rappelé plus haut qu'on a i) $\Longrightarrow$ ii). Comme i') $\Longrightarrow$ i) trivialement, il reste à prouver ii) $\Longrightarrow$ iii) et iii) $\Longrightarrow$ i'), ce qui sera fait dans 1.2.4 et 1.2.3 ci-dessous. Le corollaire s'obtient alors en remarquant que le foncteur envisagé se factorise en $E \longrightarrow E^{\sim} \longrightarrow C^{\sim}$, de sorte que, $E \longrightarrow E^{\sim}$ étant une équivalence en vertu de (iii), la question revient à celle de déterminer quand $E^{\sim} \longrightarrow C^{\sim}$ est une équivalence. On conclut alors grâce au "lemme de comparaison" III 4.1 , cf. démonstration 1.2.3 ci-dessous.

1.2.3. <u>Démonstration de</u> iii) $\Longrightarrow$ i'). Soit $\mathcal{X}=(X_i)_{i\in I}$, $I\in \underline{U}$, une petite famille génératrice de E. Comme E est une $\underline{U}$-catégorie, l'ensemble des classes d'isomorphie de diagrammes finis dans E dont les objets sont des éléments X_i est $\underline{U}$-petit. Par suite le plus petit ensemble $\mathcal{X}'$ d'objets de E, contenant les limites projectives finies d'objets de $\mathcal{X}$, est une réunion dénombrable de petits ensembles et est donc petit (*). Posant $\mathcal{X}^{(n+1)}=\mathcal{X}^{(n)(1)}$, et $\mathcal{X} = \bigcup_n \mathcal{X}^{(n)}$, on voit que, quitte à augmenter la famille de générateurs, on peut supposer que $\mathcal{X}$ est stable par limites projectives finies. Soit $\underline{V}$ un univers contenant $\underline{U}$ tel que E soit $\underline{V}$-petite. Pour tout objet H de E, notons I(H) l'ensemble $\coprod_{i\in I} \mathrm{Hom}(X_i,H)$. Soient H un objet de E et $H' \hookrightarrow H$ le sous-faisceau de H, pour la topologie canonique, "réunion" des images des morphismes $u : X_i \longrightarrow H$, $(u,i) \in I(H)$ (II 4.1). Comme H' est un sous-faisceau d'un $\underline{U}$-faisceau, H' est un $\underline{U}$-faisceau. Il est donc représentable. Comme la famille $\mathcal{X}$ est génératrice et que pour tout $i \in I$, l'application $\mathrm{Hom}(X_i,H') \longrightarrow \mathrm{Hom}(X_i,H)$ est bijective, le morphisme $H' \hookrightarrow H$ est un isomorphisme (II 4.9). Par suite (II 6.1) la famille $(u:X_i \longrightarrow H)$, $(u,i) \in I(H)$, est couvrante pour la topologie canonique de E.

(*) Nous raisonnons ici sur les classes d'objets de E à isomorphisme près.

Donc tout objet de E peut être recouvert, pour la topologie canonique de E, par des objets de $\mathcal{K}$. Soient C la sous-catégorie pleine de E définie par les objets de $\mathcal{K}$ et $u : C \hookrightarrow E$ le foncteur d'inclusion. La topologie $\mathcal{C}$ induite sur C par la topologie canonique de E est moins fine que la topologie canonique de C, et lorsque $\underline{U}$ possède un élément de cardinal infini, les limites projectives finies sont représentables dans C. Il résulte de III 5.1 que le foncteur $F \longmapsto F \circ u$ est une équivalence de E sur la catégorie des $\underline{U}$-faisceaux sur C pour la topologie $\mathcal{C}$, cqfd.

1.2.4. Démonstration de ii) $\Longrightarrow$ iii). La démonstration comporte quatre pas.

Soit $\underline{V}$ un univers contenant $\underline{U}$, tel que E soit un élément de $\underline{V}$. Soient $\widetilde{E}$ la catégorie des $\underline{V}$-faisceaux sur E pour la topologie canonique, et $J_E : E \longrightarrow \widetilde{E}$ le foncteur canonique.

1.2.4.1. Soit $(g_i : G_i \longrightarrow H)$, $i \in I \in \underline{U}$, une famille épimorphique de $\widetilde{E}$. Si les G_i et les produits fibrés $G_i \underset{H}{\times} G_j$ sont représentables, alors le faisceau H est représentable.

En effet, la somme directe $\coprod\limits_{i \in I} G_i$ est représentable dans $\widetilde{E}$ (II 4.1) par un faisceau représentable G (propriété b) et II 4.6). Il en est de même pour la somme directe $K = \coprod\limits_{(i,j) \in I \times I} G_i \underset{H}{\times} G_j$.

De plus, le diagramme $K \rightrightarrows G \longrightarrow H$ est exact et K est le carré fibré de G au-dessus de H. (Cette dernière propriété est vraie dans la catégorie des préfaisceaux, donc vraie dans la catégorie des faisceaux (II 4.1.) On en déduit, d'après c) et II 4.7, que la faisceau H est représentable.

1.2.4.2. Soit X_α, $\alpha \in A \in \underline{U}$, une famille de générateurs de E. Pour tout faisceau H, désignons par I(H) l'ensemble $\coprod\limits_{\alpha \in A} \mathrm{Hom}_E(X_\alpha, H)$. La famille

$(u : X_\alpha \longrightarrow H, (u,\alpha) \in I(H))$ est épimorphique dans $\tilde{E}$. Lorsque H est un $\underline{U}$-faisceau, I(H) est un élément de $\underline{U}$.

En effet, tout faisceau H étant but d'une famille épimorphique de morphismes dont les sources sont des faisceaux représentables(I 3.4 et II 4.1), il suffit de montrer la première assertion lorsque le faisceau H est représentable. Soit alors G l'image de la famille $(u : X_\alpha \longrightarrow H, (u,\alpha) \in I(H))$. Le morphisme $G \longrightarrow H$ est un monomorphisme. Par suite, on est dans la situation du premier pas, car $X_\alpha \times_G X_\beta$ est isomorphe à $X_\alpha \times_H X_\beta$ qui est représentable, et de plus I(H) est un élément de $\underline{U}$. On en déduit que G est représentable. Mais X_α étant une famille génératrice, $G \longrightarrow H$ est un isomorphisme. La dernière assertion est triviale par définition des $\underline{U}$-faisceaux.

1.2.4.3. Tout sous-faisceau d'un faisceau représentable est représentable.

En effet, soit $G \longrightarrow H$ un sous-faisceau d'un faisceau représentable. G est alors un $\underline{U}$-faisceau. La famille $(u : X_\alpha \longrightarrow G, (u,\alpha) \in I(G))$ est donc épimorphique dans $\tilde{E}$ et indexée par un élément de $\underline{U}$. De plus, les produits fibrés $X_\alpha \times_G X_\beta$ sont isomorphes aux produits fibrés $X_\alpha \times_H X_\beta$ qui sont représentables. Par suite, on est dans la situation du premier pas et G est représentable.

1.2.4.4. Tout $\underline{U}$-faisceau est représentable.

En effet, en vertu du premier et du deuxième pas, il suffit de montrer que les produits fibrés $X_\alpha \times_H X_\beta$ sont représentables. Or, ces produits fibrés sont des sous-objets des produits $X_\alpha \times X_\beta$. On conclut donc par le troisième pas. Ceci achève la démonstration du théorème 1.2.

Remarque 1.3. Bien entendu, pour un $\underline{U}$-topos donné E, il n'y a pas en général de façon privilégiée de le représenter à équivalence près sous la forme $C^{\sim}$, avec C un petit site ; ou, ce qui revient essentiellement au même en vertu de 1.2.1 lorsque l'on se borne aux C dont la topologie est moins fine que la topologie canonique, il n'y a pas de petite famille génératrice priviligiée dans E. Lorsqu'on cesse d'imposer à C la condition que C soit petit, il y a par contre (en vertu de 1.2 iii)) un choix tout à fait canonique d'un $\underline{U}$-site C tel que E soit équivalent à $C^{\sim}$, à savoir E lui-même! Ceci est une des raisons techniques pour lesquelles il n'est pas commode en pratique de travailler seulement avec des petits sites : en fait, les sites les plus importants de tous, savoir les $\underline{U}$-topos, ne sont pas petits ! De plus, les sites générateurs de topos qui s'introduisent dans de nombreuses questions en géométrie algébrique (voire en topologie, cf. 2.5) ne sont pas non plus petits ; exemple : le site étale d'un schéma(VIII 1).

Proposition 1.4. *Soient E un $\underline{U}$-topos, E' une catégorie (pas nécessairement une $\underline{U}$-catégorie), F un préfaisceau sur E à valeurs dans E'. Pour que F soit un faisceau à valeurs dans E'(II 6.1), il faut et il suffit que F transforme $\underline{U}$-limites inductives dans E en limites projectives dans E'.*

Soit $\underline{V}$ un univers contenant $\underline{U}$ et tel que E' soit une $\underline{V}$-catégorie. Composant F avec les foncteurs Hom(X',-): E' $\longrightarrow$ $\underline{V}$-Ens définis par les objets X' de E', on est ramené au cas où E' = $\underline{V}$-Ens, où $\underline{V}$ est un univers. Supposons que F transforme $\underline{U}$-limites inductives en limites projectives, alors il résulte aussitôt des définitions que F est un faisceau, puisque une famille couvrante $X_i \to X$ dans $\underline{E}$, par définition de la topologie canonique de $\underline{E}$, permet de considérer X comme une limite inductive du diagramme $\left(X_i \times_X X_j \begin{smallmatrix} \to X_i \\ \to X_j \end{smallmatrix}\right)$. Supposons que F soit un faisceau, et prouvons qu'il transforme $\underline{U}$-limites inductives en limites projectives. Si $\underline{V} \subset \underline{U}$, on peut supposer $\underline{V} = \underline{U}$ et il suffit d'appliquer le critère 1.2 iii). Pour traiter le cas général, il faut travailler un peu plus. Soient C une sous-catégorie pleine de E engendréepar une famille génératrice indexée par un élément de $\underline{U}$, et $u : C \to E$ le foncteur d'inclusion. Munisssons C de la topologie induite par la topologie canonique de E(III 4.5). Notons $C^{\sim}_{\underline{U}}$, $C^{\sim}_{\underline{V}}$ les catégories de faisceaux sur C, $E^{\sim}_{\underline{V}}$ la catégorie des V-faisceaux sur E pour la topologie canonique, $J_E : E \to E_{\underline{V}}$ le foncteur canonique, $i_{\underline{U},\underline{V}} : C^{\sim}_{\underline{U}} \to C^{\sim}_{\underline{V}}$ le foncteur d'inclusion. Le diagramme :

(*)
$$\begin{tikzcd} C^{\sim}_{\underline{U}} \arrow[r, "i_{\underline{U},\underline{V}}"] & C^{\sim}_{\underline{V}} \\ E \arrow[u] \arrow[r, "J_E"] & E^{\sim}_{\underline{V}} \arrow[u] \end{tikzcd} ,$$

où les flèches verticales sont induites par le foncteur $F \mapsto F \circ u$, est commutatif. Il résulte de la construction explicite du foncteur faisceau associé (II 3) et de II 4.1 que le foncteur $i_{\underline{U},\underline{V}}$ commute aux $\underline{U}$-limites inductives. De plus, il résulte de III 5.1 et de 1.5 que les flèches verticales de (*) sont des équivalences de catégories. Par suite $J_E : E \to E^{\sim}_{\underline{V}}$ commute aux $\underline{U}$-limites inductives. Pour tout objet X de E, on a :

$$F(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{E^{\sim}_{\underline{V}}}(J_E(X), F) .$$

Donc F transforme les $\underline{U}$-limites inductives de E en limites projectives.

Corollaire 1.5. Soient E un $\underline{U}$-topos, E' une $\underline{U}$-catégorie, $f : E \longrightarrow E'$ un foncteur. Pour que f admette un adjoint à droite, il faut et il suffit que f commute aux $\underline{U}$-limites inductives.

C'est une conséquence immédiate de 1.4 pour le cas E' = $\underline{U}$-Ens.

Corollaire 1.6. Soient E,E' deux $\underline{U}$-topos, $f : E \longrightarrow E'$ un foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) f commute aux $\underline{U}$-limites inductives.

ii) f admet un adjoint à droite.

iii) f est continu (III 1.1).

L'équivalence i) $\Longleftrightarrow$ ii) a été vue dans 1.5. Pour prouver i) $\Longleftrightarrow$ iii), appliquons la définition des foncteurs continus, en choisissant un univers $\underline{V}$ tel que $\underline{U} \in \underline{V}$ (donc E,E' sont des sites $\underline{V}$-petits). Il faut exprimer que pour tout $\underline{V}$-faisceau F sur E', le composé $F \circ f$ est un faisceau sur E, c'est-à-dire(1.4)qu'il transforme $\underline{U}$-limites inductives en limites projectives. Il suffit pour ceci que l'on ait i), puisque en vertu de 1.4 F lui-même transforme $\underline{U}$-limites inductives en limites projectives ; c'est aussi nécessaire comme on voit en prenant pour F un foncteur représentable.

Corollaire 1.7. Avec les notations de 1.6, pour que f soit le foncteur image inverse u^* pour un morphisme de topos (3.1) $u : E' \longrightarrow E$, il faut et il suffit que f soit exact à gauche et transforme familles épimorphiques en familles épimorphiques.

La nécessité est triviale par définition (NB tout foncteur exact à droite transforme épimorphisme en épimorphisme). La suffisance résulte de III 2.6, qui implique que f est continu sous les conditions indiquées, donc commute aux $\underline{U}$-limites inductives en vertu de 1.6.

<u>Remarque</u> 1.8. Avec les notations de 1.5, on peut montrer que f admet un adjoint à gauche si et seulement si il commute aux $\underline{U}$-limites projectives. En d'autres termes, un foncteur <u>covariant</u> $E \longrightarrow (\underline{U}\text{-Ens})$ est représentable si et seulement si il commute aux $\underline{U}$-limites projectives(*). Nous indiquons seulement le principe de la démonstration, qui se fait en deux étapes :

a) Des arguments standards [5, n° 195, § 3] montrent que si F commute aux $\varprojlim$, il est proreprésentable par un système projectif strict $(T_i)_{i\in I}$, où I est un ensemble ordonné filtrant, <u>pas nécessairement petit</u>. On peut supposer que si $i > j$, alors $T_i \longrightarrow T_j$ n'est pas un isomorphisme, et sous cette hypothèse, F est représentable si et seulement si I est petit (ce qui implique en fait que le système projectif est essentiellement constant).

b) Pour prouver que I est petit, sachant que pour tout objet X de E, l'ensemble $F(X) = \varinjlim_{i} \mathrm{Hom}(T_i,X)$ l'est, il suffit de disposer d'une <u>petite famille cogénératrice</u> $(X_j)_{j\in J}$ (i.e. qui est génératrice pour la catégorie opposée E^{o}). Or on montre que dans un $\underline{U}$-topos E existe toujours une petite famille cogénératrice.

c) Pour prouver ce dernier point, on note par des arguments standards [Toh] que tout objet X de E admet un monomorphisme dans un objet "injectif" ; puis que pour toute famille génératrice (L_α) de E,

(*) Un énoncé plus général se trouve dans I 8.12.8, 8.12.9, l'esquisse de démonstration qui suit a) à c) correspondant à la démonstration donnée dans loc. cit.

si on plonge ainsi chaque L_α dans un objet injectif I_α, la famille (I_α) est cogénératrice.

2. Exemples de topos

2.0. Nous avons réuni dans le présent numéro un assez grand nombre d'exemples typiques de topos, que le lecteur aura déjà eu l'occasion de rencontrer par ailleurs, et qui sont destinés à lui faciliter l'accès au "yoga" des topos. Pour d'autres exemples (tirés de la géométrie algébrique) de topologies sur des sites, donnant lieu à autant de topos, il pourra consulter SGA 3 IV 6, et (pour le topos étale) l'exposé VII du présent séminaire. Comme nous ne référerons guère par la suite au présent numéro que pour des questions de notations ou de terminologie, nous laissons au lecteur le soin de faire à titre d'exercice la vérification des énoncés dont nous avons assorti ces exemples pour son instruction générale. Tous les exemples du présent numéro seront précisés dans 4, où on examinera leur dépendance fonctorielle par rapport aux données, et dans les numéros suivants à titre d'illustration des notions générales relatives aux topos.

2.1. Topos associé à un espace topologique

Soient X un petit espace topologique, Ouv(X) la catégorie des ouverts de X, munie de la topologie canonique (III 2.9.1). Nous désignerons par Top(X) le topos des $\underline{U}$-faisceaux sur Ouv(X). Ce topos est équivalent à la catégorie des espaces topologiques étalés au-dessus de X, en associant à tout tel espace X' sur X le faisceau $U \longmapsto \Gamma(X'/U) = \mathrm{Hom}_X(U,X')$ sur Ouv(X) [TF]. On ne pourra pas s'empêcher de noter parfois, par abus de langage, par la même lettre X le topos Top(X) défini par l'espace topologique X.

C'est évidemment l'exemple précédent qui a servi principalement de guide et de support intuitif pour le développement de la théorie des topos. On fera attention cependant que les topos déduits des espaces topologiques sont de nature très particulière, dû au fait notamment qu'ils ont été décrits par des sites C = Ouv(X) où tous les morphismes sont des monomorphismes (donc dont la catégorie sous-jacente se réduit à un ensemble préordonné). De ceci résulte en particulier que les faisceaux représentés par les objets de C sont des sous-faisceaux du faisceau final, et par suite que les sous-faisceaux du faisceau final forment une famille génératrice du topos envisagé. Cette propriété n'est pas partagée par la plupart des topos qui s'introduisent de façon naturelle en géométrie algébrique ou en algèbre, cf. exemples plus bas. Elle est à peu de choses près caractéristique des topos de la forme Top(X) (cf. 7.1.9 plus bas).

On vérifie facilement que l'application Ouv(X) $\longrightarrow$ Top(X), qui associe à tout ouvert de X le faisceau qu'il représente, est une bijection de Ouv(X) avec l'ensemble des sous-objets de l'objet final de Top(X), cette bijection étant même un isomorphisme pour les structures d'ordre naturelles, i.e. induisant un isomorphisme des catégories correspondantes. Cela suggère qu'il doit être possible de réconstituer à homéomorphisme près l'espace topologique X, lorsqu'on connait Top(X) à équivalence près. Nous verrons plus bas (4.2) qu'il en est bien ainsi, moyennant une légère restriction sur X.

2.2. Topos ponctuel ou final, et topos vide ou initial

Lorsque X est un espace topologique réduit à un seul point, le foncteur

$$F \longrightarrow F(X) : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \underline{U}\text{-Ens}$$

est une équivalence de catégories. Ceci montre en particulier que la catégorie U-Ens est un U-topos. Nous avons vu sur des exemples dans Exp II que cet U-topos est typique du point de vue propriétés d'exactitude, en ce que la vérification de beaucoup de propriétés (notamment des propriétés d'exactitude) des topos généraux se ramène à ce topos particulier. L'interprétation que nous en donnons ici en termes de l'espace topologique ponctuel justifie l'abus de langage consistant à appeler topos ponctuel un topos équivalent à la catégorie U-Ens (bien que, en tant que catégorie, il ne soit pas du tout équivalent à la catégorie ponctuelle !). C'est la terminologie qui correspond à l'intuition géométrique correcte du rôle joué par ces topos. On appelle parfois, par abus de langage également, topos final un topos ponctuel, cf. 4.3 ; on dira "le topos final" pour le topos (U-Ens).

Lorsque X est réduit à l'espace topologique vide, donc Ouv(X) à la catégorie ponctuelle, alors un préfaisceau F sur Ouv(X) est un faisceau si et seulement si sa valeur en l'unique objet $\emptyset$ de Ouv(X) est un ensemble réduit à un point. Il s'ensuit que Top($\emptyset$) est isomorphe à la catégorie des U-ensembles réduits à un point, catégorie qui est équivalente à la catégorie ponctuelle. De ceci on conclut en particulier que la catégorie ponctuelle (ainsi que toute U-catégorie équivalente à celle-ci) est un U-topos. On l'appelle parfois, par abus de langage, le topos vide ou topos initial (cf. 4.4) ; on prendra garde qu'il n'est pas équivalent à la catégorie vide.

2.3. Topos associé à un espace à opérateurs

Soient X un espace topologique, G un groupe discret opérant sur X par homéomorphismes. On a défini alors dans [Toh. 5.1] la catégorie des G-faisceaux sur X, ou comme nous dirons aussi, des faisceaux sur (X,G) ; ce sont les faisceaux (d'ensembles) sur X, munis d'opérations de G compatibles avec celles de G sur X. On constate aussitôt, à l'aide du critère de Giraud 1.2 iii), que cette catégorie est un topos (NB U est sous-entendu dans tout ceci), qu'on notera simplement Top(X,G). Lorsque G est réduit au groupe unité, on retrouve l'exemple 2.1 ; lorsque X est réduit à l'espace ponctuel, on trouve le topos des ensembles sur lesquels G opère à gauche (ou G-ensembles), appelé aussi topos classifiant du groupe discret G, et noté B_G. On vérifie facilement que le seul sous-objet de l'objet final e du topos B_G est e ou le faisceau vide $\emptyset$, en particulier, si G n'est pas réduit au groupe unité, les sous-objets de l'objet final du topos classifiant B_G ne forment pas une famille génératrice de B_G. Donc B_G n'est pas équivalent alors à un topos du type Top(X) envisagé dans 2.1.

La notion de G-faisceau était introduite dans loc. cit. pour développer la théorie cohomologique des G-faisceaux abéliens. Interprétant ces derniers comme les faisceaux abéliens du topos (X,G), ladite théorie se trouve incluse dans celle de Exp. V, développée dans le cadre des topos généraux.

On peut se proposer plus généralement d'attacher un topos approprié à un espace topologique X, muni d'un groupe topologique G (pas nécessairement discret) d'automorphismes, qui donnerait naissance à une théorie cohomologique adéquate. De même dans le contexte des variétés différentiables, ou analytiques réelles ou complexes, ou des schémas. C'est effectivement possible, cf. 2.5 ci-dessous.

2.4. Topos classifiant d'un Groupe

Soit E un topos, et G un Groupe de E. Soit (E,G) la catégorie des objets de E sur lesquels G opère. On voit aussitôt, grâce au critère de Giraud, que c'est un topos. On l'appelle topos classifiant du Groupe G, et on le note B_G. Lorsque E est le topos ponctuel(2.2) i.e. lorsque G est un groupe ordinaire, on retrouve le topos classifiant de 2.3.

La terminologie adoptée ici se justifie, du fait que le topos B_G joue un rôle universel pour la classification des "torseurs" (ou fibrés principaux homogènes) sous G, ou plus généralement sous les $G_{E'} = f^*(G)$, où E' est un topos "au-dessus de E" i.e. muni d'un morphisme $f:E' \to E$ (cf. 3.1 ci-dessous). Ce rôle, explicité dans [3 Chap V] ou dans 5.9 plus bas, montre que B_G joue, dans le contexte des topos, le même rôle que les classiques espaces classifiants des groupes topologiques en théorie homotopique des espaces topologiques. Ces derniers peuvent être regardés (cf. 2.5) comme une version affaiblie des premiers, obtenue en ne retenant du topos classifiant que le seul "type d'homotopie" dudit topos, en un sens convenable qu'il n'y a pas lieu de préciser ici.

2.5. "Gros site" et "gros topos" d'un espace topologique. Topos classifiant d'un groupe topologique (*)

Soit U-Esp ou simplement (Esp) la catégorie des espaces topologiques $\in \underline{U}$. On sait que dans (Esp) les limites projectives finies sont représentables. Considérons sur (Esp) la prétopologie (I 1.3) pour laquelle Cov(X) est l'ensemble des familles surjectives d'immersions ouvertes $u_i : X_i \longrightarrow X$. Nous considérerons (Esp) comme un site à l'aide de la topologie engendrée par la prétopologie précédente. Pour tout objet X de (Esp), considérons la catégorie

$$(\mathrm{Esp})_{/X}$$

des objets de (Esp) au-dessus de X, i.e. des espaces topologiques au-dessus de X, comme un site, grâce à la topologie induite par celle de (Esp) via le foncteur d'oubli $(\mathrm{Esp})_{/X} \longrightarrow (\mathrm{Esp})$ (III 5.2 4)). Ce site est appelé le gros site associé à X. On fera attention qu'il n'est pas $\in \underline{U}$; ce n'est pas non plus un $\underline{U}$-site au sens de II 3.0.2, donc des précautions sont nécessaires pour lui appliquer les résultats habituels. Pour pallier cet inconvient, on peut choisir un univers $\underline{V}$ tel que $\underline{U} \in \underline{V}$, de sorte que $(\mathrm{Esp})_{/X}$ devient un $\underline{V}$-site, et on peut travailler avec le $\underline{V}$-topos associé $(\mathrm{Esp})_{/X}$, qui pourra être noté TOP(X) et sera appelé le gros topos de X. Si on répugne à agrandir $\underline{U}$, on peut choisir un cardinal c majorant les cardinaux de X et de tous les espaces topologiques qu'on compte faire intervenir dans les raisonnements (le plus souvent, Sup(card X, card $\underline{R}$) sera suffisant !), et on remplace $(\mathrm{Esp})_{/X}$ par la sous-catégorie $(\mathrm{Esp})'_{/X}$ formée des X' sur X tels que card X' $\leq$ c, munie de la topologie induite, et on note TOP(X) le topos des faisceaux sur

(*) L'introduction de ces sites et topos est due à M. GIRAUD, qui a mis également en évidence leurs avantages sur le "petit" site traditionnel.

ce site. Pour fixer les idées, supposons que ce soit la première définition qui ait été adoptée.

L'avantage du gros topos de X sur le petit, c'est que le site qui le définit contient $(Esp)_{/X}$ comme sous-catégorie pleine ; comme la topologie de ce site est manifestement moins fine que la canonique, on voit que le foncteur canonique de $(Esp)_{/X}$ dans TOP(X), associant à tout espace X' sur X le faisceau qu'il représente, est <u>pleinement fidèle</u>. Par suite, <u>un espace</u> X' <u>sur</u> X <u>est connu à</u> X-<u>isomorphisme près quand on connait le faisceau</u> ($\in$ TOP(X)) <u>qu'il définit</u> ; donc la notion de faisceau sur (le gros site de) X peut être considéré comme une <u>généralisation</u> de celle d'espace topologique au-dessus de X, à l'aide de laquelle toutes les constructions de la théorie des faisceaux prennent un sens pour les espaces topologiques sur X.

Ainsi, lorsque G est un objet-groupe de la catégorie $(Esp)_{/X}$ des espaces topologiques au-dessus de X, on peut lui associer le topos classifiant B_G (2.4), d'où des groupes de cohomologie classifiante, des groupes d'homotopie classifiante etc. (définis comme les invariants correspondants du $\underline{V}$-topos B_G). En particulier, lorsque X est un espace ponctuel, G s'identifie à un groupe topologique ordinaire. On peut vérifier, moyennant les conditions locales habituelles assurant que la cohomologie singulière des produits cartésiens G^n coïncide avec la cohomologie au sens des faisceaux (pour des coefficients constants, disons), par exemple si G est localement contractible, que la cohomologie du topos classifiant de G est canoniquement isomorphe à celle de l'espace classifiant de G au sens des topologues.

L'introduction des topos classifiants (via les "gros sites") a sur les espaces classifiants l'avantage de fournir une théorie plus riche, puisqu'ils fournissent notamment des invariants cohomologiques utiles pour des coefficients plus généraux que les coefficients constants ou localement constants. De plus, la définition envisagée ici s'adapte de façon évidente aux autres contextes habituels : variétés différentiables, variétés ou espaces analytiques (réelles ou complexes, au choix), schémas. Ce point de vue permet notamment de faire le lien entre l'étude des classes caractéristiques du point de vue traditionnel et du point de vue "arithmétique", en considérant les "groupes classiques" comme provenant de schémas définis sur l'anneau des entiers ; cf. [7] pour des indications dans ce sens. De même, les résultats généraux de J. GIRAUD [3] sur la classification des extensions de Groupes, développés dans le cadre très général et très souple des topos, peuvent grâce aux "gros topos" se spécialiser en des résultats sur la classification d'extensions de groupes topologiques, ou de groupes de Lie réels ou complexes, qui ne semblaient guère connus des topologues que dans le cas des extensions à noyau abélien [11].

2.6. Topos de la forme $\hat{C}$

Soit C une petite catégorie. Alors la catégorie $\hat{C}$ des U-préfaisceaux sur C est évidemment un U-topos, puisqu'elle est de la forme $C^{\sim}$, où on munit C de la topologie chaotique. Nous donnerons plus bas quelques détails sur les relations entre C et $\hat{C}$. Notons seulement ici qu'un topos E équivalent à un topos de la forme $\hat{C}$ est de nature assez spéciale, du fait qu'il admet une petite famille génératrice (X_i) formée d'objets connexes projectifs, i.e. d'objets X tels que le foncteur

$Y \longmapsto \mathrm{Hom}(X,Y)$ transforme épimorphismes en épimorphismes et sommes en sommes : il suffit en effet de prendre dans $\hat{C}$ la famille génératrice formée des foncteurs représentés par les $X \in \mathrm{ob}\, C$. Notons d'ailleurs que si dans un topos E on a une famille couvrante $X_i \longrightarrow X$, avec des X_i qui sont projectifs et connexes, alors toute autre famille couvrante de X est majorée (I 4.3.2, 4.3.3) par la précédente. Par suite, dans un topos E de la forme $\hat{C}$ tout objet X admet une famille couvrante majorant toutes les autres. Un topos de la forme $\mathrm{Top}(X)$ (2.1), avec X un espace topologique dont les points sont fermés, n'a la propriété précédente que si X est discret.

Lorsque la catégorie C a un seul objet, C s'identifie à un monoïde G. Un préfaisceau sur C s'identifie alors à un ensemble sur lequel G opère <u>à droite</u> (puisque c'est un foncteur $G^{\circ} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$), et $\hat{C}$ est le topos des ensembles à monoïde d'opérateurs à droite, qu'on pourra aussi noter $B_{G^{\circ}}$, compte tenu de 2.3 : c'est le <u>topos des ensembles à monoïde d'opérateurs</u> G°(<u>le monoïde opposé à</u> G). Lorsque G est un groupe, utilisant l'isomorphisme $g \longmapsto g^{-1}$ de G sur G°, on retrouve le topos classifiant B_G de 2.3.

2.7. <u>Topos classifiant d'un pro-groupe</u>

2.7.1. Soit $\underline{G} = (G_i)_{i \in I}$ un système projectif de groupes, avec $G_i, I \in \underline{U}$. On suppose le système projectif <u>strict</u>, i.e. les morphismes de transition $G_j \longrightarrow G_i$ surjectifs. Si E est un ensemble, on appelle <u>opération de</u> $\underline{G}$ <u>sur</u> E (à gauche, disons) la structure suivante : a) une famille $(E_i)_{i \in I}$ de parties de E, de réunion E ; b) pour tout $i \in I$, une opération du groupe G_i sur l'ensemble E_i ; on suppose de plus ces données soumises à la condition suivante : pour $j \geq i$, E_i est le sous-ensemble de E_j formé des éléments fixes sous le groupe noyau de $G_j \longrightarrow G_i$. On dit aussi que $\underline{G}$ opère sur E (à gauche) si on s'est donnée une opération de G sur E (à gauche). Les ensembles $\in \underline{U}$ munis d'une opération de $\underline{G}$ forment une catégorie de façon évidente. On constate aussitôt, grâce au critère de Giraud, que cette catégorie est un $\underline{U}$-topos. On le note $B_{\underline{G}}$ et on l'appele <u>topos classifiant de $\underline{G}$</u>. Lorsque I admet un objet initial i_o, posant $G=G_{i_o}$, on retrouve le topos classifiant de 2.3.

2.7.2. Un autre exemple important est celui où les groupe G_i sont finis, de sorte que

$$G = \varprojlim G_i$$

est un groupe topologique compact totalement discontinu, ou <u>groupe profini</u>. Une opération de $\underline{G}$ sur E revient alors à une opération de G sur E qui est continue, ou ce qui revient au même, telle que le stabilisateur de tout point de E est un sous-groupe ouvert de G. Le topos classifiant $B_{\underline{G}}$ sera aussi noté B_G, où, bien entendu, G doit être considéré comme muni de sa topologie profinie.

2.7.3. Il est facile de vérifier, utilisant les remarques de 2.6, que le topos $B_{\underline{G}}$ défini par un système projectif strict $\underline{G} = (G_i)_{i \in I}$ de groupes n'est équivalent à un topos de la forme $\hat{C}$ que si ce système projectif est essentiellement constant ; dans le cas d'un groupe profini, cela signifie que ce groupe est en fait fini.

2.7.4. L'interprétation géométrique suivante du topos classifiant B_G d'un groupe discret G est utile, pour donner une intuition géométrique correcte de ces topos. (Cf. aussi, dans le même sens, 4.5, 5.8, 5.9 et 7.2 ci-dessous.) Soit X un espace topologique connexe, localement connexe et localement simplement connexe, x un point de X, G son groupe fondamentale en x. (NB il est connu qu'à isomorphisme près, tout groupe discret G peut s'obtenir ainsi.) Alors la théorie de Galois des revêtements de X fournit une équivalence entre la catégorie B_G des G-ensembles, et la catégorie des <u>revêtements étales</u> de X, i.e. des espaces X' sur X qui sont localement X-isomorphes à des X-espaces de la forme $X \times I$, où I est un espace discret. (Comparer SGA 1 V 4,5). Cette dernière peut d'ailleurs s'interpréter comme la catégorie des faisceaux localement constants sur X, i.e. la catégorie des objets localement constants (IX 2.0) du topos Top(X).

Lorsque G est un groupe profini, on a une interprétation géométrique analogue de B_G, comme la catégorie des X-schémas qui sont sommes de revêtements finis étales d'un schéma X connexe, muni d'un point géométrique x et d'un isomorphisme $G \simeq \pi_1(X,x)$. Il est connu encore que tout groupe profini peut s'obtenir comme groupe fondamental d'un schéma connexe convenable (spectre d'un corps si on veut). Enfin, on rencontre également des pro-groupes (pas nécessairement profinis ni essentiellement constants) pour la classification des revêtements des espaces connexes et localement connexes qui ne sont pas localement simplement connexes, ou la classification des revêtements étales pas nécessairement finis ou ind-finis de schémas connexes non normaux. Pour ce dernier cas, cf. SGA 3 X 6.

<u>Exercice</u> 2.7.5. Définir pour un topos E la notion de connexité, de locale connexité (*), de simple connexité et de simple connexité locale. Définir la notion d'objet constant et localement constant de E (cf. IX 2.0). Soit

---

(*) cf. 8.7 1).

$f:E' \longrightarrow E$ un morphisme de topos (3.1), avec E' simplement connexe (par exemple E' le topos ponctuel (2.2)), et E connexe et localement connexe. Définir un pro-groupe strict $\pi_1(E,f) = (G_i)_{i\in I} = \underline{G}$ (appelé <u>pro-groupe fondamental de</u> E <u>en</u> f) et une équivalence de catégories de $B_{\underline{G}}$ avec la catégorie des objets localement constants de E. (*). Montrer que lorsque E est localement simplement connexe, $\pi_1(E,f)$ est essentiellement constant et s'identifie donc à un groupe discret ordinaire $\pi_1(E,f)$, qui s'appelle le <u>groupe fondamental de</u> E <u>en</u> f. Montrer que tout pro-groupe strict $\underline{G}$ est isomorphe (comme pro-groupe) au pro-groupe fondamental d'un topos connexe et localement connexe convenable en un f convenable, avec E' le topos ponctuel (prendre $E = B_{\underline{G}}$, et $f:E' \longrightarrow E$ défini par le foncteur oubli $f^* : E \longrightarrow E' = (\mathrm{Ens})$). Lorsque $\underline{G}$ est essentiellement constant, i.e. isomorphe (comme pro-groupe) à un groupe discret ordinaire, prouver qu'on peut prendre ci-dessus E localement simplement connexe (prendre encore $E = B_{\underline{G}}$).

2.8. <u>Exemple d'un faux topos</u>

Soit $\underline{G} = (G_i)_{i\in I}$ un pro-groupe strict, où I est ordonné filtrant et où $i > j$ implique que $G_i \longrightarrow G_j$ n'est pas un isomorphisme. Supposons que l'on ait $\mathrm{card}(I) \notin \underline{U}$. Considérons la catégorie des ensembles $E \in \underline{U}$ sur lesquels $\underline{G}$ opère à gauche (2.7.1). C'est une $\underline{U}$-catégorie, et on voit comme dans 2.7.1 que cette catégorie satisfait aux conditions a), b), c) de 1.1.2. Cependant ce n'est pas un $\underline{U}$-topos, car on voit qu'il n'admet pas de famille génératrice qui soit $\underline{U}$-petite. On voit de même que ce n'est un $\underline{V}$-topos pour aucun univers $\underline{V}$.

(*) On pourra s'inspirer de SGA 3 X 6.

3. Morphismes de topos

Définition 3.1. Soient E et E' deux U-topos. On appelle morphisme de E dans E', ou parfois (par abus de langage) application continue de E dans E', un triple $u = (u_*, u^*, \varphi)$, formé de foncteurs

$$u_* : E \longrightarrow E' \quad , \quad u^* : E' \longrightarrow E$$

et d'un isomorphisme φ "d'adjonction" de bifoncteurs en $X' \in \mathrm{Ob}\, E'$, $Y \in \mathrm{Ob}\, E$:

$$\varphi : \quad \mathrm{Hom}_E(u^*(X'),Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{E'}(X',u_*(Y)) \quad ,$$

le foncteur u^* étant de plus soumis à la condition d'être exact à gauche, i.e. de commuter aux limites projectives finies. Le foncteur u_* est appelé le foncteur image directe pour le morphisme de topos u, le foncteur u^* est appelé le foncteur image inverse pour le morphisme de topos u, l'isomorphisme φ est appelé l'isomorphisme d'adjonction, pour u.

3.1.1. Sauf mention expresse du contraire, on désignera par la suite, pour un morphisme de topos $u: E \longrightarrow E'$, par u_* et u^* les foncteurs image directe et image inverse correspondants (*). On notera que, u_* étant adjoint à droite de u^* et u^* étant adjoint à gauche de u_* par l'isomorphisme d'adjonction φ, chacun des deux foncteurs u_*, u^* détermine l'autre à isomorphisme unique près, d'après le sorite bien connu des foncteurs adjoints [14] . En pratique, suivant les cas, il peut être plus commode de définir un morphisme de topos $u : E \longrightarrow E'$ soit par la donnée de $u^* : E' \longrightarrow E$, soit par la donnée de $u_* : E \longrightarrow E'$; dans le premier cas, il faut simplement vérifier que le foncteur donné u^*

(*) Il y a lieu parfois d'écrire aussi u^{-1} au lieu de u^*, cf. .

admet un adjoint à droite, et qu'il est exact à gauche. Dans le deuxième, que le foncteur donné u_* admet un adjoint à droite qui est exact à gauche. Dans l'un ou l'autre cas, on déduit de la donnée partielle, grâce au <u>choix</u> d'un foncteur adjoint et d'un isomorphisme d'adjonction, un morphisme de topos $u: E \longrightarrow E'$, et ce dernier sera "unique à isomorphisme unique près" en termes de la donnée u^* resp. u_*, en un sens assez clair, et qui sera d'ailleurs entièrement explicité plus bas (3.2.1).

3.1.2. Si $u:E \longrightarrow E'$ est un morphisme de topos, il résulte des propriétés des foncteurs adjoints (I 2.11) que le foncteur image directe $u_* : E \longrightarrow E'$ commute aux limites projectives, et le foncteur $u^* : E' \longrightarrow E$ commute aux limites inductives (*). Comme on suppose de plus que ce dernier est exact à gauche i.e. commute aux limites projectives finies, on voit donc en particulier que u^* <u>est exact</u>. On peut donc dire que <u>c'est le foncteur image inverse</u> u^* , dans le couple (u_*,u^*), <u>qui possède les propriétés d'exactitude les plus remarquables</u>. Ces propriétés assurent que pour toute espèce de structure algébrique Σ dont les données peuvent se décrirent en termes de données de flèches entre les ensembles de base et des ensembles déduits de ceux-ci par application répétée d'opérations de limites projectives finies et de limites inductives quelconques, et pour tout "objet de $\underline{E}'$ muni d'une structure d'espèce Σ "(notion qui a un sens grâce aux propriétés d'exactitude internes du topos $\underline{E}'$ (II 4.1)), son image par u^* est muni des mêmes structures. Plutôt que d'entrer dans la tâche peu engageante de donner un sens précis à cet énoncé et de le

(*) D'ailleurs (1.5 et 1.8), pour un foncteur $u_* : E \longrightarrow E'$ resp. $u^* : E' \longrightarrow E$ donné, ce foncteur admet un adjoint à gauche (resp. à droite si et seulement si il commute aux $\underline{U}$-limites projectives (resp. aux $\underline{U}$-limites inductives).

324

justifier de façon formelle, nous conseillons au lecteur de l'expliciter et de se convaincre de sa validité pour des espèces de structure telles que celle de groupe, d'anneau, de module sur un anneau, de comodule sur un anneau, de bigèbre sur un anneau, de torseur sous un groupe. (Dans ces exemples, les trois premières espèces de structure se définissent en termes de limites projectives finies exclusivement, tandis que les autres notions impliquent implicitement des constructions faisant appel également à des limites inductives.) De plus, le foncteur u^* "<u>commute</u>" à toutes les opérations fonctorielles habituelles faites en termes de telles structures, plus précisément à toutes les opérations qui peuvent s'exprimer en termes de $\varinjlim$, et de $\varprojlim$ finies : constructions d'objets libres (groupes ou modules libres, p.ex.) engendrés par un objet, produits tensoriels (cf. § 12 plus bas) etc.

Quant au foncteur image directe $u_* : E \longrightarrow E'$, qui commute aux limites projectives, il "respecte" par suite toute structure algébrique sur un objet (ou une famille d'objets) de E, définissable en termes de limites projectives exclusivement (telles que les structures de groupe, d'anneau ou de module sur un anneau, parmi les exemples précédents). Par contre, le foncteur u_* n'est en général pas exact à droite i.e. il ne commute pas en général aux limites inductives finies, et même ne transforme pas en général épimorphisme en épimorphisme (c'est d'ailleurs ce défaut d'exactitude du foncteur u_* qui est la source de ces propriétés cohomologiques, qui seront étudiées (du point de vue de l'algèbre homologique commutative) dans l'exposé suivant). Par suite, il ne s'étend pas, en général, en un foncteur sur des objets du type comodule, ou bigèbre, ou torseur sous un groupe, et ne commute pas en général à des opérations telles que "module libre engendré", produit tensoriel de modules, etc.

3.1.3. En pratique, lorsqu'on est en présence d'un foncteur $f: E \longrightarrow F$ d'un <u>U</u>-topos dans un autre, il y a lieu d'en expliciter toutes les propriétés d'exactitude, y compris l'existence éventuelle de foncteurs adjoints à gauche ou à droite (cf. la note de bas de page 26), pour parvenir à une compréhension de la "nature géométrique" de f, compréhension qui sera généralement un guide indispensable pour une intuition géométrique correcte de la situation. Ainsi, s'il s'avère que f commute aux limites inductives quelconques et aux limites projectives finies, il y a lieu d'écrire f sous la forme

$$f = u^* \quad ,$$

où

$$u : F \longrightarrow E$$

est un morphisme de topos, i.e. d'interpréter f comme un foncteur "image inverse" par une "application continue" de topos. Lorsque f commute aux limites projectives quelconques, donc qu'il admet un adjoint à gauche, et si ce dernier (qui a priori commute aux limites inductives quelconques) commute <u>de plus</u> aux limites projectives finies, il y a lieu d'écrire f sous la forme

$$f = v_* \quad ,$$

où

$$v : E \longrightarrow F$$

est un morphisme de topos. Dans certains cas, il peut arriver que f satisfasse aussi bien à l'une qu'à l'autre des deux propriétés envisagées (cf. 4.10 pour un exemple). Dans ce cas, il y a lieu d'introduire simultanément les morphismes de topos

$$u : F \longrightarrow E \quad \text{et} \quad v : E \longrightarrow F \ ,$$

qui donnent lieu à une suite de trois foncteurs adjoints (I 5.3) :

$$v^* \ , \ v_* = u^* = f \ , \ u_* \ .$$

Il convient de distinguer alors soigneusement entre les morphismes de topos u et v, sous peine de perdre l'intuition géométrique de la situation.

On notera à ce propos que lorsque entre deux topos E,F on a une suite de trois foncteurs adjoints

$$e \ , \ f \ , \ g \qquad (e,g : F \rightrightarrows E, \ f : E \longrightarrow F) \ ,$$

alors f commute aux limites inductives et aux limites projectives quelconques, donc il peut toujours se mettre sous la forme u^*, où $u: F \to E$ est un morphisme de topos. Alors g s'écrit donc $g = u_*$. Par contre, bien sûr, e ne peut s'écrire sous la forme v^* (et alors f sous la forme v_*) que s'il commute de plus aux limites projectives finies. Cela sera évidemment le cas s'il est lui-même l'adjoint à droite d'un quatrième foncteur d. Sans condition de cette nature, on écrira souvent

$$e = u_!$$

pour l'adjoint à gauche d'un foncteur image inverse $f = u^*$, quand un tel adjoint à gauche existe, cette notation étant suggérée par l'exemple d'une immersion ouverte $u : X \longrightarrow Y$ d'espaces topologiques. De même, si e est de la forme v^*, i.e. f de la forme v_*, on note parfois $g = v^!$ l'adjoint à droite d'un foncteur image directe v_*, lorsque cet adjoint existe (*).

(*) Cf. plus bas, dans le cas de faisceaux abéliens.

3.2. Soient E, E' deux $\underline{U}$-topos, et

$$u = (u_*, u^*, \varphi) \quad , \quad v = (v_*, v^*, \psi) : E \rightrightarrows E'$$

deux morphismes de topos de E dans E'. On appelle <u>morphisme de</u> u <u>dans</u> v tout morphisme de u_* dans v_* (au sens de la catégorie <u>Hom</u>(E,E') des foncteurs de E dans E'). Les morphismes de morphismes de topos se composent de façon évidente, et on définit de cette façon une catégorie, qui est en fait une $\underline{\mathfrak{U}}$-<u>catégorie</u> (I 7.8) notée

$$\underline{\mathrm{Homtop}}(E,E') \quad ,$$

appelée <u>catégorie des morphismes</u> (ou <u>des applications continues</u>) <u>de</u> E <u>dans</u> E'. On définit alors de façon évidente un foncteur

$$u \longmapsto u_* \quad : \quad \underline{\mathrm{Homtop}}(E,E') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(E,E') \quad ,$$

foncteur qui est pleinement fidèle par définition des flèches dans le premier membre (mais qui n'est pas injectif sur les objets).

3.2.1. On fera attention que, si u et v sont donnés comme dessus, la théorie des foncteurs adjoints fournit une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}(u_*, v_*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(v^*, u^*) \quad ;$$

en particulier, on obtient un <u>contrafoncteur</u> sur <u>Homtop</u>(E,E') :

$$u \longmapsto u^* \quad : \quad \underline{\mathrm{Homtop}}(E,E')^{\circ} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(E,E') \quad .$$

Conformément à l'intuition géométrique, suivant laquelle le foncteur image directe u_* "va dans le même sens" que l'application continue qui lui donne naissance, il y a donc lieu de définir le sens des flèches pour les morphismes entre morphismes de topos <u>en termes des foncteurs images directes</u>, et non en termes des foncteurs images inverses (bien que ce soient ces derniers qui, nous l'avons vu, possèdent les propriétés d'exactitude caractéristiques de la notion de morphisme de topos).

3.2.2. Ayant défini la catégorie Homtop(E,E') des morphismes du topos E dans le topos E', la notion d'isomorphie entre deux morphismes u,v de E dans E' est également définie. En pratique, il n'y a pas lieu de distinguer essentiellement entre deux morphismes de topos isomorphes, tout au moins lorsqu'on dispose d'un isomorphisme canonique entre les deux (tout comme il n'y a pas lieu souvent de distinguer entre deux éléments d'une catégorie, lorsqu'on se donne un isomorphisme canonique entre eux). Signalons à ce propos que le plus souvent, lorsqu'on traite de diagrammes de morphismes de topos et de questions de commutativité de tels diagrammes (notion qui a un sens grâce à (3.3)), il ne s'agit que de commutativité à isomorphisme ("canonique") près ; par abus de langage, on traite alors ces diagrammes comme des diagrammes effectivement commutatifs.

On peut songer à justifier cet abus de langage en introduisant l'ensemble Homtop(E,E')/Isom des morphismes de E dans E' à isomorphisme près, et en appelant morphisme une telle classe d'isomorphie, au lieu de suivre la définition 3.2. Mais ceci se heurte aux inconvénients très graves qui se présentent, chaque fois qu'on essaie d'identifier deux objets isomorphes d'une catégorie, sans disposer d'un isomorphisme canonique entre eux. L'expérience prouve qu'un tel point de vue est impratiquable, et qu'il faut garder la notion "fine" 3.1 de la notion de morphisme entre morphismes de topos, quitte à être obligé, parfois, de se battre avec des compatibilités entre isomorphismes canoniques (*).

(*) Pour des exemples de telles batailles (victorieuses, semble-t-il) nous renvoyons le lecteur au livre de Mme M. HAKIM sur les schémas relatifs [9].

3.3.1. Soient E, E', E" trois $\underline{U}$-topos, et considérons des morphismes de topos

$$u : E \longrightarrow E' \quad , \quad v : E' \longrightarrow E'' \quad .$$

La théorie des foncteurs adjoints nous donne alors un isomorphisme d'adjonction entre les foncteurs composés $v_* u_*$ et $u^* v^*$, en termes des isomorphismes d'adjonction pour les couples (u_*, u^*) et (v_*, v^*). D'autre part, le foncteur $u^* v^*$ est exact à gauche, comme composé de deux foncteurs exacts à gauche. Par suite, on trouve un morphisme de E dans E", qu'on appelle <u>composé des morphismes</u> u <u>et</u> v, et qu'on note vu :

$$vu : E \longrightarrow E'' \quad .$$

On vérifie alors trivialement que la composition des morphismes est associative, et que pour tout $\underline{U}$-topos E, il y a un morphisme de E dans lui-même qui est une unité bilatère pour la composition : c'est le morphisme (id_E, id_E, φ), où φ est l'isomorphisme d'adjonction évident de id_E avec lui-même. Soit alors $\underline{V}$ un univers tel que $\underline{U} \in \underline{V}$. On définit une catégorie

$$(\underline{V}\text{-}\underline{U}\text{-Top}) \quad ,$$

dont les objets sont les $\underline{U}$-topos qui sont $\in \underline{V}$, les flèches sont les morphismes entre de tels $\underline{U}$-topos, et la composition des flèches étant celle qu'on vient d'expliciter.

3.3.2. En fait, l'application de composition

$$\mathrm{Homtop}(E,E') \times \mathrm{Homtop}(E',E'') \longrightarrow \mathrm{Homtop}(E,E'')$$

est l'application induite sur les objets par un "foncteur composition des morphismes" :

$$\underline{\mathrm{Homtop}}(E,E')\times\underline{\mathrm{Homtop}}(E',E'') \longrightarrow \underline{\mathrm{Homtop}}(E,E'') \quad ,$$

dont l'effet sur les flèches est l'opération "produit de convolution" habituel pour des morphismes entre foncteurs (ici des foncteurs image directe). Ces foncteurs composition satisfont à une propriété d'associativité (stricte), pour quatre topos E, E', E", E‴, précisant l'associativité de la composition des morphismes de topos. On peut dire aussi, dans un langage qui commence à devenir familier [2] [9], que les U-topos sont les objets (ou 0-flèches) d'une 2-catégorie, dont les 1-flèches sont les morphismes de topos, et les 2-flèches sont les morphismes de morphismes de topos.

C'est le fait que les U-topos (éléments d'un univers V) forment une 2-catégorie, et non plus seulement une catégorie ordinaire comme les espaces topologiques ordinaires, qui constitue du point de vue technique la différence la plus importante entre la théorie des topos et celle des espaces topologiques. Ce fait est la source de certaines complications techniques auxquelles on a déjà fait allusion, mais aussi de faits essentiellement nouveaux par rapport à la topologie traditionnelle.

3.4. Le fait que les U-topos (éléments d'un univers V) forment une 2-catégorie (3.3.2) permet en particulier de définir la notion d'*équivalence de deux U-topos* E, E' : on dira que E et E' sont *équivalents* s'il existe des morphismes de topos $u:E \rightarrow E'$ et $v:E' \rightarrow E$, tels que les composés uv et vu soient isomorphes respectivement au morphisme identique de E et de E' ; on dit alors que les morphismes u et v sont des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre.

On constate aussitôt que pour que le morphisme de topos $u : E \longrightarrow E'$ soit une équivalence, il faut et il suffit que u_* soit une équivalence, ou ce qui revient au même, que u^* soit une équivalence. (Utiliser le fait qu'un foncteur $f: E \longrightarrow E'$ entre deux topos qui est une équivalence est à la fois de la forme u_* et de la forme v^*, avec u et v des morphismes de topos) ; et pour que E et E' soient équivalents au sens de l'alinéa précédent, il faut et il suffit qu'ils soient équivalents en tant que catégories (i.e. comme objets de la 2-catégorie ($\underline{V}$-cat)). Comme de juste, cela montre que les notions d'équivalence introduites ne dépendent pas du choix de l'univers $\underline{V}$ de 3.3.1.

3.4.1. Pratiquement, il n'y a pas lieu le plus souvent de distinguer essentiellement entre $\underline{U}$-topos équivalents, tout comme il n'y a pas lieu souvent de distinguer essentiellement entre deux catégories équivalentes, - à condition toutefois qu'on dispose d'une équivalence explicite de l'un à l'autre, ou tout au moins une équivalence définie à isomorphisme unique près. C'est la notion d'équivalence de topos qui remplace ici la notion traditionnelle d'homéomorphie entre deux espaces topologiques. Voir l'exemple 4.2 plus bas pour les relations précises entre ces deux notions.

4. Exemples de morphismes de topos

Nous reprenons ici les exemples de 2, en utilisant la notion de morphisme de topos. Les commentaires de 2.0 s'appliquent également au présent numéro. L'univers $\underline{U}$ sera généralement sous-entendu.

4.1. <u>Le topos</u> Top(X) <u>pour un espace topologique</u> X <u>variable</u>

4.1.1. Soit une application continue

$$f: X \longrightarrow Y$$

d'espaces topologiques, on va lui associer canoniquement un morphisme de topos

$$\mathrm{Top}(f) \text{ ou } f : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(Y) \quad ,$$

avec les notations de 2.1. Lorsqu'on définit Top(X) comme $\mathrm{Ouv}(X)^{\sim}$, la description la plus commode de Top(f) est par le foncteur image directe de faisceaux

$$f_* : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(Y) \quad ,$$

défini par la formule

$$f_*(F) = F \circ f^{-1} \quad ,$$

où

$$f^{-1} : \mathrm{Ouv}(Y) \longrightarrow \mathrm{Ouv}(X)$$

est le foncteur évident $U \longrightarrow f^{-1}(U)$. On a déjà noté que ce foncteur est continu et exact à gauche, donc définit bien un foncteur f_* ci-dessus, admettant un adjoint à droite f^* qui est exact à gauche (III 1.9.1). Bien entendu, en toute rigueur, le morphisme de Topos Top(f) dépend du choix de l'adjoint à droite f^* de f_*, donc n'est défini qu'à isomorphisme canonique près. On se dispensera par la suite de signaler expressément des phénomènes de ce genre.

Lorsqu'on adopte le point de vue "espaces étalés" pour définir Top(X), c'est le foncteur image inverse

$$f^* : \mathrm{Top}(Y) \longrightarrow \mathrm{Top}(X)$$

qui est le plus commode pour définir le morphisme de Topos Top(f), en posant simplement

$$f^*(Y') = X \times_Y Y'$$

pour tout espace étalé Y' sur Y ; il est évident que le produit fibré est bien un espace étale sur X, et que le foncteur f* ainsi obtenu est exact à gauche et commute aux $\varinjlim$ quelconques, et définit par suite un morphisme de topos Top(f). Pour la compatibilité des deux définitions obtenues, nous renvoyons à [TF].

Lorsqu'on a deux applications continues composables

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \quad ,$$

on trouve un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Top}(gf) \simeq \mathrm{Top}(g)\mathrm{Top}(f)$$

de morphismes de topos. Ces <u>isomorphismes de transitivité</u>, pour trois applications continues composables f,g,h satisfont à une relation de compatibilité que nous nous dispensons d'écrire ici, et qui n'est autre que celle envisagée dans SGA 1 VI 7.4 B) (pour $\mathcal{E} = (\mathrm{Esp})^{\circ}$). On peut l'exprimer en disant que pour X variable dans la catégorie (Esp),

$$X \longmapsto \mathrm{Top}(X)$$

est un "pseudo-foncteur"

(4.1.1.1) $$(\underline{U}\text{-esp}) \longrightarrow (\underline{V}\text{-}\underline{U}\text{-top}) \quad ,$$

ou aussi, dans la terminologie des 2-catégories, qu'on a un foncteur <u>non strict</u> de 2-catégories [9]. En pratique, on se permettra le plus souvent l'abus de langage consistant à identifier Top(gf) et Top(g)Top(f), c'est-à-dire de raisonner comme si (4.1.1.1) était un vrai foncteur de catégories ordinaires. On se permettra les abus de langage analogues dans les autres exemples qui seront traités ci-dessous.

4.1.2. Les considérations précédentes s'étendent immédiatement au cas des topos associés aux espaces topologiques à groupes d'opérateurs (2.3). Si $f = (f^{es}, f^{gr})$,

$$f : (X,G) \longrightarrow (Y,H)$$

est un morphisme d'espaces à opérateurs (où

$$f^{es} : X \longrightarrow Y \text{ et } f^{gr} : G \longrightarrow H$$

sont respectivement des applications continues et des morphismes de groupes, compatibles dans un sens évident), on lui associe un morphisme de topos

$$\mathrm{Top}(f) \text{ ou } f : \mathrm{Top}(X,G) \longrightarrow \mathrm{Top}(Y,H) \quad ,$$

dont la définition est laissée au lecteur. Lorsque les groupes G et H sont les groupes unité, on retrouve la définition de 4.1.1 ; lorsque par contre ce sont les espaces X et Y qui sont réduits à un point, on trouve comme foncteur image inverse f^* le foncteur "restriction du groupe d'opérateurs"

$$f^* : B_H \longrightarrow B_G \quad ,$$

associant à tout H-ensemble le G-ensemble qu'il définit grâce à $f:G \to H$. On retrouvera cet exemple sous d'autres formes encore dans 4.5 et 4.6.1.

4.1.3. Etant donné une application continue $f:X \to Y$ d'espaces topologiques, on lui associe également un morphisme sur les "gros topos" correspondants (2.5)

$$TOP(f) \text{ ou } f : TOP(X) \longrightarrow TOP(Y) \quad ,$$

défini le plus commodément par le foncteur image inverse

$$f^* : TOP(Y) \longrightarrow TOP(X) \quad ,$$

qui n'est autre que le foncteur restriction. Ce morphisme TOP(f) est un cas particulier du morphisme dit "d'inclusion" pour un topos induit, qui sera étudié dans 5. On voit ainsi que, sous les mêmes réserves que dans 4.1.1, le topos TOP(X) peut être considéré comme un foncteur en X, pour X variable dans (Esp).

4.2. Propriétés de fidélité de $X \longmapsto Top(X)$

Nous nous proposons de préciser dans quelle mesure un espace topologique X peut se réconstituer en termes du topos Top(X), et dans ce but il convient de décrire, pour deux espaces X et Y, la catégorie des morphismes de Top(X) dans Top(Y) (3.2), de façon à pouvoir préciser les propriétés de fidélité du "foncteur" $X \longmapsto Top(X)$. Nous nous bornons à énoncer les résultats auxquels on parvient, en renvoyant le lecteur à [9] pour des détails. Le lecteur qui voudra faire l'exercice de vérification lui-même pourra consulter l'exer. 7.8.

4.2.1. Rappelons qu'un espace topologique X est dit sobre si toute partie fermée irréductible de X a exactement un point générique. Signalons que presque tous les espaces utilisés en pratique sont sobres ; il en est en particulier ainsi d'un espace séparé, plus généralement d'un espace dont tous les points sont fermés, ou de l'espace sous-jacent à un schéma. Si X est un espace topologique, on lui associe (loc. cit. ou EGA $\underline{O}_I$, réédition) un espace topologique sobre X_{sob} et une application continue

(4.2.1.1) $$\varphi : X \longrightarrow X_{sob}$$

qui soit universelle pour les applications continues de X dans des espaces sobres ; en d'autres termes, on construit un foncteur adjoint à gauche $X \longmapsto X_{sob}$ du foncteur d'inclusion (Espsob) $\longrightarrow$ (Esp) de la catégorie des espaces sobres dans celle des espaces topologiques "quelconques" (les guillemets rappelant qu'il y a un univers !). La construction explicite se fait en prenant comme points de X_{sob} les parties fermées irréductibles de X, comme ouverts les ensembles de la forme U', où U est un ouvert de X et où $U' \subset X_{sob}$ désigne l'ensemble des parties fermées irréductibles de X qui rencontrent U. L'application (4.2.1.1) est obtenue en associant à tout $x \in X$ l'adhérence de $\{x\}$. L'espace X est sobre si et seulement si l'application précédente est bijective, donc un homéomorphisme.

On constate que le foncteur

$$\varphi^{-1} : \mathrm{Ouv}(X_{sob}) \longrightarrow \mathrm{Ouv}(X)$$

induit par φ est un isomorphisme, ce qui implique que le morphisme de topos

$$\mathrm{Top}(\varphi) : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(X_{sob})$$

défini par φ est également un isomorphisme. Ceci explique à priori pourquoi X_{sob} doit s'introduire nécessairement dans la question de réconstituer X à partir de Top(X) : comme ce dernier ne dépend que de X_{sob} à isomorphisme près, la question ne pourra avoir une réponse affirmative que si X est sobre. Nous préciserons plus bas (7.1) comment X_{sob} peut effectivement se réconstituer en termes de Top(X), en interprétant ses points comme des "points" du topos Top(X) (ou encore comme des foncteurs fibres).

4.2.2. Sur tout espace topologique, il y a lieu d'introduire la relation d'ordre $\leq$ pour laquelle on a

$$x \leq y \Longleftrightarrow \overline{\{x\}} \subset \overline{\{y\}} \quad \text{i.e. } x \in \overline{\{y\}}$$

(qu'on exprime encore en disant que x est une spécialisation de y, ou que y est une générisation de x). Pour un espace de la forme X_{sob}, ce n'est autre que la relation d'inclusion entre parties fermées irréductibles de X.

Ceci posé, il y a lieu d'introduire, sur l'ensemble des applications d'un espace X dans un autre Y, la relation d'ordre dite de "spécialisation", déduite de celle de Y, savoir

$$f \leq g \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x) \quad \text{pour tout } x \in X \quad .$$

Avec ces conventions, on a le résultat suivant :

4.2.3. Soient X, Y deux espaces topologiques, avec Y sobre, et soient f et g deux applications continues de X dans Y. Alors il y a au plus un morphisme de Top(f) dans Top(g), et pour qu'il y en ait un, il faut et il suffit que g soit une spécialisation de f. Enfin, tout morphisme de topos Top(X) $\longrightarrow$ Top(Y) est isomorphe à un morphisme de la forme Top(f), où f:X $\longrightarrow$ Y est une application continue (uniquement déterminée grâce à la première assertion).

Si on définit la catégorie cat(I) associé à un ensemble ordonné I en déclarant que pour $i \geq j$, il y a exactement une flèche de i dans j, on peut résumer le résultat précédent en disant qu'on a une équivalence de catégories canonique

$$\mathrm{cat}(\mathrm{Hom}_{(esp)}(X,Y)) \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Homtop}}(\mathrm{Top}(X),\mathrm{Top}(Y))$$

(où le deuxième membre est défini dans 3.2).

On conclut formellement de ces résultats :

Corollaire 4.2.4. a) *Soit* $f:X \longrightarrow Y$ *une application continue*. *Alors* $\mathrm{Top}(f) : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(Y)$ *est une équivalence de topos si et seulement si* $f_{sob} : X_{sob} \longrightarrow Y_{sob}$ *est un homéomorphisme* (*donc*, *lorsque* X *et* Y *sont sobres*, *si et seulement si* f *est un homéomorphisme*).

b) *Soient* X *et* Y *des espaces topologiques*. *Pour que* Top(X) *et* Top(Y) *soient équivalents*, *il faut et il suffit que* X_{sob} *et* Y_{sob} *soient homéomorphes* (*donc*, *si* X *et* Y *sont sobres*, *il faut et suffit que* X *et* Y *soient homéomorphes*).

4.3. *Morphismes dans le topos final* : *objets constants d'un topos, foncteurs sections*

Désignons par P (initiale de "point") le topos final type, i.e. P = (Ens) (2.2). Soit E un topos quelconque, on va voir qu'*à isomorphisme unique près*, *il existe un unique morphisme de topos*

$$f : E \longrightarrow P$$

plus précisément, que *la catégorie* $\underline{\mathrm{Homtop}}(E,P)$ *est équivalente à la catégorie ponctuelle* : pour deux objets de cette catégorie, il existe donc une unique flèche de l'un dans l'autre, et c'est un isomorphisme. (Cela justifie dans une certaine mesure l'appellation "topos final"). Pour ceci, rappelons (3.2.1) que $\underline{\mathrm{Homtop}}(E,P)$ est équivalente à la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}(P,E)^{\circ}$ formée des foncteurs

$$f^{*} : P = (\mathrm{Ens}) \longrightarrow E$$

qui commutent aux $\varinjlim$ et sont exacts à gauche. Soit e un ensemble ponctuel, alors tout ensemble X s'écrit canoniquement comme "somme de X copies de e ", d'où résulte que la catégorie des foncteurs $g : (\mathrm{Ens}) \longrightarrow E$ qui commutent aux $\varinjlim$ est équivalente à la catégorie E, en associant à tout g l'objet g(e) de E. On réconstitue g en termes de $T=g(e)$, à isomorphisme unique près, par $g(I) = T\times I$, où on pose $T\times I = \coprod_{i\in I} T_i$, avec $T_i=T$ pour tout $i \in I$. Que le foncteur en I ainsi défini par T commute bien aux $\varinjlim$ résulte du fait qu'il est manifestement adjoint à droite du foncteur $X \longmapsto \mathrm{Hom}(T,X)$ de E dans (Ens). Ceci dit, pour que g soit exact à gauche, il est évidemment nécessaire que $g(e)=T$ soit un objet final de E (puisque e est un objet final de (Ens)), et il résulte facilement du fait que dans E "les sommes sont universelles" (1.1.2 b)) que cette condition est aussi suffisante. On trouve donc que la catégorie des foncteurs f^{*} images inverses est équivalente à la catégorie des objets finaux de E, qui est évidemment elle-même équivalente à la catégorie finale.

D'après ce qui précède, on voit que le choix d'un morphisme (4.3.1) équivaut essentiellement à celui d'un objet final de E, soit e_E. En termes de celui-ci, on a alors des isomorphismes canoniques de foncteurs

(4.3.2) $f^*(I) \simeq e_E \times I$ = somme de I copies de e_E pour $I \in ob(Ens)$,

et

(4.3.3) $f_*(X) = Hom(e_E, X)$ pour $X \in Ob\, E$.

4.3.4. Les deux foncteurs précédents joueront par la suite un rôle important. Pour un ensemble I, on appelle <u>objet constant de valeur</u> I dans E (ou, lorsque E est réalisé comme une catégorie $C^\sim$ en termes d'un site C, <u>faisceau constant de valeur</u> I <u>sur</u> C), l'objet $f^*(I) = e_E \times I$ de (4.3.2). On le notera aussi souvent I_E, où I_C lorsque E est défini par le site C. Le fait que $I \longmapsto I_E$ soit le foncteur image inverse d'un morphisme de topos en précise les propriétés d'exactitude, qui impliquent en particulier que ce foncteur respecte toutes les espèces de structure algébriques habituelles, transformant un groupe en un objet groupe de E etc (3.1.2). Lorsqu'on a par exemple un Groupe G de E, on dira que c'est un <u>Groupe constant</u> (ou, le cas échéant, un <u>faisceau en groupes constant</u>) s'il est isomorphe à un groupe de la forme G_{oE}, où G_o est un groupe ordinaire. Même terminologie pour toute autre espèce de structure "algébrique", au sens précisé (plus ou moins) dans 3.1.2.

4.3.5. On fera attention que le foncteur $I \longmapsto I_E$ n'est pas nécessairement pleinement fidèle (ni même fidèle : prendre pour E le "topos vide" (2.2)), donc un objet constant de E ne détermine pas en général à isomorphisme unique près l'ensemble I qui lui donne naissance. On dit que E est O-<u>acyclique</u>, ou <u>connexe</u>-<u>non vide</u>, si le foncteur $I \mapsto I_E$ est pleinement fidèle. Il revient au même, d'après les propriétés générales des foncteurs adjoints, de dire que le morphisme d'adjonction

$$I \longrightarrow f_*(f^*(I)) = f_*(I_E) = \mathrm{Hom}(e_E,\ I_E)$$

est un isomorphisme (de sorte que le foncteur (4.3.3) permet de récupérer la "valeur" d'un objet constant de E). On vérifie facilement qu'il faut et il suffit pour cela que e_E ne soit pas l'objet initial $\emptyset_E$ de E, i.e. que E ne soit pas un "topos vide" (ce qui exprime la <u>fidélité</u> du foncteur $I \longmapsto I_E$ (*)), <u>et</u> que e_E soit un objet <u>connexe</u> de E, i.e. ne soit pas somme de deux objets de E qui ne soient pas "vides" (i.e. qui ne soient pas des objets initiaux de E).

4.3.6. Le foncteur (4.3.3) est aussi souvent appelé <u>foncteur sections</u> et noté Γ_E ou $\Gamma(E,-)$ ou simplement Γ :

(4.3.6.1) $$\mathrm{Hom}(e_E,X) = \Gamma_E(X) = \Gamma(E,X) = \Gamma(X) \quad .$$

C'est un foncteur commutant aux limites projectives quelconques, mais pas exact à droite en général, dont les foncteurs dérivés (sur les objets groupes abéliens) seront étudiés dans le prochain exposé.

4.4. <u>Morphismes du "topos vide"</u>

Soit $\emptyset_{top}$ un topos vide, qui correspond donc à une catégorie de faisceaux Φ équivalente à la catégorie finale (2.2). Soit E un topos. La catégorie des foncteurs de E dans Φ est évidemment équivalente à la catégorie ponctuelle, et tout tel foncteur commute aux limites inductives et projectives (sans aucun mérite d'ailleurs), donc peut être considéré comme un foncteur image inverse f pour un morphisme de topos $\emptyset_{top} \longrightarrow E$. Il en résulte que la <u>catégorie</u> <u>Homtop($\emptyset_{top}$,E)</u> <u>est équivalente à la catégorie ponctuelle</u>, et en particulier qu'<u>il existe à</u>

(*) ou encore le fait que ce foncteur est conservatif (I 6.3).

isomorphisme unique près un et un seul morphisme de topos

(4.4.1) $$\emptyset_{top} \longrightarrow E \quad .$$

Ceci justifie dans une certaine mesure la terminologie "topos initial" introduite dans 2.2.

On peut aussi déterminer les morphismes de topos

(4.4.2) $$E \longrightarrow \emptyset_{top} \quad ;$$

on vérifie aussitôt qu'il existe un tel morphisme si et seulement si l'objet initial de E est aussi un objet final, i.e. si et seulement si E lui-même est un "topos vide", et que dans ce cas la catégorie $\underline{\mathrm{Homtop}}(E,\emptyset_{top})$ est encore équivalente à la catégorie ponctuelle. L'unique morphisme (4.4.2) (modulo isomorphie) est alors une équivalence de topos.

4.5. Le topos classifiant B_G pour G Groupe variable

4.5.1. Soient E un topos, et

$$f : G \longrightarrow H$$

un morphisme de Groupes dans E. On en déduit un foncteur "restriction du Groupe d'opérateurs"

$$f^* : B_H \longrightarrow B_G \quad ,$$

où les notations sont celles de 2.4. Il est trivial que ce foncteur commute aux limites inductives et aux limites projectives, a fortiori il peut être interprété comme un foncteur image inverse associé à un morphisme de topos

$$B_f \text{ ou } f : B_G \longrightarrow B_H \quad .$$

On explicite aisément le foncteur image directe correspondant

$$f_* : B_G \longrightarrow B_H$$

par la formule

$$f_*(X) = \underline{\mathrm{Hom}}_G(H_s, X) \quad ,$$

où X est un objet de X avec G opérant à gauche, où H_s est H regardé comme muni des opérations à gauche par G déduites de F, et où $\underline{\mathrm{Hom}}_G$ désigne le sous-objet qu'on devine de l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}$ défini plus bas (10.   ) ; on fait opérer H à gauche sur $\underline{\mathrm{Hom}}_G(H_s, X)$ grâce aux opérations droites de H sur H_s par translations à <u>droite</u>.

Comme le foncteur image inverse f* commute aux $\varinjlim$ quelconques (et non seulement aux $\varinjlim$ finies), il est lui-même l'adjoint à gauche d'un foncteur

$$f_! : B_G \longrightarrow B_H \quad ,$$

de sorte qu'on a une suite de trois foncteurs adjoints comme dans 3.1.3 :

$$f_! \ , \ f^* \ , \ f_* \quad .$$

On explicite aisément $f_!$ par la formule

$$f_!(X) = H\times^G X \quad ,$$

où le deuxième membre désigne le "produit contracté", déduit des opérations de G sur X (à gauche) et sur H (à droite via translations à droite et f), défini comme le quotient de $H\times X$ par G opérant par la formule

$$g.(h,x) = (hg^{-1}, gx) \quad .$$

Le foncteur $f_!$, étant un adjoint à gauche, commute évidemment aux limites inductives, mais il n'est pas en général exact à gauche (i.e.

il ne peut être considéré à son tour comme un foncteur image inverse par un morphisme de topos $B_H \longrightarrow B_G$). En fait, on vérifie facilement qu'il ne peut être exact à gauche que si $f: G \longrightarrow H$ est un isomorphisme. De même, le foncteur f_*, qui commute aux limites projectives, n'est pas en général exact à droite, et a fortiori n'admet pas en général d'adjoint à droite. Tout au moins lorsque E est le topos ponctuel i.e. que G et H sont des groupes ordinaires, f_* n'est exact à droite que si f est un isomorphisme.

Lorsqu'on a un deuxième morphisme de groupes $g:H \longrightarrow K$, on trouve comme dans 4.1.1 une transitivité à isomorphisme canonique près, de sorte que, sous la réserve habituelle, on peut considérer que le topos classifiant B_G dépend <u>fonctoriellement</u> du Groupe G. On laisse au lecteur le soin de généraliser comportement fonctoriel pour le cas où on fait varier simultanément G <u>et</u> le topos E.

4.5.2. <u>Le topos</u> $B_{\underline{G}}$ <u>pour un pro-groupe variable</u> $\underline{G}$

On laisse au lecteur le soin de préciser le caractère covariant du topos $B_{\underline{G}}$ (2.7) par rapport à $\underline{G}$, en calquant l'exposé que nous en donnons dans 4.5.1. On fera attention cependant que dans le cas d'un morphisme $f:\underline{G} \longrightarrow \underline{H}$ de pro-groupes qui ne sont pas essentiellement constants, le morphisme de topos correspondant $B_{\underline{G}} \longrightarrow B_{\underline{H}}$ ne permet pas en général la définition d'un foncteur $f_!$ (dont l'adjoint à droite soit le foncteur f^* de restriction du pro-groupe d'opérateurs). Supposant, pour simplifier l'énoncé, que $\underline{G}$ et $\underline{H}$ soient définis par des groupes <u>profinis</u> G et H, on voit facilement que $f_!$ existe si et seulement si l'image du morphisme envisagé $f:G \longrightarrow H$ est d'indice fini dans H, et dans ce cas $f_!$ est donné par la même formule que dans 4.5.

4.6. Le topos $\hat{C}$ pour C catégorie variable

4.6.1. Soit

$$f : C \longrightarrow C'$$

un foncteur d'une catégorie $C \in \underline{U}$ dans une autre C', d'où un foncteur

$$f^* : \hat{C}' \longrightarrow \hat{C} \quad , \quad f^*(F) = F \circ f \quad .$$

Il est trivial que ce foncteur commute aux limites projectives et aux limites inductives, a fortiori il peut être considéré comme le foncteur image inverse pour un morphisme de topos

$$\hat{f} \text{ ou } f: \hat{C} \longrightarrow \hat{C}' \quad .$$

Le foncteur image directe correspondant

$$f_*: \hat{C} \longrightarrow \hat{C}'$$

n'est autre que le foncteur également noté f_* dans I 5.1. De plus (comme il était à prévoir du fait que f^* commute également aux $\varprojlim$ quelconques) f^* admet aussi un adjoint à gauche

$$f_!: C \longrightarrow C' \quad ,$$

(qui était noté aussi $f_!$ dans I 5.1). On obtient donc une suite de trois foncteurs adjoints

$$f_! \ , \ f^* \ , \ f_* \quad ,$$

le premier étant d'ailleurs un prolongement de $f:C \longrightarrow C'$ aux catégories de préfaisceaux (pour le plongement habituel de C, C' dans les catégories $\hat{C}$, $\hat{C}'$). On fera attention que le foncteur $f_!$ n'est pas en général exact à gauche, ni f_* exact à droite, ce qui lève donc toute ambiguité sur la direction de la variance du topos $\hat{C}$ associé à la catégorie variable C : ce topos est un foncteur covariant en C, sous la réserve habituelle provenant des isomorphismes de transitivité (cf. 4.1.1). Lorsque l'ensemble des objets de C et de C' est réduit à un élément, de sorte que C et C' s'identifient à des monoïdes G, G', les topos correspondants sont les topos classifiants B_{G^o} et $B_{G'^o}$, et on retrouve la variance de ceux-ci pour G variable rencontrée déjà à d'autres points de vue dans 4.1.2 et 4.5 (où la restriction à des groupes au lieu de monoïdes n'avait rien d'essentiel).

4.6.2. On peut préciser la dépendance 2-fonctorielle du topos $\hat{C}$ par rapport à C, en introduisant pour deux catégories C, C' $\in$ $\underline{U}$ un foncteur canonique

(4.6.2.1) $$\underline{\mathrm{Hom}}(C,C') \longrightarrow \underline{\mathrm{Homtop}}(\hat{C},\hat{C}').$$

Il reste à définir ce foncteur sur les flèches, et pour ceci on note que $f \longmapsto f^*$ permet d'identifier (à équivalence de catégories près) le deuxième membre à une sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}(\hat{C}',\hat{C})^o$ (3.2.1). Or si $f,g \colon C \longrightarrow C'$ sont deux foncteurs, tout morphisme $u \colon f \longrightarrow g$ de foncteurs définit un morphisme $F\circ g \longrightarrow F\circ f$ de foncteurs en $F \in \mathrm{ob}\, \hat{C}'$ (F étant un contrafoncteur), qui est donc un morphisme $g^* \longrightarrow f^*$ et définit par suite un morphisme $\hat{f} \longrightarrow \hat{g}$ comme annoncé.

Lorsque C est la catégorie ponctuelle, $\hat{C}$ est le topos ponctuel (2.2) noté P, et (4.6.2.1) s'interprète comme un foncteur naturel

(4.6.2.2) $$C' \longrightarrow \underline{\mathrm{Homtop}}(P,\hat{C}') \overset{\mathrm{dfn}}{=} \underline{\mathrm{Points}}(\hat{C}')$$

de C' dans la "catégorie des points" de $\hat{C}'$, qui sera étudiée dans 6.

Ce foncteur n'est pas nécessairement une équivalence de catégories (7.3.3), a fortiori (4.6.2.1) n'est pas nécessairement une équivalence de catégories.

Par contre, le foncteur (4.6.2.1) est toujours pleinement fidèle. Pour voir ceci, notons que si $f,g: E \longrightarrow E'$ sont deux morphismes de topos tels que $f_!$ et $g_!$ soient définis (3.1.3), il résulte de la théorie des foncteurs adjoints qu'on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}(f_!,g_!) \simeq \mathrm{Hom}(g^*,f^*) \simeq \mathrm{Hom}(f_*,g_*) \overset{\mathrm{dfn}}{=} \mathrm{Hom}(f,g) \quad .$$

Appliquant ceci à des foncteurs de la forme $\hat{f}$, $\hat{g}$ associés à $f,g: C \rightarrow C'$, on trouve le résultat annoncé, compte tenu que l'application naturelle de prolongement $\mathrm{Hom}(f,g) \rightarrow \mathrm{Hom}(f_!,g_!)$ est bijective (I 7.8).

4.6.3. On peut se demander quand le foncteur (4.6.2.1) est une équivalence de catégories, i.e. quand il est essentiellement surjectif, ce qui est un cas particulier de la question de déterminer tous les morphismes de topos $\hat{C} \longrightarrow \hat{C}'$. Plus généralement, si C est une catégorie $\in \underline{U}$ et E un topos, on peut se proposer de déterminer les morphismes de topos

$$f: \hat{C} \longrightarrow E \quad .$$

La catégorie de ces morphismes est équivalente à la catégorie opposée de celle des foncteurs $f^*: E \longrightarrow \hat{C}$ commutant aux limites inductives quelconques et aux limites projectives finies. Interprétant les foncteurs $E \longrightarrow \hat{C}$ comme des foncteurs $E \times C^{\circ} \longrightarrow (\underline{U}\text{-Ens}) = (\mathrm{Ens})$, ou encore comme des foncteurs $F: C^{\circ} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(E, (\mathrm{Ens}))$, la propriété d'exactitude envisagée s'exprime par la condition que pour tout objet X de C, le foncteur $F(X) : E \longrightarrow (\mathrm{Ens})$ commute aux limites inductives quelconques et aux limites projectives finies, (ou, comme nous dirons dans 6, $F(X)$ est un

"<u>foncteur fibre</u>" sur E). Il revient au même de dire que F(X) est le foncteur image inverse pour un morphisme de topos $P \longrightarrow E$, de sorte qu'on trouve finalement une équivalence de catégories canonique

(4.6.3.1) $$\underline{\mathrm{Homtop}}(\hat{C},E) \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Hom}}(C, \underline{\mathrm{Points}}(E)) \quad ,$$

où on désigne pour abréger par

$$\underline{\mathrm{Points}}(E) = \underline{\mathrm{Homtop}}(P,E)$$

la catégorie des points du topos E.

Lorsque E est de la forme $\hat{C}'$, on voit aussitôt à partir des définitions que le composé de (4.6.2.1) et de l'équivalence précédente (4.6.3.1) est le foncteur

(4.6.3.2) $$\underline{\mathrm{Hom}}(C,C') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C,\underline{\mathrm{Points}}(\hat{C}'))$$

défini par $F \longmapsto i \circ F$, où $i: C' \longrightarrow \underline{\mathrm{Points}}(\hat{C}')$ est le plongement canonique (4.6.2.2). Il s'ensuit aussitôt que <u>pour que</u> (4.6.2.1) <u>soit une équivalence, il faut et il suffit que</u> C <u>soit vide ou que</u> (4.6.2.2) <u>soit essentiellement surjectif</u> (donc une équivalence de catégories). Cette dernière condition sur C' est satisfaite dans certains cas intéressants, et notamment lorsque C' est la catégorie à un seul objet définie par un groupe G (7.2.5).

<u>Remarque</u> 4.6.4. Le fait d'avoir associé un topos $\hat{C}$ à une catégorie arbitraire C suggère qu'une catégorie C admet des invariants de nature topologique (groupes de cohomologie, d'homotopie etc), tout comme un topos. Les groupes de cohomologie de $\hat{C}$ à coefficients dans un objet groupe abélien F (au sens général étudié dans V) ne sont autres que les valeurs des foncteurs dérivés $\varprojlim^{(n)}$ du foncteur $\varprojlim$, déjà fami-

liers aux topologues. J.L. Verdier et (indépendamment) D.G. Quillen ont vérifiés que lorsqu'on se borne aux coefficients constants, ou plus généralement localement constants, ces groupes de cohomologie s'identifient aux groupes de cohomologie de l'ensemble sémi-simplicial Nerf(C) canoniquement associé à C [5, n° 212, prop. 4.1] et que de plus, à isomorphie près dans la "catégorie homotopique" de [2], tout ensemble semi-simplical peut être obtenu à l'aide d'une catégorie C. Moyennant une notion convenable de type d'homotopie pour des topos, que nous ne précisons pas ici, on peut dire que les types d'homotopie semi-simpliciaux des topologues ne sont autres que les types d'homotopie des topos de la forme spéciale $\hat{C}$, plus généralement des topos E où tout objet admette un recouvrement qui raffine tous les autres (2.6) (*). En l'absence de cette condition sur E, on peut tout au mieux exprimer son type d'homotopie par un <u>système projectif</u> convenable d'ensembles semi-simpliciaux [1].

4.7. <u>Le topos</u> $C^{\sim}$ <u>pour un site</u> C <u>variable</u> (<u>foncteurs cocontinus</u>)

Soit

$$f: C \longrightarrow C'$$

un foncteur cocontinu (III 2.1) entre sites $\in$ <u>U</u>, i.e. un foncteur tel que le foncteur $\hat{f}_*$ ou f_* : $F \longmapsto F\circ f$ de $\hat{C}$ dans $\hat{C}'$ (4.6.1) applique $\tilde{C}$ dans $\tilde{C}'$, c'est-à-dire induise un foncteur

(4.7.1) $$\tilde{f}_*: \tilde{C} \longrightarrow C'^{\sim}$$

rendant commutatif le diagramme de foncteurs

(*) et, plus généralement encore, des topos qui sont "localement ∞-connexes" en un sens évident que nous laissons au lecteur le soin de préciser.

(4.7.2)
$$\begin{array}{ccc} C^{\sim} & \xrightarrow{\tilde{f}_*} & C'^{\sim} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ \hat{C} & \xrightarrow{\hat{f}_*} & \hat{C}' \end{array} ,$$

où i, i' sont les foncteurs d'inclusion. On a vu alors (III 2.3) que le foncteur $\tilde{f}_*$ admet un adjoint à gauche $\tilde{f}^*$, et que ce dernier est exact à gauche. En d'autres termes, $\tilde{f}_*$ est le foncteur image directe associé à un morphisme de topos

$$\tilde{f} \quad \text{ou} \quad f : \tilde{C} \longrightarrow C'^{\sim} ,$$

le foncteur image inverse correspondant étant bien entendu $\tilde{f}^*$. Prenant les adjoints à gauche des foncteurs en jeu, le diagramme commutatif (4.7.2) donne d'ailleurs un diagramme commutatif à isomorphisme près

(4.7.3)
$$\begin{array}{ccc} C^{\sim} & \xleftarrow{\tilde{f}^*} & C'^{\sim} \\ {\scriptstyle \underline{a}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \underline{a}'} \\ \hat{C} & \xleftarrow{\hat{f}^*} & \hat{C}' \end{array} ,$$

où $\underline{a}$ et $\underline{a}'$ sont les foncteurs "faisceaux associés", diagramme qui redonne aussitôt la formule (III 2.3)

$$\tilde{f}^* = \underline{a}\,\hat{f}^* i' .$$

La propriété de transitivité pour les morphismes de topos $\hat{f} : \hat{C} \longrightarrow \hat{C}'$ implique la même propriété pour les morphismes de topos $\tilde{f} : C^{\sim} \longrightarrow C'^{\sim}$ associés à des foncteurs cocontinus, de sorte qu'on peut dire que <u>le topos</u> $C^{\sim}$ <u>varie fonctoriellement en</u> C de façon <u>covariante</u>, quand on prend comme "morphismes" de sites les foncteurs cocontinus.

Dans tous les cas rencontrés jusqu'à présent, le foncteur cocontinu f utilisé est également continu, c'est-à-dire (III 1.1) se "prolonge" en un foncteur

$$\widetilde{f}_! : C^{\sim} \longrightarrow C'^{\sim}$$

commutant aux limites inductives, et qui est adjoint à gauche de $\widetilde{f}^*$, de sorte qu'on a une suite de trois foncteurs adjoints

$$\widetilde{f}_! \ , \ \widetilde{f}^* \ , \ \widetilde{f}_* \quad .$$

On fera attention que le foncteur $\widetilde{f}_!$ n'est pas en général exact à gauche, ni $\widetilde{f}_*$ exact à droite, ce qui lève toute ambiguité sur la direction de la variance du topos $C^{\sim}$, pour C variable par des foncteurs dont on suppose seulement qu'ils sont cocontinus, ou même continus et cocontinus.

Remarque 4.7.4. Etant donné un morphisme de topos

$$F : E \longrightarrow E' \quad ,$$

pour qu'il existe un foncteur $F_!$ adjoint à gauche de F^*, il faut et il suffit qu'on puisse "réaliser" (à équivalence près) E et E' sous la forme $C^{\sim}$ et $C'^{\sim}$, pour deux sites C, C' $\in \underline{U}$, et qu'on puisse trouver un foncteur continu et cocontinu f: C $\longrightarrow$ C' tel que F s'identifie à $\widetilde{f}$. C'est évidemment suffisant, et pour la nécessité, il suffit de prendre pour C et C' des petites sous-catégories pleines génératrices de E et E' respectivement, telles que

$$F_!(\mathrm{ob}\ C) \subset \mathrm{ob}\ C' \quad ,$$

munies des topologies induites par celles de E et de E', et de prendre pour f le foncteur induit par $F_!$ (cf. 1.2.1). Rappelons (1.8) que l'existence de $F_!$ signifie aussi que F^* commute aux limites projectives, ou, ce qui revient ici au même puisque ce foncteur est exact à gauche, qu'il commute aux produits.

4.5.5. Si on se demande quels sont les morphismes de topos $F: E \to E'$ qui peuvent se réaliser par un foncteur cocontinu (pas nécessairement continu) de sites, on voit de même que la réponse est la suivante : l'ensemble des objets X de E tels que le foncteur $X' \mapsto \mathrm{Hom}(X, F^*(X'))$ de E' dans (Ens) commute aux limites projectives (ou, ce qui revient au même, aux produits) doit être une <u>famille génératrice de</u> E.

4.8. <u>Le morphisme de topos</u> $\tilde{C} \to \hat{C}$ <u>pour un site</u> C.

Soit C un petit site, auquel sont donc associés les deux topos $C^{\sim}$ et $\hat{C}$ (le deuxième ne dépendant pas de la topologie mise sur C). On a défini dans II 3.4 le foncteur "faisceau associé"

$$\underline{a} : \hat{C} \longrightarrow C^{\sim} \quad ,$$

et établi qu'il est exact à gauche et commute aux limites inductives. C'est donc le foncteur image inverse associé à un morphisme de topos

$$p : \tilde{C} \longrightarrow \hat{C} \ , \ p^* = \underline{a} \quad ,$$

le foncteur image directe correspondant étant l'inclusion canonique

$$i = p_* : C^{\sim} \longrightarrow \hat{C} \quad .$$

Il est bien connu que ce dernier foncteur n'est pas en général exact à droite (ses foncteurs dérivés sur les objets abéliens donnent naissance aux préfaisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^n(F)$ de V 2), et que $\underline{a}$ ne commute pas en général aux $\varprojlim$ quelconques, ce qui lève toute ambiguité sur la direction du morphisme "naturel" de topos entre $\hat{C}$ et $C^{\sim}$.

Lorsqu'on a un foncteur cocontinu

$$f : C \longrightarrow C'$$

de sites, on en déduit un diagramme de morphismes de topos

$$\begin{tikzcd} C^{\sim} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & C'^{\sim} \arrow[d, "p'"] \\ \hat{C} \arrow[r, "\hat{f}"] & \hat{C}' \end{tikzcd}$$

qui est commutatif à isomorphisme canonique près : c'est en effet ce qu'exprime la commutativité du diagramme de foncteurs (4.7.2). On peut donc dire que le morphisme de topos $p: C^{\sim} \longrightarrow \hat{C}$ est fonctoriel en C, quand on varie C par des foncteurs <u>cocontinus</u> entre sites.

4.9. <u>Effet d'un foncteur continu de sites</u>. <u>Morphismes de sites</u>

4.9.1. Si

$$f: C \longrightarrow C'$$

est un foncteur continu de C dans C', i.e. tel que le foncteur $\hat{f}^* : \hat{C}' \longrightarrow \hat{C}$ applique $C'^{\sim}$ dans $C^{\sim}$, donc induise un foncteur

$$f_s : C'^{\sim} \longrightarrow C^{\sim} \quad ,$$

on a vu (III 1.2) que ce dernier admet un adjoint à gauche

$$f^s : C^{\sim} \longrightarrow C'^{\sim} \quad ,$$

qui "prolonge" d'ailleurs f dans un sens évident. On fera attention qu'en général f^s n'est pas exact à droite (même si f est de plus cocontinu), ni f_s ne commute aux limites inductives, de sorte que la donnée de f ne permet pas, sans autre hypothèse, de décrire un morphisme de topos dans un sens ou dans l'autre entre $C^{\sim}$ et $C'^{\sim}$. Le cas où f est cocontinu, i.e. où f_s commute aux limites inductives et peut donc être regardé comme un foncteur image inverse pour un morphisme de topos $\tilde{f} : C^{\sim} \longrightarrow C'^{\sim}$, a été examiné dans 4.7. Nous allons examiner le cas où le foncteur f^{s} est exact à gauche, donc peut être considéré comme un foncteur image inverse pour un morphisme de topos en sens inverse :

(4.9.1.1) $$\mathrm{Top}(f) = g : C'^{\sim} \longrightarrow C^{\sim} \quad .$$

On fera attention qu'on a pris garde de ne pas noter ce morphisme par la lettre $\tilde{f}$ ou f, pour éviter des confusions avec la situation de 4.7, suivant en cela les recommandations générales de 3.1.3. On dit parfois que le foncteur $f : C \longrightarrow C'$ est un morphisme de sites de C' dans C (attention, pas de C dans C') s'il est continu et si le foncteur f^{s} est exact à gauche, en d'autres termes s'il existe un morphisme de topos (4.9.1.1) tel que le foncteur image inverse correspondant

$$g^{*} : C^{\sim} \longrightarrow C'^{\sim}$$

prolonge le foncteur f, i.e. rende commutatif à isomorphisme près le diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & C' \arrow[d, "\varepsilon'"] \\ C^{\sim} \arrow[r, "g^{*}"] & C'^{\sim} \end{tikzcd} ,$$

où ε, ε' sont les foncteurs canoniques de II 4.4.0.

4.9.2. Pratiquement, on reconnait qu'un foncteur continu $f : C \longrightarrow C'$ est un morphisme de sites de C' dans C, par le fait que dans C les limites projectives finies sont représentables, et que f y commute (III 1.3 5)).

Moyennant la condition indiquée sur C (presque toujours vérifiée en pratique), et supposant de plus que la topologie de C' est moins fine que la topologie canonique (presque toujours vérifiée également), la condition suffisante précédente (f exact à gauche) pour que f soit un morphisme de sites de C' dans C est d'ailleurs aussi nécessaire.

4.9.3. Dans l'esprit de ce qui précède, si C et C' sont deux *U*-sites, il y a lieu de définir la catégorie des morphismes de sites *Morsite*(C',C) de C dans C' comme la sous-catégorie pleine de la catégorie *opposée* *Hom*$(C,C')^{\circ}$ de la catégorie des foncteurs de C dans C', formée des foncteurs qui veulent bien être des morphismes de sites (de C' dans C). De cette façon, on obtient un foncteur canonique (défini à isomorphisme unique près)

$$\underline{\mathrm{Morsite}}(C',C) \longrightarrow \underline{\mathrm{Homtop}}(C'^{\sim},C^{\sim}) \quad .$$

Proposition 4.9.4. *Soient* E *un* *U*-*topos*, C *un* *U*-*site*, *alors le foncteur* $f \longmapsto f^{*}|C = f^{*}\circ\varepsilon_{C}$, *associant à tout morphisme de topos* $f\colon E \longrightarrow C^{\sim}$ *la "restriction" à* C *du foncteur image inverse associé* $f^{*}\colon C^{\sim} \longrightarrow E$, *induit une équivalence de catégories*

$$\underline{\mathrm{Homtop}}(E,C^{\sim}) \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Morsite}}(E,C) \ (\hookrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C,E)^{\circ}) \quad .$$

Lorsque dans C *les* $\varprojlim$ *finies sont représentables, le foncteur pleinement fidèle correspondant*

$$\underline{\mathrm{Homtop}}(E,C^{\sim}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C,E)^{\circ}$$

a comme image essentielle l'ensemble des foncteurs $g\colon C \longrightarrow E$ *qui sont* exacts à gauche et continus, *ou encore qui sont exacts à gauche et* transforment famille couvrante en famille couvrante.

La dernière assertion résulte de la première grâce à 4.9.2. D'autre part, on déduit de III 1.2 iv) et de IV 1.2 iii) que le foncteur $G \longrightarrow G \circ \varepsilon$ induit une équivalence de la catégorie des foncteurs continus de $C^{\sim}$ dans E, et la catégorie des foncteurs continus de C dans E, un foncteur quasi-inverse étant obtenu par $g \longrightarrow g^{s}$ dans les notations de loc. cit. D'autre part, par définition même, g est un morphisme de sites si et seulement si g^{s} est le foncteur image inverse associé à un morphisme de topos $E \longrightarrow C^{\sim}$, d'où la conclusion grâce à 3.2.1, le "ou encore" provenant de III 1.6.

On retiendra surtout de 4.9.4 que (lorsque dans C les $\varprojlim$ finies sont représentables) "il revient au même" de se donner un morphisme de topos $f : E \longrightarrow C^{\sim}$, ou un foncteur $g : C \longrightarrow E$ qui est exact à gauche et transforme familles couvrantes en familles couvrantes.

4.9.5. Utilisant les développements 4.9.1 et 4.9.3, on voit comme d'habitude que pour un $\underline{U}$-site C variable, via la notion de morphisme de sites et de morphisme de morphismes de sites qu'on vient d'expliciter, le topos $C^{\sim}$ dépend fonctoriellement (ou plus exactement, 2-fonctoriellement) du site C. On notera que grâce à la terminologie introduite, $C^{\sim}$ dépend de façon covariante du site C.

4.9.6. Il est immédiat que (contrairement à ce qui se passe pour la notion de foncteur cocontinu, cf. 4.7.4) tout morphisme de topos $F : E \longrightarrow E'$ peut se réaliser à l'aide d'un morphisme de sites $f : C \rightarrow C'$ (i.e. d'un foncteur continu $f : C' \longrightarrow C$ tel que...) : il suffit de choisir dans E et E' des petites sous-catégories pleines génératrices

C et C' respectivement, munies des topologies induites par celles de E et de E', telles que l'on ait

$$F^*(\text{ob } C') \subset \text{ob } C \quad ,$$

et de prendre pour f le foncteur induit par F^*. C'est ce qui explique que la plupart des morphismes de topos qu'on rencontre en pratique sont effectivement décrits à l'aide de morphismes de sites (plutôt qu'à l'aide de foncteurs cocontinus comme en 4.7).

4.10. Relations entre le petit et le gros topos associés à un espace topologique X

On reprend les notations de 2.5. En particulier, $\underline{V}$ est un univers tel que $\underline{U} \in \underline{V}$. Nous nous écartons de la convention de 2.1, en désignant par Top(X) le topos des $\underline{V}$-faisceaux (et non pas des $\underline{U}$-faisceaux) sur X. Ainsi, nous raisonnerons avec des $\underline{V}$-topos et non des $\underline{U}$-topos. (NB il serait possible de garder les $\underline{U}$-topos, en adoptant la convention appropriée pour la définition TOP(X), de sorte que celui-ci soit un $\underline{U}$-topos, cf. 2.5). Ceci posé, nous allons définir DEUX morphismes de topos

$$(4.10.1) \qquad \begin{cases} f: \ \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{TOP}(X) \\ \\ g: \ \mathrm{TOP}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(X) \quad , \quad gf \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{Top}(X)} \quad , \end{cases}$$

donnant lieu à une suite de trois foncteurs adjoints

$$(4.10.1.1) \qquad g^* = f_! \quad , \quad g_* = f^* \quad , \quad g^! = f_* \quad ,$$

les notations étant celles de 3.1.3. Nous allons définir successivement les deux premiers foncteurs de cette suite, le troisième étant défini alors comme adjoint à droite du deuxième.

4.10.2. Le foncteur

$$g_* = f^* : \mathrm{TOP}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(X)$$

est défini simplement comme le foncteur restriction de $(\mathrm{Esp})_{/X}$ au site Ouv(X) des ouverts de X, qui transforme bien faisceaux en faisceaux, comme il résulte immédiatement de la définition. Désignant par des lettres soulignées des faisceaux sur le gros site de X, on désigne, pour un tel faisceau $\underline{F}$, par $\underline{F}_X$ sa restriction au site Ouv(X), d'où un foncteur

(4.10.2.1) $$\mathrm{Restr} : \underline{F} \longmapsto \underline{F}_X : \mathrm{TOP}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(X) \quad .$$

Il est évident que ce foncteur commute aux $\underline{V}$-limites projectives, puisque celles-ci se calculent argument par argument (on pourrait aussi invoquer l'existence de l'adjoint à gauche, construit dans 4.10.4 ci-dessous.) Je dis qu'il commute également aux $\underline{V}$-limites inductives. Pour s'en convaincre, on va donner une interprétation fort commode des "gros" faisceaux sur X, i.e. des objets de TOP(X), en termes de faisceaux ordinaires (NB il s'agit de $\underline{V}$-faisceaux) sur les espaces topologiques X' au-dessus de X.

4.10.3. Pour un gros faisceaux $\underline{F}$ sur X, etpour tout espace X' sur X (sous-entendu : $X' \in \underline{U}$), on définit de façon évidente, comme dans 4.10.2, le "petit" faisceau $\underline{F}_{X'}$, restriction de $\underline{F}$ à X'. Si

$$u : X'' \longrightarrow X'$$

est un morphisme de $(\mathrm{Esp})_{/X}$, on définit alors de façon évidente un morphisme $u_*(\underline{F}_{X''}) \longrightarrow \underline{F}_{X'}$, ou ce qui revient au même, un "morphisme de transition"

(4.10.3.1) $$\varphi_u : u^*(\underline{F}_{X'}) \longrightarrow \underline{F}_{X''} \quad .$$

Ces morphismes, pour u variable, satisfont à une condition de transitivité évidente pour un composé

$$X''' \xrightarrow{u} X'' \xrightarrow{v} X'$$

de morphismes dans $(\mathrm{Esp})_{/X}$, qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter. On obtient de cette façon un foncteur naturel, qui va de la catégorie TOP(X) des gros faisceaux sur X, dans la catégorie des systèmes

$$(\underline{F}_{X'}) \quad (X' \in \mathrm{ob}\,(\mathrm{Esp})_{/X}) \ , \ (\varphi_u) \qquad (u \in \mathrm{Fl}\,(\mathrm{Esp})_{/X}) \quad ,$$

satisfaisant à la condition de transitivité envisagée, et tels de plus que pour tout morphisme $u : X'' \longrightarrow X'$ qui est une immersion ouverte (ou, plus généralement, un étalement), le morphisme de transition φ_u soit un isomorphisme. Comme les foncteurs $u^* : \mathrm{Top}(X') \longrightarrow \mathrm{Top}(X'')$ utilisés pour la description des φ_u commutent aux $\underline{V}$-limites inductives, il en résulte aussitôt que dans la description précédente des objets de TOP(X) en termes de "petits" faisceaux $F_{X'}$, les $\underline{V}$-limites inductives se calculent argument par argument, i.e. les foncteurs de la forme $\underline{F} \longrightarrow \underline{F}_{X'}$ commutent aux $\underline{V}$-limites inductives.

En particulier, il en est ainsi du foncteur $\underline{F} \longmapsto \underline{F}_X$ envisagé dans 4.10.2. Il admet donc bien un adjoint à droite (1.5). Il reste à en construire un adjoint à gauche (dont l'existence résulte d'ailleurs a priori de 1.8), et de vérifier que ce dernier est exact à gauche.

Cela achèvera la définition des morphismes de topos annoncés (4.10.1) en termes des foncteurs (4.10.1.1).

4.10.4. Le foncteur

$$g^* = f_! : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{TOP}(X)$$

s'obtient en associant à tout petit faisceau F sur X le système de ses images inverses $(F_{X'})$, $X' \in \mathrm{ob}\,(\mathrm{Esp})_{/X}$, par les morphismes structuraux $X' \longrightarrow X$, le morphisme de transition φ_u pour un $u : X'' \longrightarrow X'$ étant l'isomorphisme de transitivité pour les images inverses de faisceaux (4.1.1). On voit aussitôt qu'on obtient aunsi un foncteur

$$\mathrm{Prol} : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{TOP}(X) \qquad ,$$

<u>pleinement fidèle</u>, dont l'image essentielle est formée des gros faisceaux $\underline{F}$ sur X pour lesquels tous les morphismes de transitivité φ_u de 4.11.3 sont des isomorphismes. Nous laissons au lecteur le soin de définir un isomorphisme d'adjonction entre ce foncteur de prolongement canonique et le foncteur restriction de 4.10.2, prouvant que ce dernier est adjoint à droite du premier. C'est immédiat en termes de la description 4.10.3 de la catégorie TOP(X).

<u>Remarques</u> 4.10.5. a) La construction 4.10.4 montre en même temps que $g^* = f_!$ est pleinement fidèle (ou, ce qui revient au même, que $g_* = f^*$ est un foncteur de passage à une catégorie de fractions, ou enfin que $g^! = f_*$ est pleinement fidèle). Les gros faisceaux sur X qui appartiennent à l'image essentielle du foncteur $g^* = f_!$ = Prol méritent le nom de gros <u>faisceaux étales</u> sur X, puisqu'ils forment une catégorie équivalente à celle des faisceaux ordinaires sur X, ou encore à celle des espaces étalés

sur X. On voit d'ailleurs facilement que si X' est un espace topologique au-dessus de X, alors le gros faisceau sur X qu'il représente est étale au sens précédent si et seulement si X'est un espace étalé sur X.

b) On peut encore exprimer la pleine fidélité de f_* en écrivant que le morphisme d'adjonction $f^*f_* \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathrm{Top}(X)}$ est un isomorphisme, i.e. que $g_*f_* \simeq \mathrm{id}$, i.e. que $gf \simeq \mathrm{id}$. Ainsi g fait de TOP(X) un <u>topos sur</u> Top(X), admettant une "section" f sur Top(X).

c) Le fait que le foncteur $g^* = f_!$ soit pleinement fidèle, exact et qu'il commute aux $\underline{V}$-limites inductives justifie partiellement le point de vue fort commode (dû à J. GIRAUD) suivant lequel il est inoffensif, dans pratiquement toutes les questions de théorie des faisceaux sur X, de remplacer les faisceaux habituels ou "petits" faisceaux par les "gros" faisceaux associés. Il en est en particulier ainsi des questions cohomologiques, puisque g_* étant exact, les foncteurs R^ig_* (V) sont nuls pour $i > 0$, donc (V) que pour tout <u>gros</u> faisceau $\underline{F}$ sur X, on a des isomorphismes canoniques

$$H^i(\mathrm{TOP}(X),\underline{F}) \simeq H^i(\mathrm{Top}(X),\underline{F}_X) = H^i(X,F) \quad .$$

Appliquant ceci à un faisceau de la forme Prol(F), où F est un petit faisceau sur X, on en conclut (puisque $\mathrm{Prol}(F)_X \simeq F$ canoniquement) un isomorphisme canonique

$$H^i(X,F) \;=\; H^i(\mathrm{TOP}(X),\ \mathrm{Prol}(F)) \quad .$$

Ainsi, <u>les invariants cohomologiques de</u> X, <u>calculés via le petit ou le gros topos de</u> X, <u>sont essentiellement identiques</u>. Le même résultat est d'ailleurs valable en cohomologie non commutative.

Exercice 4.10.6. Soient S un $\underline{U}$-site dont la topologie est moins fine que la topologie canonique, $\underline{M}$ une partie de $\mathrm{Fl}\, S$ satisfaisant les conditions suivantes :

a) Les morphismes de $\underline{M}$ sont quarrables (I 10.3), et $\underline{M}$ est stable par changement de base.

b) $\underline{M}$ contient les flèches identiques et est stable par composition.

c) Une flèche $u : X \longrightarrow Y$ telle qu'il existe une famille couvrante $Y_i \longrightarrow Y$, avec les $X \times_Y Y_i \longrightarrow Y_i$ dans $\underline{M}$, est elle-même élément de $\underline{M}$.

d) Pour tout $X \in \mathrm{ob}\, S$, toute famille couvrante de X est raffinée par une famille couvrante $(f_i : X_i \longrightarrow X)$, avec les $f_i \in \underline{M}$.

Pour tout $X \in \mathrm{ob}\, S$, considérons le site $S(X)$ ("petit site de X") dont la catégorie sous-jacente est la sous-catégorie pleine de $S_{/X}$ formée des objets dont le morphisme structural est dans $\underline{M}$, munie de la topologie induite (III 3.1) par celle de S.

1°) Pour toute flèche $u : X \longrightarrow Y$ de S, montrer que le changement de base par u de $S(Y)$ dans $S(X)$ est un foncteur continu, d'où un foncteur commutant aux limites inductives (III)

$$S(u)^{*} : S(Y)^{\sim} \longrightarrow S(X)^{\sim} .$$

2°) Définir une équivalence entre le topos $S^{\sim}$ et la catégorie des systèmes

$$(F_X) \quad (X \in \mathrm{ob}\, S) \ , \quad (\varphi_u) \qquad (u \in \mathrm{Fl}\, S)$$

formés d'objets $F_X \in \mathrm{ob}\ S(X)^{\sim}$, et pour toute flèche $u : X \longrightarrow Y$ dans S , d'un morphisme $\varphi_u : S(u)^*(F_Y) \longrightarrow F_X$, ces systèmes étant soumis à une condition de transitivité pour un composé $v \circ u$ de flèches de S , et à la condition que $u \in M$ implique que φ_u soit un isomorphisme.

3°) Définir des foncteurs "restrictions" et "prolongement"

$$\mathrm{Res}_X : (S_{/X})^{\sim} \longrightarrow S(X)^{\sim} \quad , \quad \mathrm{Prol}_X : S(X)^{\sim} \longrightarrow (S_{/X})^{\sim}$$

Montrer que Res_X commute aux petites limites inductives et projectives et que Prol_X est pleinement fidèle, son image essentielle étant formée des faisceaux F tels que φ_u soit un isomorphisme pour toute flèche u de $S_{/X}$.

4°) Définir un morphisme d'adjonction faisant de Res_X l'adjoint à droite de Prol_X . En conclure qu'il existe un morphisme de topos

$$f : S(X)^{\sim} \longrightarrow (S_{/X})^{\sim} \quad .$$

faisant de $S(X)^{\sim}$ un sous-topos de $(S_{/X})^{\sim}$ et tel que

$$f_! = \mathrm{Prol}_X$$

$$f^* = \mathrm{Res}_X \quad .$$

Montrer que Prol_X transforme faisceaux abéliens en faisceaux abéliens.

5°) Montrer que si $S(X)$ admet des produits fibrés, Prol_X est exact. En déduire qu'il existe alors un morphisme de topos $g : (S_{/X})^{\sim} \longrightarrow S(X)^{\sim}$ qui soit une rétraction à gauche de f , i.e. tel que

$$g^{x} = \mathrm{Prol}_X$$
$$g_{x} = \mathrm{Res}_X \quad .$$

(Pour un exemple où $S(X)$ n'admet pas de produits fibrés, prendre pour S la catégorie des schémas munie de la topologie étale, pour M les morphismes lisses, pour X un schéma noethérien de dimension > 0).

6°) Montrer que pour tout faisceau abélien F de $(S_{/X})^{\sim}$ on a un isomorphisme

$$H^q(X,F) \simeq H^q(X,\mathrm{Res}_X F) \qquad \forall\, q \quad .$$

Montrer, en utilisant par exemple les hyperrecouvrements, que pour tout faisceau abélien G de $S(X)^{\sim}$ on a un isomorphisme

$$H^q(X,G) \simeq H^q(X,\mathrm{Prol}_X G) \qquad \forall\, q \quad .$$

7°) Acheter une médaille en chocolat pour le rédacteur.

5. Topos induit

5.1. Soient E un topos, X un objet de E. Alors la catégorie $E_{/X}$ des objets de E au-dessous de X est un topos, comme il résulte par exemple immédiatement du critère de Giraud 1.2 ii) : On peut aussi, grâce à 1.2.1, réaliser E comme une catégorie de faisceaux $C^{\sim}$, où C est une sous-catégorie génératrice de E qu'on peut choisir telle que $X \in \mathrm{ob}\, C$; alors on sait que $E_{/X} = C^{\sim}_{/X}$ est équivalente à $(C_{/X})^{\sim}$ (III 5.4), donc c'est un topos.

On appelle le topos $E_{/X}$ le <u>topos induit</u> sur l'objet X de E.

5.2. On va définir un morphisme de topos canonique

(5.2.1) $$j_X : E_{/X} \longrightarrow E \quad ,$$

qui est appelé <u>morphisme d'inclusion</u> du topos induit $E_{/X}$ dans le topos ambiant E, ou mieux (cf. 5.7), <u>morphisme de localisation de</u> E <u>en</u> X. Ce morphisme correspond à une suite de trois foncteurs adjoints (cf. 3.1.3)

(5.2.2) $$j_{X\,!} \quad , \quad j_X^* \quad , \quad j_{X*} \quad ,$$

qui peuvent s'expliciter de la façon suivante :

a) Le foncteur

$$j_{X\,!} : E_{/X} \longrightarrow E$$

est le foncteur "<u>oubli de la flèche structurale</u>" de $E_{/X}$ dans E.

b) Le foncteur

$$j_X^* : E \longrightarrow E_{/X}$$

est défini par

$$j_X^*(Z) = (X \times Z,\ pr_1) \quad ,$$

où $pr_1 : X \times Z \longrightarrow X$ est la première projection. On peut aussi l'interpréter comme le <u>foncteur changement de base</u> relativement au morphisme

$$X \longrightarrow e_E \quad ,$$

où e_E est l'objet final de E. Il est trivial, par définition du foncteur changement de base, que j_X^* est bien adjoint à droite de $j_{X\,!}$. Il commute en particulier aux limites projectives. Il commute également aux limites inductives, en vertu des propriétés d'exactitude spéciales des topos (II 4).

c) De ce dernier fait résulte (1.6) que j_X^* admet un adjoint à gauche

$$j_{X*} : E_{/X} \longrightarrow E \quad .$$

Pour un objet X' au-dessus de X, l'objet $j_{X*}(X')$ est aussi parfois noté par l'un des symboles $\prod_{X/e_E}(X'/X)$, ou $\underline{\mathrm{Hom}}_{X/e_E}(X,X')$, ou $\mathrm{Res}_{X/e_E}(X'/X)$ ("restriction de Weil"), dont l'un ou l'autre est sans doute déjà familier au savant lecteur de notre modeste ouvrage.

5.3. On fera attention que le foncteur $j_{X\,!}$ commute aux produits fibrés, et transforme monomorphismes en monomorphismes, mais il n'est pas en général exact à gauche pour autant. Il ne l'est que si X est un objet final de $\underline{E}$ (puisque $X = j_{X\,!}(X, id_X)$, et (X, id_X) est un objet final de $E_{/X}$), c'est-à-dire si et seulement si j_X est en fait une équivalence de topos (donc si tous les foncteurs (5.2.2) sont des équivalences).(*)

De même, le foncteur j_{X*} n'est pas en général exact à droite, et ne transforme pas nécessairement épimorphismes en épimorphismes.

On conclut de ces observations que la direction du morphisme de topos reliant $E_{/X}$ à E, pour un objet X du topos E, est déterminée sans ambiguité possible.

5.4. Le foncteur j_X^* est souvent appelé <u>foncteur de localisation</u> ou <u>foncteur restriction</u>. Cette dernière terminologie se justifie en identifiant les objets de E resp. sur $E_{/X}$ aux faisceaux sur E resp. sur $E_{/X}$ (1.2 iii)), et en notant qu'avec cette identification, la formule d'adjonction entre $j_{X\,!}$ (foncteur oubli) et j_X^* s'interprète en disant que $j_X^*(F)$

(*) Pour une propriété de commutation de $j_{X!}$ au changement de topos, cf. XVII 5.1.2.

est le faisceau restriction à $E_{/X}$ du faisceau F sur E (en prenant "restriction" au sens généralisé : composé avec le foncteur "d'inclusion" $j_{X!} : E_{/X} \longrightarrow E$. Conformément à des notations familières en d'autres contextes, on écrira aussi souvent, indifféremment :

(5.4.1) $$j_X^*(F) = F|X = F_X = \text{restriction de } F \text{ à } X \quad .$$

De même, lorsque E est de la forme $C^\sim$, où C est un (petit) site, et que X est de la forme $\varepsilon(S)$ avec $S \in \mathrm{ob}\, C$, de sorte qu'on a une équivalence de catégories rappelée dans 5.1

$$E_{/X} = C^\sim{}_{/\varepsilon(S)} \xrightarrow{\approx} (C_{/S})^\sim$$

($C_{/S}$ étant munie de la topologie induite par celle de C), le foncteur j_X^* s'identifie simplement au foncteur "restriction" d'un faisceau variable F sur C à la catégorie $C_{/S}$.

Ces réflexions permettent de prévoir d'ailleurs le rôle important que joueront les topos induits et les morphismes de localisation (5.2.1) dans toutes les questions où on est amené à raisonner par "localisation sur E" (cf. 8), c'est-à-dire pratiquement dans toutes les questions faisant intervenir des sites ou des topos.

5.5. Soit

$$f: X \longrightarrow Y$$

une flèche de E, qui permet donc d'interpréter X (ou plus correctement, (X,f)) comme un objet de $E_{/Y}$. Il est évident qu'on a un isomorphisme canonique

(5.5.1) $$(E_{/Y})_{/X} \xrightarrow{\sim} E_{/X}$$

(transitivité des topos induits). Appliquant la construction de 5.1 à $E_{/Y}$ au lieu de E, on trouve donc un morphisme de topos canonique

(5.5.2) $\mathrm{loc}(f)$ ou $f : E_{/X} \longrightarrow E_{/Y}$,

appelé également <u>morphisme de localisation</u> (<u>associé à</u> f). Lorsque Y est l'objet final de E, on retrouve essentiellement (5.2.1). Le morphisme de localisation pour f est associé à une suite de trois foncteurs adjoints

(5.5.3) $f_!$, f^* , f_* ,

qui peuvent s'interpréter respectivement comme foncteur d'oubli, comme foncteur restriction, et comme un foncteur noté au choix (X' étant l'argument) $\prod_{X/Y}(X'/X)$, $\underline{\mathrm{Hom}}_{X/Y}(X,X')$ ou $\mathrm{Res}_{X/Y}(X'/X)$.

5.6. La transitivité des foncteurs oubli implique que pour deux morphismes composables

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

de E, on a un isomorphisme canonique de morphismes de topos

$$\mathrm{loc}(gf) \simeq \mathrm{loc}(g)\mathrm{loc}(f) : E_{/X} \longrightarrow E_{/Y} \longrightarrow E_{/Z} \quad .$$

De plus, pour trois morphismes composables, on a la relation de compatibilité habituelle pour les isomorphismes de transitivité précédents. Ceci permet donc de considérer, moyennant l'abus de langage habituel, que

$$X \longmapsto E_{/X}$$

est un foncteur covariant de E dans la catégorie ($\underline{V}$-$\underline{U}$-top) (3.3.1). Plus précisément, on trouve un 2-foncteur (non strict en général) de E dans la 2-catégorie ($\underline{V}$-$\underline{U}$-top).

Avant de continuer les généralités sur les topos induits (5.10), donnons quelques exemples instructifs.

5.7. Soit X un espace topologique, d'où un topos $Top(X)$ (2.1). Soit X' un objet de $Top(X)$, qu'il sera commode d'interpréter comme un espace étalé sur X, $p: X' \longrightarrow X$. La catégorie $Top(X)_{/X'}$ s'identifie alors à la catégorie des espaces étalés X'' sur X, munis d'un X-morphisme $X'' \longrightarrow X'$. On sait qu'un tel morphisme fait de X'' un espace étalé sur X', et on trouve de cette façon une équivalence de topos canonique

$$Top(X)_{/X'} \xrightarrow{\approx} Top(X') \quad .$$

Le morphisme de localisation s'identifie donc à un morphisme de topos $Top(X') \longrightarrow Top(X)$, et on constate aussitôt que ce dernier n'est autre que le morphisme

$$Top(p) : Top(X') \longrightarrow Top(X)$$

associé à l'application continue structurale $p : X' \longrightarrow X$. Intuitivement, le morphisme de localisation n'est donc autre que la traduction, en langage de topos, du morphisme d'étalement $p : X' \longrightarrow X$. Ceci explique à la fois le bien-fondé de la terminologie "morphisme de localisation", et incite à la prudence dans l'emploi du terme de "morphisme d'inclusion", celui-ci semblant surtout approprié dans le cas où p est une immersion ouverte. Il sera prudent par conséquent de réserver dans 5.1 le terme de "morphisme d'inclusion" au cas où le morphisme $X \longrightarrow e_E$ est un monomorphisme, i.e. où X s'identifie à un sous-objet de l'objet final de E.

5.8. Soient E un topos, G un Groupe de E, H un sous-groupe de G,

$$X = G/H$$

l'espace homogène quotient, qu'on regarde comme un objet de E avec groupe d'opérateurs gauche G, i.e. comme un objet du topos classifiant B_G (2.4).

Nous allons déterminer le topos induit

$$(B_G)_{/X} \quad (X = G/H) \quad ,$$

en définissant une équivalence de topos

(5.8.1) $$c : B_H \xrightarrow{\approx} (B_G)_{/X} \quad ,$$

telle que l'on ait commutativité à isomorphisme canonique près dans le diagramme

(5.8.2) $$\begin{tikzcd} B_H \arrow[r, "c"] \arrow[rr, bend right, "B_i"'] & (B_G)_{/X} \arrow[r, "j_X"] & B_G \end{tikzcd} \quad ,$$

où j_X est le morphisme de localisation dans B_G, et où

$$B_i : B_H \longrightarrow B_G$$

est le morphisme déduit de l'inclusion $i : H \longrightarrow G$ (4.5).

Pour définir (5.8.1), nous allons simplement indiquer la description des foncteurs image inverse c^* et image directe c_*, laissant au lecteur le soin de vérifier que ce sont bien là des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre, donnant lieu au diagramme commutatif (5.8.2) de morphismes de topos. Soit e le sous-objet de E sous-jacent à X, image de la section de X (sur un objet final e_E choisi de E) déduite de la section unité de G. Si X' est un objet de B_G au-dessus de G, alors on désigne par $c^*(X')$ l'image inverse de e dans X',

$$c^*(X') = X' \times_X e \quad ,$$

qui est stable par l'opération gauche de H sur X', restriction de l'opération donnée de G sur X'. Cela définit bien un foncteur

$$c^* : (B_G)_{/X} \longrightarrow B_H \quad .$$

D'autre part, si X' est un objet de B_H, alors le morphisme de X' dans l'objet final e_H de B_H (i.e. l'objet final e_E de E avec opération triviale de H) donne, par application du foncteur $i_!$ (4.5) un morphisme de B_G

$$i_!(X') \longrightarrow i_!(e_H) \simeq X \quad ,$$

qui permet d'interpréter $i_!(X')$ comme un objet de $(B_G)_{/X}$, d'où le foncteur cherché

$$c_* : X' \mapsto (i_!(X') \to X) : B_H \to B_G \quad .$$

5.8.3. On voit donc, grâce à (5.8.2) que si G est un Groupe d'un topos, H un sous-Groupe, <u>le foncteur "restriction des opérateurs de G à H " peut s'interpréter comme un foncteur de localisation</u>. En particulier, prenant pour H le sous-groupe unité, on voit que le foncteur "<u>oubli des opérations de</u> G " s'interprète comme un foncteur de localisation. On en conclut, plus généralement, que si (X,G) est un objet de E avec opération de G (i.e. un objet du topos classifiant B_G), alors le foncteur "oubli des opérations de G",

$$E' = (B_G)_{/(X,G)} \longrightarrow E_{/X}$$

peut s'interpréter comme un foncteur de localisation, relativement à un objet $E_{G,(X,G)}$ de E' convenable couvrant l'objet final. Il suffit de prendre $E_{G,(X,G)} = E_G \times (X,G)$, d'où le diagramme cartésien (où $E_G = G_s = G$ avec opération de G par translation à gauche)

$$(5.8.3.1)\qquad \begin{tikzcd} E_G \arrow[d] & E_{G,(X,G)} = Z \arrow[l] \arrow[d] \\ e_G & (X,G) \arrow[l] \end{tikzcd} ,$$

et de noter que par transitivité des topos induits, le topos induit $E' = ((B_G)_{X/G})_{/Z}$ est équivalent au topos $((B_G)_{/E_G})_{/Z}$; comme $(B_G)_{/E_G}$ est équivalent à E par le foncteur c* de (5.8.1) (avec H = e), il suffit de vérifier que cette équivalence transforme Z en l'objet X de E (ce qui est trivial) pour déduire l'équivalence cherchée de catégories

$$E'_{/Z} \xrightarrow{\approx} E_{/X} \quad .$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que le composé de celle-ci avec le foncteur de localisation

$$E' = (B_G)_{/(X,G)} \longrightarrow E'_{/Z}$$

est le foncteur "oubli des opérations de G ". On voit ainsi que le diagramme cartésien ci-dessus donne, par passage aux topos induits, un diagramme, commutatif à isomorphisme canonique près (5.6), de morphismes de topos :

$$(5.8.3.2)\qquad \begin{tikzcd} (B_G)_{/E_G} \approx E \arrow[d, "j"'] & (B_G)_{/Z} \approx E'_{/Z} \approx E_{/X} \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "j'"] \\ B_G & (B_G)_{/(X,G)} = E' \arrow[l, "f"'] \end{tikzcd} ,$$

où les foncteurs images inverses associés aux flèches verticales j, j' sont les foncteurs "oubli des opérations de G ", et où le foncteur image inverse i* s'identifie au foncteur de localisation $E \longrightarrow E_{/X}$. Ce diagramme est d'ailleurs "2-cartésien" au sens 5.11 ci-dessous.

5.8.4. On laisse au lecteur le soin d'étendre les réflexions qui précèdent au cas d'un pro-groupe $\underline{G} = (G_i)$, dans le cas particulier où H est défini comme "noyau" de $\underline{G} \longrightarrow G_{i_o}$. (Dans le cas des groupes pro-finis, cela signifie qu'on se limite aux sous-groupes H de G <u>ouverts</u>, i.e. fermés et d'<u>indice fini</u>.)

<u>Exercice</u> 5.9. Soient E un topos, G un Groupe de E, B_G le topos classifiant de G (2.4),

$$\pi : B_G \longrightarrow E$$

le morphisme de topos déduit de l'homomorphisme de G dans le Groupe unité e de E (compte tenu que $B_e \approx E$).

a) Soit

$$E_G = G_s$$

l'objet de B_G dont le E-objet sous-jacent est G, les opérations de G étant définies par translation à gauche. Considérons $\pi^*(G)$ comme un Groupe de B_G (c'est le Groupe G de E avec les opérations triviales de G dessus). Montrer que le morphisme de E

$$G_s \times G \longrightarrow G_s$$

défini par les translations droites de G sur G_s, est compatible avec les opérations de G sur G_s et sur $G = \pi^*(G)$, et définit un morphisme de B_G

$$E_G \times \pi^*(G) \longrightarrow E_G \quad .$$

Montrer que ce morphisme fait de E_G un objet de B_G avec une opération à droite du B_G-Groupe $\pi^*(G)$, et que cette dernière fait de E_G un <u>torseur</u>

sous $\pi^*(G)$ (i.e. l'objet final de B_G peut se recouvrir par des objets X_i tels que pour tout i, la restriction de E_G à X_i soit isomorphe au fibré à opérateurs trivial $(\pi^*(G)_{X_i})_d$).

b) Soit

$$q : E' \longrightarrow E$$

un topos sur E. Pour tout topos B sur E, définir la catégorie $\underline{\mathrm{Homtop}}_E(E',B)$ des morphismes de topos de E' dans B compatibles avec les morphismes structuraux $E' \to E$ et $B \to E$ à isomorphisme donné près. Prenant $B = B_G$, définir par la formule $f \longmapsto f^*(E_G)$ une équivalence de catégories

$$\underline{\mathrm{Homtop}}_E(E',B_G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Tors}}(E,q^*(G)) \quad ,$$

où le deuxième membre désigne la catégorie des $q^*(G)$-torseurs (à droite) sur E.

c) Soit H un sous-Groupe de G, de sorte que $\pi^*(H)$ est un sous-Groupe de $p^*(G)$, et opère donc sur E_G par restriction du Groupe d'opérateurs, d'où un objet quotient

$$X = E_G/\pi^*(H) \quad ,$$

qui n'est autre que l'objet G/H muni de l'opération à gauche habituelle de G. Soit e_G l'objet final de B_G (i.e. l'objet final e_E de E avec opération triviale - il n'y a pas le choix - de G), et considérons dans B_G le diagramme de morphismes

$$\begin{tikzcd} E_G \arrow[dr] \arrow[dd, dashed] & \\ & X = E_G/\pi^*(H) \arrow[dl] \\ e_G & \end{tikzcd}$$

d'où, en passant aux topos induits par B_G sur ces objets, un diagramme de morphismes de topos, commutatif à isomorphisme canonique près (5.6). Montrer que ce diagramme est équivalent au diagramme

$$\begin{tikzcd} E = B_e \arrow[d] \arrow[dr] & \\ & B_H \arrow[dl] \\ B_G & \end{tikzcd} ,$$

dont les trois flèches sont les flèches associées par 4.5 aux morphismes de Groupes $e \to H \to G$ de E. (Ainsi, *le topos classifiant* B_H *s'interprète intuitivement comme un espace homogène au-dessus de* B_G, *de groupe* $\pi^*(G)$, *associé au torseur* (= fibré principal homogène) *universel* E_G *sur* B_G).

d) Reprendre l'exemple 5.7 dans le cas où X' est un *revêtement* étale (localement trivial, cf. 2.7.4) de X, en l'interprétant en termes des considérations du présent exercice.

5.10. *Images inverses de topos induits*

Soient

$$f : E' \longrightarrow E$$

un morphisme de $\underline{U}$-topos, X un objet de E, et $X' = f^*(X)$ son image inverse dans E. On va alors définir un diagramme de morphismes de topos

(5.10.1)
$$\begin{tikzcd} E_{/X} \arrow[d, "j_X"'] & E'_{/X'} \arrow[l, "f_{/X}"'] \arrow[d, "j_{X'}"] \\ E & E' \arrow[l, "f"] \end{tikzcd} ,$$

où j_X et $j_{X'}$ sont les morphismes de localisation (5.1), et où $f_{/X}$ est défini ci-dessous, diagramme qui sera commutatif à isomorphisme canonique près. Nous définirons ici $f_{/X}$ à l'aide du foncteur image inverse

(5.10.2) $$(f_{/X})^* : E_{/X} \longrightarrow E'_{/X'} \quad ,$$

pour lequel nous prendrons simplement le foncteur "induit" par f^*, en un sens évident. Comme les foncteurs d'inclusion $j_{X!} : E_{/X} \to E$ et $j_{X'!} : E_{/X} \to E$ commutent aux $\underline{U}$-limites inductives et aux produits fibrés, et qu'ils sont conservatifs, il s'ensuit aussitôt que le foncteur $(f_{/X})^*$ commute aux $\underline{U}$-limites inductives et aux produits fibrés tout comme le foncteur f^* qui l'induit ; comme de plus $(f_{/X})^*$ transforme évidemment objet final X en l'objet final X', il est exact à gauche, donc est associé à un morphisme de topos

(5.10.3) $$f_{/X} : E'_{/X'} \longrightarrow E_{/X} \quad ,$$

défini à isomorphisme unique près (3.1.1). D'autre part, le diagramme déduit de (5.10.1) par passage aux foncteurs images inverses est commutatif (à isomorphisme canonique près) par construction et grâce au fait que f^* commute aux produits $X \times Y$, donc (5.10.1) lui-même est commutatif, à un unique isomorphisme près induisant l'isomorphisme canonique sur les foncteurs images réciproques des deux composés $f \circ j_{X'}$ et $j_X \circ f_{/X}$ (3.2.1).

5.10.4. Lorsque $f : E' \longrightarrow E$ est associé à une application continue $Y' \longrightarrow Y$ d'espaces topologiques (4.1), de sorte que X s'identifie à un espace étalé au-dessus de Y, et X' au produit fibré $X \times_Y Y'$, alors, identifiant les topos induits $\mathrm{Top}(Y)_{/X}$ et $\mathrm{Top}(Y')_{/X'}$ à Top(X) et Top(X') respectivement (5.7), on constate que le morphisme $f_{/X}$ qu'on vient de construire est (à isomorphisme unique près) le morphisme $\mathrm{Top}(X') \to \mathrm{Top}(Y')$ déduit de l'application continue canonique $X' \longrightarrow Y'$. On peut donc dire, à la lumière de cet exemple, que le topos $E'_{/X'}$ joue le rôle d'un produit fibré de $E_{/X}$ et de E' sur E. Cette intuition se précise à l'aide du résultat suivant :

Proposition 5.11. *Les notations étant celles de* 5.10, *le diagramme* (5.10.1), *muni de l'isomorphisme de compatibilité* $\alpha : f\circ j_{X'} \longrightarrow j_X\circ f_{/X}$, *est* "2-*cartésien*" ; *de façon précise, pour tout* U-*topos* F, *si on associe à tout morphisme de topos* $g : F \longrightarrow E'_{/X'}$ *le triplet* $(f_{/X}\circ g,\ j_{X'}\circ g,\ \alpha * g) = (g_1,g_2,\beta)$, *où* $g_1 : F \to E_{/X}$ *et* $g_2 : F \to E'$ *sont des morphismes de topos, et* $\beta : j_X\circ g_1 \to f\circ g_2$ *est un isomorphisme de morphismes de topos de* F *dans* E, *on trouve une équivalence de catégories de* $\mathrm{Homtop}(F,E'_{/X'})$ *avec la catégorie* $\mathrm{Homtop}(F,E_{/X}) \overset{2}{\times}_{\mathrm{Homtop}(F,E)} \mathrm{Homtop}(F,E')$ *de tous les triples* (g_1,g_2,β) *comme ci-dessus*.

(NB. On a mis un 2 au-dessus du signe du produit cartésien pour rappeler qu'il ne s'agit pas d'un produit fibré ordinaire de catégories, mais d'un "2-produit fibré", dans le sens explicité dans l'énoncé.)

Pour prouver 5.11, on explicite les morphismes de topos à l'aide des foncteurs image inverse associés. Nous aurons besoin pour cela de résultats auxiliaires, donnés dans 5.11.1 à 5.12 plus bas.

5.11.1. Considérons de façon générale la situation où on se donne deux catégories E, E', un objet X de E qu'on suppose quarrable i.e. tel que le foncteur

$$j : A \longmapsto A\times X : E \longrightarrow E_{/X}$$

soit défini, enfin un foncteur exact à gauche

(*) $$\varphi : E_{/X} \longrightarrow E' \quad .$$

Comme $E_{/X}$ a un objet final, savoir $(X, id_X) = X$, il en est donc de même de E', qui admet l'objet final

$$e' \simeq \varphi(X) \quad .$$

Supposant choisi l'objet final e' de E', on va à tout φ comme ci-dessus associer un couple

(**) $$(\psi \ , \ u) \ , \text{ avec } \psi = \varphi \circ j : E \longrightarrow E', \text{ et } u \in \mathrm{Hom}(e', \psi(X)) \quad .$$

Pour définir u, on note que

$$\psi(X) = X \times X$$

a une section canonique δ_X sur l'objet final X de $E_{/X}$, savoir la section diagonale, et on définit

$$u = \varphi(\delta_X) : \varphi(X) = e' \longrightarrow \varphi(X \times X) = \psi(X) \quad .$$

Je dis que la connaissance du couple (**) permet de réconstituer le foncteur φ de (*) à isomorphisme unique près. Pour ceci, pour tout objet

$$p : X' \longrightarrow X$$

de $E_{/X}$, considérons le diagramme cartésien suivant de $E_{/X}$:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & j(X') = X' \times X \arrow[d, "j(p)"] \\ X \arrow[r, "\delta_X"] & j(X) = X \times X \end{tikzcd} \quad ,$$

où la première flèche horizontale est le morphisme graphe $\Gamma_p = (id_X, p)$. Appliquant le foncteur exact à gauche φ à ce diagramme, et utilisant la définition de ψ comme $\varphi \circ j$, on trouve un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \varphi(X',p) & \longrightarrow & \psi(X') \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi(p)} \\ e' & \longrightarrow & \psi(X) \end{array} \quad ,$$

en d'autres termes on trouve un isomorphisme canonique

(5.11.1.1) $\varphi(X',p) \simeq \psi(X') \times_{\psi(X)} e'$.

On constate aussitôt qu'il est fonctoriel en l'objet (X',p) de $E_{/X}$, ce qui explicite comment on réconstitue à isomorphisme près le foncteur $\varphi : E_{/X} \longrightarrow E'$ à l'aide du couple (ψ,u) de (**). Notons d'ailleurs que le foncteur ψ est exact à gauche ; plus généralement, ψ commute à tout type de limites projectives auquel commute φ, car j commute aux limites projectives.

Inversement, supposant maintenant que dans E et E' les limites projectives finies sont représentables, et partant d'un couple

$$(\psi,u) \ , \ \psi : E \longrightarrow E' \ , \ u \in \mathrm{Hom}(e',\psi(X)) \quad ,$$

où le foncteur ψ est exact à gauche, on définit par la formule (5.11.1.1) un foncteur $\varphi : E_{/X} \longrightarrow E'$. On vérifie aussitôt que ce foncteur est exact à gauche, plus généralement, qu'il commute à tout type de limites projectives représentables dans E auquel commute ψ . Cela résulte aussitôt du diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_I^{E} X'_i & \longleftarrow & \varprojlim_I^{E/X} X'_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varprojlim_I^{E} X & \xleftarrow{\ \delta\ } & X \end{array}$$

reliant les limites projectives calculées dans E ou dans $E_{/X}$ (où δ désigne le morphisme diagonal dans la limite projective du foncteur constant de valeur X), en lui appliquant le foncteur ψ, d'où un diagramme cartésien dans E', et en composant ce dernier avec le carré cartésien déduit de $\psi(X) \longleftarrow e'$, faisant apparaître un carré cartésien composé qui exprime la compatibilité de φ à la limite projective envisagée.

On réconstitue à isomorphisme près le couple (ψ, u) à l'aide de φ, en notant que l'on a un isomorphisme canonique

$$(5.11.1.2) \qquad \psi'(X') = \varphi(j(X')) \quad ,$$

déduit de (5.11.1.1) en y remplaçant (X',p) par $j(X') = (X'\times X, pr_2)$, et notant que $\psi(X'\times X) \simeq \psi'(X')\times\psi'(X)$. L'isomorphisme précédent est manisfestement fonctoriel en X', i.e. il donne un isomorphisme

$$\psi \simeq \varphi\circ j \quad ,$$

et on vérifie de même que moyennant cet isomorphisme, $u : e' \longrightarrow \psi(X)$ s'identifie à $\varphi(\delta_X)$. On a ainsi obtenu l'essentiel du

Lemme 5.11.2. *Soient E et E' deux catégories où les limmites projectives finies sont représentables, X un objet de E, Sex(E,E') la catégorie des foncteurs exacts à gauche ψ de E dans E', et $Sex(E_{/X},E')$ la catégorie analogue des foncteurs exacts à gauche φ de $E_{/X}$ dans E'. On a alors une équivalence entre la catégorie $Sex(E_{/X},E')$ et la catégorie $Sex(E,E')_{/\Gamma}$ des couples (ψ,u), avec $\psi \in$ ob Sex(E,E') et $u : e' \to \psi(X)$ (où e' est l'objet final de E'), dont la définition est explicitée dans 5.11.1, ainsi que celle d'un foncteur quasi-inverse. Si φ et (ψ,u) se correspondent. alors φ commute à un type déterminé de limites projectives* si et seulement si il en est ainsi de ψ. Si dans E et E' les foncteurs changement de base commutent à un type déterminé de limites inductives, alors pour que φ commute aux limites inductives dudit type, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de ψ .

Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter la structure de catégorie $\underline{\mathrm{Sex}}(E,E')_{/\Gamma}$ correspondant aux couples (ψ,u). Définissant le foncteur $\Gamma : \underline{\mathrm{Sex}}(E,E') \longrightarrow (\mathrm{Ens})$ par $\Gamma(\psi) = \mathrm{Hom}(e',\psi(X))$, on peut interpréter u dans le couple (ψ,u) comme un élément de $\Gamma(\psi)$ i.e. un homomorphisme $\psi \longrightarrow \Gamma$ dans la catégorie des préfaisceaux sur $\underline{\mathrm{Sex}}(E,E')^{\circ}$, ce qui justifie la notation $_{/\Gamma}$ utilisée dans l'énoncé de 5.11.1. Il reste, pour prouver 5.11.2, à expliciter dans 5.11.1 le caractère fonctoriel des constructions envisagées pour φ resp. (ψ,u) variable, ce qui est essentiellement trivial et laissé au lecteur, et enfin à vérifier l'assertion concernant les propriétés de commutation aux limites inductives, ce qui est également trivial à l'aide des formules explicites (5.11.1.1) et (5.11.1.2) reliant ces foncteurs.

On trouve en particulier, lorsque E et E' sont des $\underline{U}$-topos, et en interprétant les morphismes de topos à l'aide des foncteurs images inverses associés :

Proposition 5.12. Soient E et E' deux $\underline{U}$-topos, X un objet de E, et considérons sur $\underline{\mathrm{Homtop}}(E',E)$ le foncteur contravariant

$$\gamma : f \longmapsto \Gamma(E',f^*(X)) = \mathrm{Hom}(e',f^*(X)) : \quad \underline{\mathrm{Homtop}}(E',E)^{\circ} \to (\mathrm{Ens}) .$$

On a alors une équivalence de catégories

$$(5.12.1) \qquad \underline{\mathrm{Homtop}}(E',E_{/X}) \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Homtop}}(E',E)_{/\gamma} \quad ,$$

où le deuxième membre est la sous-catégorie pleine de Homtop$(E',E)^\wedge{}_{/\gamma}$ *formée des couples* (f, u), *avec* $f \in$ Homtop(E',E) *et* $u \in \gamma(f)$ *i.e.* $u \in \Gamma(E',f^*(X))$. *Ce foncteur s'obtient en associant à tout morphisme de topos* $h : E' \longrightarrow E_{/X}$ *le couple* (f,u) *formé du composé*

$$f = j_X \circ h \ : \ E' \longrightarrow E_{/X} \longrightarrow E \qquad ,$$

et du morphisme

$$u \ : \ e' = h^*(X, id_X) \longrightarrow f^*(X) = h^*(j_X^*(X)) = h^*(X \times X)$$

déduit du morphisme diagonal $\delta_X : X \longrightarrow X \times X$ *en lui appliquant* h^*.

5.12.2. Utilisant 5.12, la démonstration de 5.11 devient à peu près évidente, et se réduit essentiellement à ceci (qui tiendra lieu d'une démonstration "en forme" qui ne serait pasplus instructive) : se donner un morphisme de topos $g : F \longrightarrow E'_{/X'}$, "revient au même" que de se donner un morphisme de topos $g_2 : F \longrightarrow E'$ et une section u de $g_2^*(X')$; or $g_2^*(X') = g_2^*(f^*(X)) = (fg_2)^*(X)$, donc la donnée de u équivaut aussi à la donnée d'un relèvement du morphisme de topos $fg_2 : F \longrightarrow E$ en un morphisme de topos $g_1 : F \longrightarrow E_{/X}$. Cela exprime bien que la donnée d'un morphisme de topos $g : F \longrightarrow E'_{/X'}$, équivaut essentiellement à la donnée d'un triple (g_1, g_2, α) comme dans 5.11.

Remarque 5.13. Nous verrons (§ 15) que pour tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_1 & & \\ \downarrow & & \\ E & \longleftarrow & E_2 \end{array}$$

de topos, il existe un 2-produit fibré au sens de la 2-catégorie ($\underline{V}$-$\underline{U}$-Top) des $\underline{U}$-topos $\in \underline{V}$ (ne dépendant pas, à équivalence près, du choix d'un univers $\underline{V}$ tel que $\underline{U} \in \underline{V}$). Pour d'autres exemples naturels que 5.11 de "produits fibrés de topos", voir le dernier chapitre du livre de GIRAUD [3].

Exercice 5.14. a) Soient F, G deux topos au-dessus d'un topos E. Définir la catégorie $\underline{\mathrm{Homtop}}_E(F,G)$ des couples (f,α), où $f:F \longrightarrow G$ est un morphisme de topos et $\alpha : p \longrightarrow q\circ f$ est un isomorphisme de morphismes de topos de E dans G ($p:F \longrightarrow E$ et $q:G \longrightarrow E$ étant les morphismes de topos structuraux). Définir des foncteurs d'accouplement $\underline{\mathrm{Homtop}}_E(F,G)\times\underline{\mathrm{Homtop}}_E(G,H) \longrightarrow \underline{\mathrm{Homtop}}_E(F,H)$, et des isomorphismes d'associativité.

b) Soient X et Y deux objets d'un topos E. Définir un foncteur naturel de la catégorie discrète définie par l'ensemble Hom(X,Y), dans la catégorie $\underline{\mathrm{Homtop}}_E(E_{/X},E_{/Y})$. Compatibilité avec les compositions de morphismes dans E et les accouplements envisagés dans a).

c) Prouver que le foncteur envisagé dans b) est une équivalence de catégories. En particulier, un objet X d'un topos E se réconstitue à isomorphisme unique près, quand on connait "à E-équivalence près" le topos induit $E_{/X}$ comme topos au-dessus de E.

6. Points d'un topos et foncteurs fibres

6.0. Soit P le $\underline{U}$-topos ponctuel type (2.2)

$$P = (\underline{U}\text{-Ens}) \quad .$$

Etant donné l'intuition assez différente qui s'attache d'une part au

(*) Résultat dû à P. DELIGNE. Le cas où E est le topos ponctuel avait été traité auparavant par Mme HAKIM.

symbole P, figurant un objet géométrique dans la nature d'un point, et d'autre part à ($\underline{U}$-Ens), figurant une "grosse catégorie", qu'on interprétera comme "la catégorie des faisceaux sur P", il y a lieu suivant le contexte d'utiliser l'un ou l'autre symbole exclusivement, bien que du strict point de vue logique ils désignent un seul et même objet.

Définition 6.1. Soit E un U-topos. On appelle point de E tout morphisme de topos $P \longrightarrow E$ du topos ponctuel P(6.0) dans E. On appelle catégorie des points de E, et on note Point(E) ou Pt(E), la catégorie Homtop(P,E) (3.2). Si $p: P \longrightarrow E$ est un point de E, associé au foncteur image inverse $p^* : E \longrightarrow (\underline{U}\text{-Ens})$, et si F est un objet de E, l'ensemble $p^*(F)$ est appelé fibre de E en p, et noté F_p .

6.1.1. Bien entendu, lorsque F est un objet groupe (resp. anneau, resp. ...) de E, sa fibre F_p en p est un groupe (resp. un anneau, resp. ...) (3.1.2).

6.1.2. En vertu de 3.2.1, la catégorie des points de E est équivalente, via le foncteur $p \longmapsto p^*$, à la catégorie opposée à celle des foncteurs

$$\varphi : E \longrightarrow (\underline{U}\text{-Ens})$$

qui commutent aux $\underline{U}$-limites inductives et qui sont exacts à gauche. Il revient donc essentiellement au même de se donner un point de E, ou un tel foncteur φ.

Définition 6.2. On appelle foncteur-fibre du U-topos E tout foncteur $\varphi : E \longrightarrow (\underline{U}\text{-Ens})$ qui commute aux U-limites inductives et qui est exact à gauche. On appelle catégorie des foncteurs fibres sur E, et on note

$\underline{\text{Fib}}(E)$, la sous-catégorie pleine de $\underline{\text{Hom}}(E,(\underline{U}\text{-Ens}))$ formée des foncteurs fibres sur E.

6.2.1. En vertu de 6.1.2, la catégorie $\underline{\text{Fib}}(E)$ des foncteurs fibres sur E est donc équivalente à l'opposée de la catégorie $\underline{\text{Point}}(E)$ des points de E, via le foncteur $p \longmapsto p^*$ de cette dernière dans la première :

$$(6.2.1.1) \qquad \underline{\text{Point}}(E) \xrightarrow{\approx} \underline{\text{Fib}}(E)^{\circ} \quad .$$

Pour qu'un foncteur

$$\varphi : E \longrightarrow (\underline{U}\text{-Ens})$$

soit un foncteur fibre, il faut et il suffit qu'il soit le foncteur fibre $F \longmapsto F_p$ associé à un point p de E (6.1). En d'autres termes, le foncteur (6.2.1.1) est surjectif. Signalons aussi qu'un foncteur φ est un foncteur fibre si et seulement si il est exact à gauche et s'il transforme familles couvrantes en familles surjectives (1.7). Cette dernière condition s'exprime aussi en disant que φ commute aux $\underline{U}$-sommes et transforme épimorphismes en épimorphismes.

6.3. Soit $C \in \underline{U}$ un site. On appelle point du site C tout point du topos $C^{\sim}$, catégorie des points du site C la catégorie

$$\underline{\text{Point}}(C) = \underline{\text{Point}}(C^{\sim}) \quad .$$

Considérons d'autre part le foncteur

$$(6.3.1) \qquad \varphi \longrightarrow \varphi | C = \varphi \circ \varepsilon_C : \underline{\text{Fib}}(C^{\sim}) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(C,(\underline{U}\text{-Ens})) \quad ,$$

qui est pleinement fidèle et dont l'image essentielle est la sous-catégorie pleine $\underline{\text{Morsite}}((\underline{U}\text{-Ens}),C)^{\circ}$ (4.9.4), que nous noterons aussi $\underline{\text{Fib}}(C)$. Un foncteur

$$\psi : C \longrightarrow (\underline{U}\text{-Ens})$$

est appelé un <u>foncteur fibre sur le site</u> C s'il est dans l'image essentielle de (6.3.1), qu'on vient d'expliciter. Un tel foncteur est donc <u>continu</u> (a fortiori (III 1.6), il transforme familles couvrantes en familles couvrantes, i.e. en familles surjectives), et il est exact à gauche. Lorsque dans C les limites projectives finies sont représentables, (condition vérifiée dans la quasi-totalité des cas qu'on rencontre en pratique.) les propriétés précédentes <u>caractérisent</u> les foncteurs fibres sur C, qui sont alors les foncteurs $\psi : C \longrightarrow (\underline{U}\text{-Ens})$ qui sont exacts à gauche et qui transforment familles couvrantes en familles surjectives (4.9.4).

On retiendra que le foncteur $\varphi \longrightarrow \varphi|C$ est une équivalence de catégories

$$\underline{\mathrm{Fib}}(C^{\sim}) \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Fib}}(C) \quad ,$$

de sorte qu'<u>il revient au même essentiellement de se donner un foncteur fibre sur le topos</u> $C^{\sim}$ (ou encore un point de ce topos), <u>ou un foncteur fibre sur le site</u> C. Etant donné un foncteur fibre ψ sur C, provenant donc à isomorphisme près d'un foncteur fibre φ sur $C^{\sim}$, on réconstitue ce dernier à l'aide de ψ, à isomorphisme canonique près, par la formule

$$\varphi(F) \simeq \varinjlim_{C_{/F}} \psi(X) \quad , \tag{6.3.2}$$

où $C_{/F}$ est la catégorie des objets X de C munis d'un morphisme $X \longrightarrow F$ (dans $\hat{C}$), i.e. d'un élément de F(X). La formule (6.3.2) est une conséquence immédiate du fait que φ commute aux limites inductives et qu'on a un isomorphisme canonique fonctoriel en F (II 4.1.1) :

$$F \simeq \varinjlim_{C_{/F}} \varepsilon_C(X) \quad .$$

Plus généralement, lorsque G est un préfaisceau sur C, on a un isomorphisme canonique fonctoriel en G :

$$(6.3.3) \qquad \varphi(\underline{a}G) \simeq \varinjlim_{C/_G} \psi(X) \quad ,$$

où $\underline{a}$ G est le faisceau associé à G (II 4.1.1). En effet, on sait qu'on a la formule

$$\underline{a}\ G \simeq \varinjlim_{C_{/G}} \varepsilon_C(X) \quad .$$

6.4.0. Nous renvoyons à I 6.1 pour la notion de famille conservative de foncteurs

$$\varphi_i : E \longrightarrow E_i \qquad i \in I \quad .$$

On notera que lorsque E et les E_i sont des $\underline{U}$-topos, et les foncteurs φ_i sont des foncteurs images inverses f_i^* associés à des morphismes de topos

$$f_i : E_i \longrightarrow E \quad ,$$

alors toutes les propriétés d'exactitude postulées dans I 6.2 , I 6.3 et I 6.4 sont vérifiées, à condition dans I 6.2 (v) non respé de supposer que D est fini. Il revient alors au même que $(f_i^*)_{i\in I}$ soit conservative, ou conservative pour les monomorphismes (I 6.1), ou conservative pour les épimorphismes, ou enfin qu'elle soit fidèle.

Lorsque la famille des foncteurs f_i^* est conservative , on dira aussi parfois que la famille des morphismes de topos $(f_i)_{i \in I}$ est conservative . En particulier :

Définition 6.4.1. Soient E un U-topos, $(p_i : P \longrightarrow E)_{i \in I}$ une famille de points de E. On dit que cette famille de points est conservative si la famille des foncteurs fibres associés $F \longmapsto F_{p_i}$ de E dans (U-Ens) est conservative (6.4.0). On dit que le topos E a suffisamment de points lorsqu'il admet une famille conservative de points (i.e. lorsque la famille de tous les points du topos est conservative).

6.4.2. Signalons que tous les U-topos utilisés jusqu'à présent ont suffisamment de points. On peut cependant "en faisant exprès" construire des topos qui n'ont pas suffisamment de points(7.2.6 e) et 7.4) ; on notera qu'un tel topos est nécessairement non "vide" au sens géométrique de 2.2. Un topos admettant suffisamment de points admet une famille conservative de points indexée par un $I \in U$ (6.5). Noter cependant à ce sujet que si E est un U-topos, l'ensemble des classes d'isomorphie de points de E n'est pas nécessairement U-petit (7.3). Il l'est cependant dans de nombreux cas rencontrés en pratique. Enfin, pour un intéressant théorème d'existence (dû à P. Deligne) de suffisamment de points, couvrant tous les cas rencontrés en géométrie algébrique.

6.4.3. Lorsque $(p_i)_{i \in I}$ est une famille conservative de points du topos E, on peut appliquer les remarques de I 6.2 , qui impliquent notamment que deux flèches $u,v : F \rightrightarrows G$ de E sont égales si et seulement si pour tout $i \in I$, les flèches induites sur les fibres $u_{p_i}, v_{p_i} : F_{p_i} \rightrightarrows G_{p_i}$

sont égales ; qu'une flèche $u:F \longrightarrow G$ de E est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si pour tout $i \in I$, il en est ainsi de l'application $u_{p_i} : F_{p_i} \longrightarrow G_{p_i}$; qu'un objet F de E est initial (resp. final) si et seulement si pour tout $i \in I$, F_{p_i} est vide (resp. réduit à un point) ; qu'un objet F est un sous-objet de l'objet final e_E si et seulement si pour tout $i \in I$, F_{p_i} a au plus un point.

Proposition 6.5. a) Soient C un U-site, $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de foncteurs fibres sur C (6.3). Pour que la famille $(p_i)_{i\in I}$ des points correspondants du topos $E = C^{\sim}$ soit conservative, il faut et il suffit que pour toute famille $(X_j \longrightarrow X)_{j\in J}$ dans C, telle que pour tout $i\in I$, la famille correspondante $(\varphi_i(X_j) \longrightarrow \varphi_i(X))_{j\in J}$ soit surjective, la famille donnée $(X_j \longrightarrow X)_{j\in J}$ soit couvrante.

b) Soit E un U-topos. Si E admet suffisamment de points (6.4.1), alors E admet une famille conservative de points qui est U-petite.

L'assertion b) est un cas particulier de I 7.7 . Pour prouver a), appliquons I 7.7 à la famille génératrice dans E formée des $\varepsilon(X)$ ($X \in \mathrm{ob}C$). Rappelons (II 4.4) que la famille $X_j \longrightarrow X$ est couvrante si et seulement si la famille $\varepsilon(X_j) \longrightarrow \varepsilon(X)$ est épimorphique. Si la famille des points $(p_i)_{i\in I}$ est conservative, il revient au même (6.4.3) de dire que pour tout $i \in I$, la famille des $(X_j)_{p_i} \longrightarrow (X)_{p_i}$ soit surjective, i.e. que la famille des $\varphi_i(X_j) \longrightarrow \varphi_i(X)$ soit surjective. Cela établit le "il faut" dans a). Pour le "il suffit", on applique le critère I 7.7 , qui nous ramène à vérifier que tout monomorphisme

$F \longrightarrow \varepsilon(X)$, tel que $F_{p_i} \longrightarrow \varepsilon(X)_{p_i}$ soit un isomorphisme pour tout $i \in I$, est un isomorphisme, ou ce qui revient au même, un épimorphisme. Or, on peut trouver une famille couvrante de morphismes $\varepsilon(X_j) \longrightarrow F$, et quitte à raffiner encore, on peut supposer que les morphismes $\varepsilon(X_j) \longrightarrow \varepsilon(X)$ sont induits par des morphismes $X_j \longrightarrow X$. Par hypothèse, pour tout $i \in I$, les morphismes composés $(X_j)_{p_i} \longrightarrow F_{p_i} \longrightarrow (X)_{p_i}$ forment une famille surjective (comme composée de deux familles surjectives), i.e. la famille des $\varphi_i(X_j) \longrightarrow \varphi_i(X)$ est surjective. Il en résulte par hypothèse que la famille $X_j \longrightarrow X$ est couvrante, donc que la famille des $\varepsilon(X_j) \longrightarrow \varepsilon(X)$ est épimorphisme, et a fortiori que $F \longrightarrow \varepsilon(X)$ est épimorphique.

<u>Corollaire</u> 6.5.1. <u>Soit</u> C <u>une catégorie</u>. <u>Une topologie sur</u> C <u>faisant de</u> C <u>un</u> <u>U</u>-<u>site admettant suffisamment de foncteurs fibres</u> (<u>i.e.</u> <u>tel que le topos associé admette suffisamment de points</u>) <u>est entièrement connue quand on connait la sous-catégorie pleine</u> Φ <u>de</u> <u>Hom</u>(C,Ens) <u>formée des foncteurs fibres sur</u> C.

En effet, en vertu de 6.5 a) on sait alors décrire les familles couvrantes en termes de la famille des foncteurs fibres.

En fait, on va voir plus bas (6.8.3) que la sous-catégorie Φ est contenue dans la catégorie des foncteurs proreprésentables sur C, donc $\Phi^{o} \simeq$ <u>Point</u>($C^{\sim}$) s'identifie à équivalence près à une sous-catégorie pleine de Pro-C .

On comparera 6.5.1 au théorème de GIRAUD II 5.5 , qui établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des topologies sur C et un certain ensemble de sous-catégories pleines de <u>Hom</u>(C^{o},Ens).

<u>Exercice</u> 6.5.2. Soient C une catégorie équivalente à une catégorie $\in \underline{U}$, P une sous-catégorie de Pro(C). Pour tout $p \in P$, on désigne par $X \mapsto X_p$ le foncteur proreprésenté par p. Une famille $(X_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ dans C est dite **P-<u>couvrante</u>** si pour tout $p \in P$, la famille $(X_{i\,p} \longrightarrow X_p)_{i\in I}$ est surjective. Montrer qu'il existe une topologie T_P sur C pour laquelle les familles couvrantes soient exactement les familles P-couvrantes, et que T_P est la topologie la plus fine sur C pour laquelle les foncteurs $X \mapsto X_p$ $(p \in P)$ soient des foncteurs fibres. Montrer que la topologie T_P fait de C un site ayant <u>suffisamment</u> de foncteurs fibres. Montrer que pour toute topologie T sur C, parmi les topologies T' plus fines que T qui ont assez de foncteurs fibres, il en est une moins fine : c'est la topologie T_P, où P est la sous-catégorie strictement pleine de Pro(C), équivalente à <u>Point</u>(C), décrite dans 6.8.3 ci-dessous.

<u>Problème</u> 6.5.3. Caractériser les sous-catégories (strictement pleines, stables par $\underline{U}$-limites projectives filtrantes ...) P de Pro(C) qui peuvent se déduire d'une topologie sur C comme image essentielle de <u>Point</u>($C^{\sim}$) (6.8.5).(*)

6.6. Soit

$$f : E \longrightarrow E'$$

un morphisme de $\underline{U}$-topos, on en déduit un foncteur canonique

$$\underline{\mathrm{Point}}(f) = (\, p \longmapsto f \circ p) \quad : \quad \underline{\mathrm{Point}}(E) \longrightarrow \mathrm{Point}(E') \qquad .$$

Lorsqu'on a deux morphismes de topos composables

$$E \xrightarrow{f} E' \xrightarrow{g} E'' \qquad ,$$

(*) cf. 9.1.8 a) et e) pour des conditions nécessaires, et 9.1.12 b) pour des conditions nécessaires et suffisantes dans le cas de Top(X) , X espace sobre localement noethérien.

on vérifie trivialement que l'on a

$$\underline{\mathrm{Point}}(gf) = \underline{\mathrm{Point}}(g)\circ\underline{\mathrm{Point}}(f) : \underline{\mathrm{Point}}(E) \to \underline{\mathrm{Point}}(E') \to \underline{\mathrm{Point}}(E'') \quad .$$

Cela précise donc la dépendance fonctorielle (sans abus de langage pour une fois) de $\underline{\mathrm{Point}}(E)$ par rapport au topos E : si $\underline{V}$ est un univers tel que $\underline{U}\in\underline{V}$, on trouve un (véritable !) foncteur

$$\underline{\mathrm{Point}} \ : \ (\underline{V}\text{-}\underline{U}\text{-top}) \longrightarrow (\underline{V}\text{-cat})$$

de la catégorie des $\underline{U}$-topos qui sont éléments de $\underline{V}$ dans la catégorie des catégories éléments de $\underline{V}$.

6.7. Soit E un $\underline{U}$-topos. Alors tout objet F de E définit un contrafoncteur

$$p \longmapsto F_p = p^*(F) : \underline{\mathrm{Point}}(E)^\circ \longrightarrow (\underline{U}\text{-Ens}) \quad ,$$

d'où pour F variable un foncteur canonique

(6.7.1) $$E \longrightarrow \underline{\mathrm{Point}}(E)^\wedge = \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Point}}(E)^\circ, (\underline{U}\text{-Ens})) \quad ,$$

qui par définition (6.5) est fidèle si et seulement si E possède suffisamment de points. (Le foncteur (6.7.1) a une certaine analogie formelle avec une transformation de Fourier ...)

Soit X un objet de E, qui définit donc un préfaisceau $\hat{X}$ sur

$$C = \underline{\mathrm{Point}}(E) \quad .$$

Nous pouvons donc définir la catégorie

$$C_{/\hat{X}} = \underline{\mathrm{Point}}(E)_{/\hat{X}}$$

des morphismes $p \longrightarrow \hat{X}$ dans la catégorie $\hat{C}$ des préfaisceaux sur C, i.e. la catégorie des couples (p,ξ), où p est un point de E et ξ un élément de $\hat{X}(p) = X_p$, fibre de X en p. Ceci posé, je dis qu'<u>on a une équivalence de catégories canonique</u>

$$(6.7.2) \qquad C' = \underline{\mathrm{Point}}(E_{/X}) \xrightarrow{\approx} C_{/\hat{X}} \quad , \quad \text{où } C = \underline{\mathrm{Point}}(E) \quad ,$$

dont la composée avec le foncteur d'inclusion $C_{/\hat{X}} \longrightarrow C$ n'est autre que le foncteur

$$\underline{\mathrm{Point}}(j_X) : C' = \underline{\mathrm{Point}}(E_{/X}) \longrightarrow C = \underline{\mathrm{Point}}(E)$$

déduit par fonctorialité (6.6) du morphisme de localisation (5.2.1)

$$j_X : E_{/X} \longrightarrow E \quad .$$

C'est simplement le cas particulier de 5.12 obtenu en faisant $E' = P$.

Corollaire 6.7.3. *Soit* E *un topos. Si* E *a suffisamment de points, il en est de même de tout topos induit* $E_{/X}$ ($X \in \mathrm{ob}\, E$). *Inversement, si* $(X_i)_{i \in I}$ *est une famille d'objets de* E *qui couvre l'objet final, telle que pour tout* $i \in I$, $E_{/X_i}$ *ait suffisamment de points, alors* E *a suffisamment de points.*

Pour la première assertion, soit $f : X' \longrightarrow X''$ un morphisme dans $E_{/X}$ qui n'est pas un isomorphisme, prouvons qu'il existe un point q de $E_{/X}$ tel que f_q ne soit pas un isomorphisme. Comme E a assez de points, il existe un point p de E tel que $f_p : X'_p \longrightarrow X''_p$ ne soit pas un isomorphisme. Cela implique qu'il existe un $q \in X_p$ tel que le morphisme induit par f_p pour les fibres X'_q, X''_q de X'_p, X''_p sur X_p en q ne soit pas un isomorphisme. Mais en vertu de l'équivalence 6.7.2, q peut s'identifier à un point de $E_{/X}$, et l'application $X'_q \longrightarrow X''_q$ qu'on vient d'envisager n'est autre que l'application sur les fibres en q induite par $f : X' \to X''$, d'où la conclusion.

Inversement, supposons que les X_i couvrent l'objet final de E, et que les $E_{/X_i}$ aient assez de points, prouvons qu'il en est de même de E.

Soit $f: X' \longrightarrow X''$ un morphisme dans E qui n'est pas un isomorphisme. Il existe donc un $i \in I$ tel que $f_i: X'_i \longrightarrow X''_i$ n'est pas un isomorphisme, où l'indice i indique la restriction à X_i. Il existe donc un point p_i de $E_{/X_i}$ tel que $f_{ip_i}: X'_{i\,p_i} \longrightarrow X''_{i\,p_i}$ ne soit pas un isomorphisme. Désignant par p l'image de p_i dans E par le morphisme de localisation $E_{/X_i} \longrightarrow E$, cela signifie que $X'_p \longrightarrow X''_p$ n'est pas un isomorphisme, ce qui prouve que E a assez de points.

Remarque 6.7.4. L'argument précédent montre que si (p_α) est une famille conservative de points de E, alors la famille des points de $E_{/X}$ qui sont au-dessus d'un des p_α (famille indexée par l'ensemble somme des E_{p_α}) est conservative. De même, si les X_i couvrent l'objet final de E, et si pour tout $i \in I$, P_i est un ensemble conservatif de points de $E_{/X_i}$, alors l'ensemble des points de E images des $p \in P_i$ pour les morphismes de localisation $E_{/X_i} \longrightarrow E$ ($i \in I$ et p variables) est conservatif.

6.8. Soient E un topos, p un point de E. On appelle voisinage du point p du topos E un couple (X,u), où $X \in \mathrm{ob}\, E$ et $u \in X_p$. En vertu de (6.7.2), on peut aussi interpréter u comme un relèvement de p en un point du topos induit $E_{/X}$. Introduisant le foncteur fibre φ_p associé au point p, on peut aussi interpréter un voisinage du point p comme un objet de la catégorie $E_{/\varphi_x}$ (sous-catégorie pleine de $(E^{\circ})\hat{}_{/\varphi_x}$ formée des objets dont la source est dans $E \in \hat{E}$). Cette dernière catégorie, i.e. la catégorie des couples (X,u) comme ci-dessus, s'appellera comme de juste la catégorie des voisinages du point p du topos E ; on la note aussi $\mathrm{Vois}(p)$. Comme

φ_x est exact à gauche et que les limites projectives finies sont représentables dans E, les limites projectives finies sont représentables dans la catégorie <u>Vois</u>(p), et le foncteur canonique <u>Vois</u>(p) $\longrightarrow$ E y commute (I). A fortiori, la catégorie opposée <u>Vois</u>$(p)^{\circ}$ est filtrante. De plus, il est clair (I 3.4) qu'on a un isomorphisme canonique, fonctoriel en $F \in$ ob E

$$(6.8.1) \qquad \varphi_p(F)=F_p \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{\underline{\mathrm{Vois}}(p)^{\circ}} F(X) .$$

En d'autres termes <u>le foncteur</u> φ_p "<u>fibre en le point</u> p "<u>est isomorphe à la limite inductive filtrante des foncteurs représentés dans le topos</u> E <u>par les voisinages du point</u> p <u>de</u> E. On voit même que <u>le foncteur fibre est ind-représentable</u> (I 8) , ce qui signifie aussi qu'il est représentable par un pro-objet $(X_i)_{i\in I}$ de E, où I est un ensemble ordonné filtrant tel que $I \in \underline{U}$. En effet, en vertu de loc. cit. , il revient au même de dire que la catégorie <u>Vois</u>(p) admet une petite sous-catégorie pleine cofinale. Or soit C une petite sous-catégorie pleine génératrice de E, je dis que la sous-catégorie pleine $C_{/\varphi_o}$ de <u>Vois</u>$(p) = E_{/\varphi_p}$, formée des voisinages (X,u) de p tels que $X \in$ ob C (catégorie qui est évidemment petite) est cofinale dans <u>Vois</u>(p). Soit en effet (X,u) un voisinage de p, il faut trouver un voisinage (X',u') de p au-dessus de (X,u), avec $X' \in$ ob C. Or il existe une famille couvrante $X_i' \longrightarrow X$, avec les X_i' dans C, d'où résulte que les X_{ip}' couvrent X_p, donc il existe un $X' = X_{i_o}'$ et un $u' \in X'_p$ tels que (X',u') soit au-dessus de (X,p), ce qu'on avait affirmé.

6.8.2. Soient C un $\underline{U}$-site, et p un point de C, i.e. un point du topos $C^{\sim}$. Désignons encore, par abus de notations, par φ_p la "restriction" du foncteur fibre φ_p à C, i.e. le composé $\varphi_p \circ \varepsilon$; nous écrirons aussi souvent, pour un objet X de C

$$X_p = \varphi_p(X) = \varepsilon(X)_p \quad .$$

On appelle <u>voisinage du point</u> p <u>dans le site</u> C un couple (X,u), où $X \in \text{ob } C$ et $u \in X_p = \varphi_p(X)$. Ces voisinages forment encore une catégorie $C_{/\varphi_p}$, qu'on pourra noter $\underline{\mathrm{Vois}}_C(p)$. Montrons que <u>la catégorie</u> $\underline{\mathrm{Vois}}_C(p)^{\circ}$ <u>est encore filtrante</u>, <u>qu'elle admet une sous-catégorie pleine cofinale</u> <u>$\underline{U}$-petite</u>, <u>et qu'on a un isomorphisme fonctoriel en le faisceau</u> F <u>sur</u> C :

$$F_p \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{\underline{\mathrm{Vois}}_C(p)^{\circ}} F(X) \quad . \tag{6.8.3}$$

On note d'abord, en reprenant l'argument de 6.8.1, que si C' est une sous-catégorie pleine de C qui est topologiquement génératrice (II 3.0.1), alors $\underline{\mathrm{Vois}}_{C'}(p)^{\circ}$ est cofinale dans $\underline{\mathrm{Vois}}_C(p)^{\circ}$. Prenant C' $\underline{U}$-petite, on est donc ramené, pour établir l'assertion, au cas où $C \in \underline{U}$. Dans ce cas $\hat{C}$ est un $\underline{U}$-topos, et on a un foncteur faisceau associé $\underline{a}: \hat{C} \to C^{\sim}$, qui permet de construire sur $\hat{C}$ le foncteur fibre composé $\varphi_p\, \underline{a}$. Appliquant 6.8.1 au topos $\hat{C}$ et à la sous-catégorie génératrice pleine C de celui-ci, on trouve que la catégorie $C_{/\varphi_p \underline{a}}^{\circ}$, qui est manifestement isomorphe à $\underline{\mathrm{Vois}}_C(p)^{\circ}$, est filtrante, et qu'on a un isomorphisme fonctoriel en le préfaisceau P sur C :

$$\varphi_p \underline{a}(P) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{X} P(X) \quad .$$

Si F est un faisceau sur C, on a $F = \underline{a}F$, et appliquant l'isomorphisme précédent à F considéré comme préfaisceau, on obtient (6.8.3). En même temps, cet argument établit la formule plus générale

(6.8.4) $$(\underline{a}\, P)_p \simeq \varinjlim_{\underline{\mathrm{Vois}}_C(p)^\circ} P(X) \quad ,$$

isomorphisme fonctoriel en le préfaisceau P arbitraire sur C, du moins lorsque C est petit. Le cas général s'en déduit, en introduisant un univers $\underline{V}$ tel que $C \in \underline{V}$, en considérant φ_p sur C comme un foncteur fibre à valeurs dans ($\underline{V}$-Ens), et utilisant la compatibilité de la formation du préfaisceau associé avec l'agrandissement des univers (II 3.6).

6.8.5. On a associé à tout point p du topos $C^\sim$ un pro-objet du $\underline{U}$-site C, défini par le foncteur canonique $\underline{\mathrm{Vois}}_C(p) \longrightarrow C$, compte tenu du fait que la catégorie des voisinages de p dans C est cofiltrante et admet une petite sous-catégorie pleine cofinale. On vérifie aussitôt que pour p variable, on obtient ainsi un foncteur

(6.8.5.1) $$\underline{\mathrm{Point}}(C^\sim) \longrightarrow \mathrm{Pro}(C) \quad .$$

Ce foncteur est <u>pleinement fidèle</u>. En effet, via les foncteurs fibres associés, il s'interpréte comme un foncteur $\mathrm{Fib}(C) \longrightarrow \mathrm{Fib}(C^\sim) \rightarrow \mathrm{Pro}(C)^\circ$. Le premier foncteur est une équivalence en vertu de 4.9.4 (rappelé pour les foncteurs fibres en 6.3), et le deuxième est pleinement fidèle d'après le sorite général (I 8) des pro-objets.

6.8.6. Prenons le cas particulier où C est $\underline{U}$-petite et munie de la topologie chaotique, de sorte que $C = \hat{C}$. Je dis que dans ce cas le foncteur précédent est même une équivalence de catégories

(6.8.6.1) $$\underline{\mathrm{Point}}(\hat{C}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Pro}(C) \quad ,$$

En effet, il reste à prouver que ce foncteur est essentiellement surjectif, ce qui résulte du fait que les foncteurs de la forme $P \mapsto P(X)$ sur $\hat{C}$ sont des foncteurs fibres, et du fait évident que toute limite inductive filtrante de foncteurs fibres sur un topos est encore un foncteur fibre.

Identifiant C à une sous-catégorie pleine de Pro(C) (I 8), le foncteur

$$C \longrightarrow \underline{\mathrm{Point}}(\hat{C})$$

induit par un foncteur quasi-inverse de (6.8.5.2) est manifestement isomorphe au foncteur canonique déjà envisagé dans (4.6.2.2), dont le quasi-inverse envisagé peut être considéré comme le prolongement canonique (I 8), compte tenu du fait que $\underline{\mathrm{Point}}(\hat{C})$ est stable par petites limites projectives.

6.8.7. Soit de façon générale $(X_i)_{i\in I}$ un pro-objet du $\underline{U}$-site C, d'où sur $C^{\sim}$ un foncteur

$$(6.8.7.1) \qquad \varphi(F) = \varinjlim_{I} F(X_i) \quad ,$$

et il est naturel de se demander, vu (6.8.5), quand ce foncteur est un foncteur fibre. On trouve que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le foncteur φ précédent est un foncteur fibre sur $C^{\sim}$.

(ii) La "restriction" de φ à C est un foncteur fibre sur le site C (6.3).

(iii) Pour toute famille couvrante $Y_\alpha \longrightarrow Y$ d'un objet Y de C, tout $i_o \in I$ et tout morphisme $X_{i_o} \longrightarrow Y$, il existe un $i \geq i_o$, un α et un morphisme $X_i \longrightarrow Y_\alpha$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_i & \longrightarrow & Y_\alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{i_o} & \longrightarrow & Y \end{array} \quad .$$

En fait, la condition (iii) exprime simplement le fait que $\varphi|C$ transforme familles couvrantes en familles couvrantes. Les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) sont triviales, et il reste à prouver (iii) $\Longrightarrow$ (i). Comme le foncteur φ est manisfestement exact à gauche, il reste à prouver (4.9.4) qu'il transforme familles couvrantes $F_\alpha \longrightarrow F$ dans $C^\sim$ en familles couvrantes, i.e. que pour tout i_o et tout $x_o \in F(X_{i_o})$, il existe un $i \geq i_o$, un α et un $y \in F_\alpha(X_i)$, tels que x_o et y aient même image dans $F(X_i)$. Or comme $F_\alpha \longrightarrow F$ est couvrante, il existe une famille couvrante $Z_\lambda \rightarrow X_{i_o}$ de X_{i_o}, tel que pour tout λ l'image inverse de x_o dans $F(Z_\lambda)$ se remonte en un élément d'un $F_\alpha(Z_\lambda)$. Par hypothèse (iii), il existe un $i \geq i_o$ et un X_{i_o}-morphisme $X_i \longrightarrow Z_\lambda$. Alors l'image de x_o dans $F(X_i)$ se remonte donc en un élément y d'un $F_\alpha(X_i)$, cqfd.

<u>Exercice</u> 6.9. Soient C un site $\in \underline{U}$, φ un foncteur fibre sur C, proreprésenté par un objet $(X_i)_{i \in I}$ de $\mathrm{Pro}(C)$. Pour tout indice $i \in I$, tout objet Y de C, tout morphisme $u\colon X_i \longrightarrow Y$ et tout crible couvrant R de Y, choisissons un indice $j \geq i$ tel que le composé $X_j \rightarrow X_i \xrightarrow{u} Y$ se factorise par R. Pour i fixé, soit $J(i)$ l'ensemble formé de i, et des j obtenus pour Y,u,R variables ; pour une partie I' de I, soit de même $J(I')$ la réunion des $J(i)$ pour $i \in I'$. D'autre part, si I' est une partie finie de I, soit $m(I') \in I$ un majorant de I', et pour une partie quelconque I' de I, soit $M(I')$ la réunion des $M(I'')$, où I'' parcourt l'ensemble des parties finies

de I' . On suppose qu'on choisit la fonction $I' \longrightarrow m(I')$ de façon que pour I' réduit à un élément i , on ait $m(I') = i$, ce qui implique que pour toute partie I' de I , on a $I' \subset M(I')$. Considérons les itérés $(MJ)^n$ de l'application MJ de l'ensemble des parties de I dans lui-même, et soit, pour toute partie I' de I , P(I') la réunion des $(MJ)^n(I')$.

a) Montrer que pour toute partie I' de I , P(I') est une partie filtrante de I pour l'ordre induit, et que I est réunion filtrante croissante des P(I') , lorsque I' parcourt l'ensemble des parties <u>finies</u> de I .

b) Montrer qu'il existe un cardinal $c \in \underline{U}$, ne dépendant que du cardinal card fl(C) = a , tel que pour toute partie finie I' de I , on ait $\mathrm{card}(P(I')) \leq c$. (Si a est infini, on peut prendre $c = 2^a$).

c) Montrer, en utilisant 6.8.7, que pour toute partie I' de I de foncteur $\varphi_{I'}$ sur C proreprésenté par le pro-objet $(X_i)_{i \in I'}$ est un foncteur fibre sur C , et que le foncteur fibre φ est limite inductive filtrante des foncteurs $\varphi_{I'}$, lorsque I' parcourt l'ensemble des parties finies de I .

d) En conclure qu'il existe une petite sous-catégorie pleine Φ de <u>Fib</u>(C) $\approx$ <u>Fib</u>(C) , telle que tout objet de <u>Fib</u>(C) soit limite inductive filtrante d'objets de Φ . (Si a est infini, on peut prendre Φ de cardinal $\leq 2^{2^a}$; si a est fini, on peut prendre Φ = C bien sûr).

<u>Exercice</u> 6.10. Soient C un $\mathcal{U}$-site, D une $\mathcal{U}$-catégorie où les petites $\varinjlim$ filtrantes sont représentables, $\mathfrak{F}ais(C,D)$ la catégorie des faisceaux sur C à valeurs dans F (II 6.1)). Définir, en étendant (6.8.3), un "foncteur fibre"

$$F \longrightarrow F_p : \mathfrak{F}ais(C,D) \longrightarrow D \quad . \tag{6.10.1}$$

Si dans D les $\varprojlim$ finies sont représentables, et commutent aux $\varinjlim$ filtrantes, alors le foncteur précédent est exact à gauche.

7. Exemples de foncteurs fibres et de points de topos

7.1. Cas de Top(X) pour un espace topologique X

Soit x un point de X. Regardons l'ensemble ponctuel $\{x\}$ comme un espace topologique, et considérons l'inclusion

$$i_x : \{x\} \longrightarrow X \quad .$$

En vertu de 4.1.1 il définit un morphisme de topos (défini à isomorphisme unique près)

$$(7.1.1) \qquad \mathrm{Top}(i_x) : \mathrm{Top}(\{x\}) \longrightarrow \mathrm{Top}(X) \quad .$$

D'autre part, on peut identifier P à Top($\{x\}$) (2.2), et on trouve ainsi un point p_x de Top(X) :

$$(7.1.2) \qquad p_x : P \longrightarrow \mathrm{Top}(X) \quad ,$$

défini par x à isomorphisme unique près. Le foncteur fibre associé est donné par la formule bien connue [TF], résultant d'ailleurs immédiatement de I 5.1 :

$$(7.1.3) \qquad p_x^*(F) = F_x = F_{p_x} = \varinjlim_{U \ni x} F(U) \quad ,$$

la limite étant prise suivant les voisinages ouverts U de x dans X.

Comme on sait que Top(X) est isomorphe à Top(X_{sob}) (4.2.1), on voit plus généralement que tout point de X_{sob}, i.e. toute partie fermée irréductible Z de X, définit un point de Top(X), ou encore un foncteur fibre sur Top(X), qu'on notera encore $F \mapsto F_Z$. Revenant à sa définition par la formule (7.1.3) sur X_{sob}, on trouve

$$(7.1.4) \qquad F_Z = \varinjlim_{U \cap Z \neq \emptyset} F(U) \quad ,$$

la limite inductive étant prise suivant les ouverts U de X qui rencontrent Z.

7.1.5. Il est bien connu que les foncteurs fibres $F \mapsto F_x$ ($x \in X$) forment déjà une famille conservative. C'est particulièrement évident sur l'interprétation des faisceaux sur X en termes d'espaces étalés, la fibre de F en x n'étant alors autre que sa fibre au sens des espaces fibrés sur X. On notera que l'ensemble d'indices de la famille conservative de foncteurs fibres envisagée est X, donc est U-petite.

7.1.6. En vertu de 4.2.3, la catégorie Point(Top(X)) est équivalente à la catégorie associée à l'ensemble X_{sob} ordonné par la relation de spécialisation. En d'autres termes : tout foncteur fibre sur Top(X) est isomorphe à un foncteur fibre $F \longmapsto F_Z$, où Z est un élément uniquement déterminé de X_{sob} , i.e. une partie fermée irréductible uniquement déterminée de X ; d'autre part, si $Z, Z' \in X_{sob}$, alors l'ensemble $\mathrm{Hom}(F_Z, F_{Z'})$ est vide ou réduit à un point, ce dernier cas se présentant si et seulement si Z est une spécialisation de Z' dans X_{sob}, i.e. si et seulement si $Z \subset Z'$ comme partie de X. Lorsque X lui-même est sobre, on peut dans ces énoncés remplacer X_{sob} par X lui-même.

On notera que le groupe des automorphismes d'un foncteur fibre de Top(X) (opposé au groupe des automorphismes du point correspondant de Top(X)) est toujours réduit au groupe unité (plus généralement, 4.2.3 nous apprend la même chose pour le groupe des automorphismes de tout morphisme de topos associés à des espaces topologiques). C'est là un phénomène très spécial au cas particulier envisagé : voir l'exemple 7.2, ainsi que VIII 7. Dans le cas des topos associés à des "problèmes de modules" (cf. par exemple [10]), les groupes d'automorphismes des foncteurs fibres ont d'ailleurs une interprétation remarquable, comme les groupes d'automorphismes des structures algébriques (sur des corps algébriquements clos) qu'on se propose de classifier.

7.1.7. On vient de voir comment on peut réconstituer un espace sobre X (ou l'espace sobre X_{sob} associé à un espace topologique quelconque), du moins en tant qu'ensemble ordonné par la relation de spécialisation, à l'aide du topos Top(X) (qu'il suffit même de connaître à équivalence près), comme l'ensemble des classes d'isomorphie de "points" de Top(X). D'après ce qui a été dit dans 2.1, on réconstitue également la topologie de X, i.e. la famille de ses ouverts, de la façon suivante : pour tout sous-objet U de l'objet final e_E de E, soit Pt(U) l'ensemble des $x \in X$ tels que $U_x \neq \emptyset$ (qui s'identifie d'ailleurs, en vertu de(6.7.2), à l'ensemble des classes d'isomorphie de points du topos induit $E_{/U}$). Alors $U \longmapsto Pt(U)$ est un isomorphisme d'ensembles ordonnés de l'ensemble des sous-objets de e_E sur l'ensemble des ouverts de X.

7.1.8. La détermination 7.1.6 de la catégorie des points du topos Top(X) défini par un espace topologique X conduit à adopter la terminologie suivante pour les points p,p' d'un topos quelconque E : on dit que p est une <u>spécialisation</u> de p' , ou que p' est une <u>générisation</u> de p , lorsqu'il existe un morphisme de p' dans p (au sens de la catégorie <u>Point</u>(E) de 6.1). Ces relations sont encore transitives, mais on trouve facilement grâce à 6.8.6 des exemples où p et p' sont chacun spécialisation de l'autre, sans que p et p' soient isomorphes (ni a fortiori égaux). La catégorie des générisations d'un point p du topos E, par quoi on entend la catégorie $\underline{\mathrm{Point}}(E)_{/p}$, joue à certains égards un rôle analogue à celui du passage au localisé d'un schéma en un point. Ce rôle sera précisé au Chap. VI avec la construction du topos localisé de E en le point p, dont la catégorie des points est canoniquement équivalente à la catégorie des générisations de p.

Exercice 7.1.9. Soit E un $\underline{U}$-topos. Prouver que E est équivalent à un topos de la forme Top(X), où X est un espace topologique $\in \underline{U}$, si et seulement si il satisfait aux deux conditions suivantes :

a) La famille des sous-objets de l'objet final e_E est génératrice pour le topos E.

b) E a suffisamment de points (6.5). (Cette condition n'est pas superflue : cf. 7.4.)

Comparer avec 7.8 c).

Exercice 7.1.10. Soient X un espace topologique muni d'un groupe d'opérateurs G $(X,G \in \underline{U})$ et soit $E = \mathrm{Top}(X,G)$ (2.3).

a) Montrer que pour tout objet (X',G) de E , le topos induit $E_{/(X',G)}$ est canoniquement équivalent au topos Top(X',G) (comparer 5.7).

b) Lorsque G opère proprement et librement sur X' (Bourbaki, Top. Gen. Chap. III § 4), montrer que le morphisme d'espaces à opérateurs $(X',G) \longrightarrow (X'/G,e)$ induit (4.1.2) une équivalence de topos

$$\mathrm{Top}(X',G) \longrightarrow \mathrm{Top}(X'/G) \quad .$$

c) Conclure de b) qu'il existe un objet Z de E tel que le topos induit $E_{/Z}$ soit équivalent à Top(X), le foncteur de localisation $E \rightarrow E_{/Z}$ étant isomorphe au foncteur "oubli des opérations de G ". (Calquer le raisonnement de 5.8.3.)

d) Conclure de c) que tout foncteur fibre sur E est induit, via le foncteur "oubli des opérations de G ", par un foncteur fibre sur Top(X), donc définissable par un point de X_{sob}.

e) Déterminer la structure de la catégorie Point(E) (à équivalence près) en termes de l'espace à opérateurs (X_{sob},G). En conclure en particulier que deux points de X_{sob} définissent des foncteurs fibres sur E isomorphes si et seulement si ils sont conjugués sous l'action de G.

Exercice 7.1.11. Soit $X \in \underline{U}$ un espace topologique. Prouver que le V-topos TOP(X) (2.5) a suffisamment de points. Plus précisément, pour tout objet X' de TOP(X), et tout $x' \in X'$, définir un foncteur fibre $F \longmapsto F_{X',x'}$ sur TOP(X), ne dépendant que du "germe" d'espace (X',x') au-dessus de X, et prouver que cette famille de foncteurs fibres est conservative (et indexée par un ensemble d'indices $\underline{V}$-petit). Montrer, en utilisant un système projectif filtrant convenable $(X'_i,x'_i)_{i\in I}$, avec I non $\underline{U}$-petit, que l'on n'obtient pas de cette façon tous les foncteurs fibres du $\underline{V}$-topos TOP(X). Montrer que l'ensemble des classes d'isomorphie de tels foncteurs fibres n'est pas de cardinal $\in \underline{V}$.

7.2. Points d'un topos classifiant B_G

Soient E un U-topos, G un Groupe de E, d'où un topos classifiant B_G (2.4). Si e est le Groupe ponctuel, les morphismes $e \to G \to e$ définissent (4.5) des morphismes de topos (compte tenu que $B_e \approx E$)

(7.2.1) $$E \longrightarrow B_G \longrightarrow E \quad ,$$

dont le composé est isomorphe à id_E, d'où par passage aux catégories de points des foncteurs

(7.2.2) $$\underline{\mathrm{Point}}(E) \longrightarrow \underline{\mathrm{Point}}(B_G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Point}}(E) \quad ,$$

dont le composé est isomorphe à l'identité. Utilisons le fait que le premier morphisme de topos (7.2.1) s'identifie à un morphisme de localisation relativement à l'objet $E_G = G$ de B_G (5.8), d'où résulte en vertu de 6.7.2 que le premier foncteur (7.2.2) s'identifie au foncteur naturel "d'inclusion"

(7.2.3) $$\underline{\mathrm{Point}}(B_G)_{/\hat{E}_G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Point}}(B_G) \quad ,$$

où $\hat{E}_G$ désigne le préfaisceau $p' \longmapsto (E_G)_{p'}$ sur $\underline{\mathrm{Point}}(B_G)$. Comme E_G couvre évidemment l'objet final de B_G, ses fibres $(E_G)_p$ sont non vides, d'où résulte que (7.2.3) est essentiellement surjectif, ce qui signifie que tout foncteur fibre sur B_G est induit (à isomorphisme près) par un foncteur fibre de E, via le foncteur "oubli des opérations de G" $B_G \longrightarrow E$. On en conclut en particulier que si E a suffisamment de points (resp. une petite famille conservative de points) il en est de même de B_G .

Remarque 7.2.4. On peut aller plus loin et déterminer (à équivalence près) la structure de la catégorie $C' = \underline{\mathrm{Point}}(B_G)$ en termes de la catégorie $C = \underline{\mathrm{Point}}(E)$ et du préfaisceau en groupes

$$\hat{G} : p \longmapsto G_p \quad : \quad C^o \longrightarrow (\text{Groupes})$$

sur celle-ci. Définissons en effet une nouvelle catégorie C_1 , ayant mêmes objets que C , et telle que pour deux objets p,q de C , on ait

$$\mathrm{Hom}_{C_1}(p,q) = \mathrm{Hom}_C(p,q) \times \hat{G}(p) \quad ,$$

la composition des flèches dans C_1 étant induite par celle de C, et par la loi de groupe du préfaisceau $\hat{G}$. La donnée d'un foncteur $\varphi_1 : C_1 \to D$ dans une catégorie quelconque D équivaut alors à la donnée d'un foncteur $\varphi : C \longrightarrow D$, muni d'une opération du préfaisceau $\hat{G}$ sur ce dernier (i.e. la donnée, pour tout $p \in \mathrm{ob}\, C$, d'une opération de $\hat{G}(p)$ sur $\varphi(p)$, satisfaisant à une condition de fonctorialité évidente pour p variable). Utilisant cette observation, on définit un foncteur canonique

(7.2.4.1) $$\varphi_1 : C_1 \longrightarrow C' \quad ,$$

correspondant au foncteur $\varphi : C \longrightarrow C'$ de (7.2.2), associant à tout point p de E le point $\varphi(p)$ induit sur B_G, avec les opérations naturelles de $\hat{G}(p) = G_p$ sur ce dernier, provenant des opérations de G_p sur les X_p lorsque X parcourt B_G. On laisse au lecteur le soin de prouver que (7.2.4.1) est une équivalence de catégories, en utilisant la structure (7.2.3) du premier foncteur de (7.2.2), et en notant que le foncteur naturel d'inclusion $C \longrightarrow C_1$ admet une structure analogue, relativement à l'image inverse P_1 du préfaisceau $P' = \hat{E}_G$ sur C'.

7.2.5. On conclut en particulier que les classes d'isomorphie de points de B_G correspondent exactement aux classes d'isomorphie de points de E : tout point du topos classifiant E_G est induit, à isomorphisme non unique près, par un point de E. En particulier, lorsque E est le topos ponctuel P, donc que G est un groupe ordinaire, alors la catégorie $\underline{\mathrm{Point}}(B_G)$ est un groupoïde connexe à groupe fondamental G : tout foncteur fibre sur B_G est isomorphe (de façon non canonique) au foncteur ω "oubli des opérations de G", et le monoïde des endomorphismes de ce dernier foncteur est le groupe G (donc tout endomorphisme de ω est un automorphisme).

Exercice 7.2.6. a) Soit (Tors) la catégorie des couples $(\Gamma,P) \in \underline{U}$, avec Γ un groupe et P un torseur à droite sous Γ. Le foncteur $(\Gamma,P) \longmapsto \Gamma$

(7.2.6.1) $$(\mathrm{Tors}) \longrightarrow (\mathrm{Groupes})$$

est un foncteur cofibrant. Avec les notations de 7.2.4, considérons le foncteur

$$\hat{G} : \quad C^{\circ} \longrightarrow (\mathrm{Groupes}) \quad ,$$

et soit D' la catégorie cofibrée sur C° image inverse de la catégorie cofibrée (7.2.6.1), D la catégorie fibrée correspondante sur C, ayant même catégories fibres que D', de sorte que pour $p \in \mathrm{ob}\, C$, on ait

$$D_p = \text{catégorie des } G_p\text{-torseurs à droite} \quad .$$

Construire des foncteurs canoniques

(7.2.6.2) $$D \longrightarrow C' = \underline{\mathrm{Point}}(B_G) \quad , \quad C' \longrightarrow D \quad ,$$

quasi-inverses l'un de l'autre. En particulier, en conclure que la catégorie des points de B_G au-dessus d'un point donné p de E est canoniquement équivalente à la catégorie des torseurs à droite sous le groupe G_p .

b) Soit $\underline{G} = (G_i)_{i \in I}$ un système projectif strict de Groupes du $\underline{U}$-topos E ($I \in \underline{U}$ un ensemble préordonné filtrant), d'où un topos classifiant $B_{\underline{G}}$, en calquant la définition de 2.7.1. Déterminer la catégorie des points de $B_{\underline{G}}$, en calquant a). (NB. On remplacera les catégories (Tors) et (Groupes) par les catégories de systèmes projectifs indexés par I de ces catégories.) En conclure que si I admet un ensemble cofinal dénombrable, alors tout foncteur fibre sur $B_{\underline{G}}$ est isomorphe à un foncteur induit par un foncteur fibre de E (via le foncteur "oubli des opérations de G"), ce dernier étant déterminé à isomorphisme non unique près.

c) Prenant pour E le topos ponctuel, de sorte que $\underline{G}$ est un pro-groupe ordinaire, montrer que la conclusion de b) est également valable si I est quelconque, mais en revanche $\underline{G}$ est profini (i.e. les G_i sont finis) : tout foncteur fibre est isomorphe au foncteur "oubli des opérations de G".

d) Prenant toujours le cas où E est le topos ponctuel, donner un exemple d'un foncteur fibre sur $B_{\underline{G}}$, pour un système projectif convenable $\underline{G} = (G_i)_{i \in I}$, qui n'est pas isomorphe au foncteur "oubli des opérations de G ".

e) Considérons $\underline{G} = (G_i)$ comme un Groupe du topos $\hat{I}$, et soit $\underline{T}$ une <u>gerbe</u> sur I de <u>lien</u> G [3]. Montrer comment on peut "tordre" le topos classifiant B_G à l'aide de la gerbe T, pour obtenir un topos $B^T_{\underline{G}}$, limite inductive de sous-catégories $B^T(i)$ équivalentes (non canoniquement) aux topos classifiants B_{G_i}. Montrer que le topos $B^T_{\underline{G}}$ admet un foncteur fibre si et seulement si la gerbe T est "neutre", en établissant une équivalence de catégories entre la catégorie des foncteurs fibres de $B_{\underline{G}}^{T}$ et la catégorie des sections de T sur I. En conclure, si les G_i sont commutatifs, de sorte que la classification des gerbes sur I de lien $\underline{G}$ se fait par $\varprojlim_{I}^{(2)} G_i = H^2(I,\underline{G})$ (loc. cit.), un exemple d'un topos (non "vide" (2.2)) de la forme $B_{\underline{G}}^{T}$ qui n'a pas de points.(Prendre un exemple où $\varprojlim_{I}^{(2)} G_i \neq 0$.)

7.3. <u>Points des topos</u> $\hat{C}$; <u>exemples de</u> $\underline{U}$<u>-topos</u> $\hat{C}$ <u>dont la catégorie des points ne soit pas équivalente à une petite catégorie</u>

Soient E un $\underline{U}$-topos, $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille filtrante de foncteurs fibres sur E. Il résulte des propriétés d'exactitude des foncteurs $\varinjlim$ (I et) que le foncteur $\varphi = \varinjlim \varphi_i$ est également un foncteur fibre : <u>toute limite inductive filtrante de foncteurs fibres est un foncteur fibre</u>. Par suite, la catégorie $\underline{\mathrm{Fib}}$(E) admet des $\underline{U}$-limites inductives filtrantes (et le foncteur d'inclusion Fib(E) $\longrightarrow$ $\underline{\mathrm{Hom}}$(E,($\underline{U}$-Ens)) y commute) ; en d'autres termes, la catégorie $\underline{\mathrm{Point}}$(E) admet des $\underline{U}$-limites projectives filtrantes. Ce fait a déjà été utilisé dans exercice 7.1.10 pour donner un exemple de "grosses" catégories de foncteurs fibres.

On peut construire des exemples nettement plus simples, avec des topos de la forme $E = \hat{C}$, $C \in \underline{U}$, en utilisant (6.8.6.1). Ceci nous donne aussitôt des exemples où $\underline{\mathrm{Fib}}(\hat{C})$ n'est pas équivalente à une catégorie $\in \underline{U}$ i.e. où le cardinal de l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de cette $\underline{U}$-catégorie n'est pas $\in \underline{U}$. Ceci signifie que la catégorie Pro-(C) n'est pas équivalente à une catégorie $\in \underline{U}$. Il suffit par exemple de prendre pour $D = C^{\circ}$ la catégorie des ensembles finis de la forme $[0,n]$, où $n \geq 0$ est un entier, auquel cas $\mathrm{Ind}(D) \simeq \mathrm{Pro}(C)^{\circ}$ est équivalente à la catégorie des ensembles non vides. Le topos E est dans ce cas la catégorie bien connue des ensembles cosimpliciaux. On pourrait aussi prendre pour C la catégorie des ensembles finis non vides, on trouve que la catégorie des points sur le topos $\hat{C}$ des ensembles simpliciaux est équivalente à la catégorie des ensembles profinis, ou encore à la catégorie des espaces compacts totalement discontinus.

7.4. Topos non vides sans points

L'exemple suivant est dû à P. Deligne. (Pour un autre exemple, cf. 7.2.6 d).) On prend un espace compact K muni d'une mesure μ , et l'ensemble ordonné U des parties mesurables de K à ensemble de mesure nulle près. On fait de U une catégorie $\underline{U}$ telle que ob $\underline{U}$ = U, les morphismes de $\underline{U}$ étant les "morphismes d'inclusion" entre éléments de U. On fait de $\underline{U}$ un site en prenant la prétopologie pour laquelle Cov(E) (pour $E \in U$) est formé des familles dénombrables d'éléments E_i de E majorés par E, telles que E soit la réunion des E_i à ensemble de mesure nulle près. On en déduit un Topos $\mathrm{Top}(\mu) = \underline{U}^{\sim}$, admettant l'ensemble des sous-objets de l'objet final comme famille génératrice (lequel topos semble avoir échappé à l'attention des probabilistes). Ce topos est un "topos vide" (2.2) si et seulement si $\mu = 0$. D'autre part, la catégorie des points de ce topos est équivalent à la catégorie discrète définie par l'ensemble des points $x \in K$ tels que $\mu(\{x\}) \neq 0$ (démonstration au lecteur). Elle est donc vide si K n'admet pas de tels points, par exemple si K est le segment unité de la droite, avec la mesure induite par la mesure de Lebesgue.

<u>Exercice</u> 7.5. (<u>catégories Karoubiennes et morphismes de topos</u>)(*)

a) Soient C une catégorie, X un objet de C, p un endomorphisme de X. On dit que p est un <u>projecteur</u> si $p^2=p$. Prouver que si p est un projecteur, pour que $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_X,p)$ soit représentable, il faut et il suffit que $\mathrm{Coker}(\mathrm{id}_X,p)$ le soit, et que les deux objets de C ainsi obtenus sont canoniquement isomorphes. On dira alors que le projecteur p <u>admet une image</u>, et $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_X,p) \simeq \mathrm{Coker}(\mathrm{id}_X,p)$ est appelé l'<u>image du projecteur</u> p ; on l'identifie suivant le contexte à un sous-objet ou à un objet quotient de C. Un objet isomorphe à un Im p, pour un projecteur convenable p dans X, est appelé un <u>facteur direct de l'objet</u> X <u>de</u> C. On dit que C est une <u>catégorie avec facteurs directs</u>, ou une <u>catégorie Karoubienne</u>, si tout projecteur dans un objet de C admet une image. Si $F: C \longrightarrow C'$ est un foncteur qui commute aux noyaux ou aux conoyaux, alors F transforme un projecteur admettant une image en un projecteur admettant une image.

b) Montrer que pour toute catégorie C, on peut trouver un foncteur $\varphi : C \to \mathrm{kar}(C)$ de C dans une catégorie karoubienne (déterminée à équivalence près), tel que pour toute catégorie karoubienne C', le foncteur

$$f \longmapsto f\circ\varphi : \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{kar}(C),C') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C,C')$$

soit une équivalence de catégories ; on appelera kar(C) l'<u>enveloppe de Karoubi</u> de la catégorie C. (Hint : prendre pour ob kar(C) l'ensemble des couples (X,p), avec $X \in \mathrm{ob}\, C$ et p un projecteur dans X, et pour $\mathrm{Hom}((X,p),(Y,q))$ la partie de $\mathrm{Hom}(X,Y)$ formée des $f:X \to Y$ tels que $f = qfp$.) Montrer que φ est pleinement fidèle.

c) Soit $F: E \to E'$ un foncteur d'une catégorie dans une autre. Montrer que si F commute à un certain type de limites inductives ou pro-

(*) Comparer I 8.7.8.

jectives, il en est de même de tout facteur direct de F. En particulier, si E et E' sont des U-topos et si F est un foncteur image inverse pour un morphisme de topos $E' \to E$, alors il en est de même de tout facteur direct de F ; par suite, la catégorie Homtop(E',E) est karoubienne, et en particulier la catégorie Point(E) est karoubienne.

d) Montrer que pour toute U-catégorie C, la catégorie Ind(C) est karoubienne (où Ind(C) est formée avec les systèmes inductifs de C indexés par un ensemble préordonné filtrant $I \in U$). (Si $C \in U$, utiliser par exemple le fait (7.3) que Ind(C) est équivalente à la catégorie $\mathrm{Fib}((C^{\circ})^{\wedge}) = \mathrm{Point}(((C^{\circ})^{\wedge})^{\circ}$.) En conclure une autre construction de kar(C) comme sous-catégorie pleine de Ind(C) formée des images dans Ind(C) des projecteurs d'objets X de C.

Exercice 7.6. (Morphismes essentiels de topos, points essentiels).

a) Soit $f:E \to F$ un morphisme de topos. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $f_!$ existe, i.e. f^* admet un adjoint à gauche.

ii) f^*commute aux U-limites projectives.

ii') f^* commute aux U-produits.

On dira alors que f est un morphisme essentiel du topos E dans le topos E'.

Montrer que si f satisfait à ces conditions, il en est de même de tout facteur direct de f. (Utiliser 1.8 et 7.5 c).)

b) Soit E un topos. On appelle point essentiel du topos E tout point $p: P \to E$ de E tel que $p_!$ existe. Montrer que si E=Top(X), X espace topologique, et si p est le point de E défini par un $x \in X$, alors p est essentiel si et seulement si x admet un plus petit voisinage ouvert U (ce qui signifie, si les points de X sont fermés, que x est un point isolé de X). Pour qu'un morphisme de topos $f : E \to F$ soit essentiel (a)), il faut que f transforme points essentiels en points essentiels, et cette condition est également suffisante lorsque E admet suffisamment de points essentiels (i.e. si la famille de ces points est conservative .) (cf. d)).

c) Pour qu'un point p du topos E soit essentiel, il faut et il suffit que le foncteur fibre associé soit représentable par un objet X de E. Pour que le foncteur covariant $\varphi : E \to (\mathrm{Ens})$ représenté par un objet donné X de E soit un foncteur fibre (i.e. définisse un point, nécessairement essentiel, de E), il faut et il suffit que X soit connexe non vide (4.3.5), et projectif (i.e. que le foncteur φ transforme épimorphismes en épimorphismes). (Hint : montrer d'abord que pour que φ commute aux sommes, il faut et il suffit que X soit connexe non vide, puis utiliser le critère 4.9.4.) En conclure une équivalence entre la catégorie Pointess(E) et la sous-catégorie pleine P de E formée des objets connexes non vides projectifs.

d) Montrer que la topologie de P induite par celle de E est la topologie chaotique. En conclure l'équivalence des conditions suivantes sur E (due à J.E ROOS [12 c), prop. 1]) : (i) La famille des points essentiels de E est conservative ; (ii) La sous-catégorie pleine P de E formée des objets connexes-non vides projectifs est génératrice ; (iii) E est équivalent à un topos de la forme $\hat{C}$, où C est une catégorie équivalente à une catégorie $\in \underline{U}$ (ou, si on préfère, $C \in \underline{U}$). (Utiliser c) et le fait que si P est génératrice, le foncteur naturel $E \to P^{\sim}$ est une équivalence de catégories.)

e) La catégorie des points essentiels d'un topos E est karoubienne (cf. (7.5 c)). Soit C une catégorie équivalente à une catégorie $\in \underline{U}$. Prouver que le foncteur pleinement fidèle canonique (4.6.2)

$$C \longrightarrow \underline{\mathrm{Point}}(\hat{C})$$

se factorise par un foncteur

$$C \longrightarrow \underline{\mathrm{Pointess}}(\hat{C}) \quad ,$$

qui fait de $\underline{\mathrm{Pointess}}(\hat{C})$ une *enveloppe de Karoubi* (7.5 b)) *de* C. En particulier, ce foncteur est une équivalence de catégories si et seulement si la catégorie C est karoubienne. (Hint : utilisant c), prouver que tout point isolé de $\hat{C}$ est isomorphe à un facteur direct d'un $X \in \mathrm{ob}\, C$.)

f) Soient C et C' deux catégories équivalentes à des catégories $\in \underline{U}$. Prouver que le foncteur pleinement fidèle canonique (4.6.2)

$$\underline{\mathrm{Hom}}(C,C') \longrightarrow \underline{\mathrm{Homtop}}(\hat{C},\hat{C}')$$

prend ses valeurs dans la sous-catégorie pleine $\underline{\mathrm{Homtopess}}(\hat{C},\hat{C}')$ des morphismes essentiels *de topos* (a)), et que le foncteur induit

$$\underline{\mathrm{Hom}}(C,C') \longrightarrow \underline{\mathrm{Homtopess}}(\hat{C},\hat{C}')$$

est une équivalence de catégories si et seulement si C est vide ou C' est karoubienne. (Utiliser g) ci-dessous.)

g) Soient C une catégorie équivalente à une catégorie $\in \underline{U}$, et E un topos. Définir une équivalence entre la catégorie $\underline{\mathrm{Homtopess}}(\hat{C},E)$ des morphismes essentiels de topos $\hat{C} \longrightarrow E$, et la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(C,\underline{\mathrm{Pointess}}(E))$.

(Utiliser b) et le fait que $\hat{C}$ a suffisamment de points essentiels).

h) Soit C une catégorie finie. Prouver que tout point de $\hat{C}$ est essentiel, et que <u>Point</u>$(\hat{C})$ est équivalente à une catégorie finie. (Noter que l'enveloppe de Karoubi de C est finie, et utilisant 6.8.6.1, se ramener à prouver que si C est une catégorie karoubienne finie, alors le foncteur canonique $C \longrightarrow \mathrm{Pro}(C)$ est une équivalence de catégories). Utilisant b), en conclure que <u>tout</u> morphisme de topos $\hat{C}' \longrightarrow \hat{C}$ est essentiel, et $\underline{\mathrm{Hom}}(C,C') \to \mathrm{Hom}(\hat{C},\hat{C}')$ est une équivalence si et seulement si C est vide ou C' karoubienne.

i) Soit X un espace topologique, $f : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow P$ le morphisme de topos déduit de l'application continue de X dans l'espace ponctuel. Montrer que f est essentiel si et seulement si l'espace X est <u>localement connexe</u>, i.e. satisfait la condition suivante : pour tout $x \in X$ et tout voisinage ouvert U de x , la composante connexe de x dans U est un voisinage de x , ou encore : pour tout ouvert U de X , les composantes connexes de U sont ouvertes. (cf. 8.7 b) pour généralisation).

<u>Exercice</u> 7.7. (<u>Points inhabituels d'un topos classifiant</u> (*).

a) Soit G un monoïde. Pour que G contienne un élément g tel que $g \neq e$, $g^2 = g$, il faut et il suffit que le topos classifiant B_G admette un point essentiel qui n'est pas isomorphe au point banal (correspondant au foncteur fibre "oubli des opérations de G"). (Utiliser 7.6 e)).

b) Soit G le monoïde additif des entiers ≥ 0 . Montrer que tout point essentiel du topos classifiant B_G est isomorphe au point banal. Construire un point de B_G qui n'est pas isomorphe au point banal. Montrer que la catégorie <u>Point</u>(B_G) n'est pas équivalente à une catégorie $\in \underline{U}$.

<u>Exercice</u> 7.8. (<u>Topologie sur</u> Point(E), <u>et topos associés aux ensembles ordonnés</u>).

a) Soit E un topos. Désignons par Point'E) l'ensemble des classes, à isomorphisme près, de points de E . Pour tout ouvert U de E , soit U'

(*) cf. aussi 7.2.6 d).

l'ensemble des classes de points p de E tels que $U_p \neq \emptyset$. Montrer que $U \mapsto U'$ est une application croissante de l'ensemble ordonné Ouv(E) des ouverts de E dans l'ensemble des parties de X= Point(E), et que cette application commute aux Inf finis aux Sup quelconques. En conclure que l'ensemble des parties de X de la forme U' définit sur X une topologie (dite topologie canonique sur l'ensemble des classes de points du topos E). Montrer que si E a suffisamment de points, l'application $U \mapsto U'$ est un isomorphisme de l'ensemble ordonné Ouv(E) avec l'ensemble ordonné Ouv(X).

b) Soit $\sigma \in \underline{U}$ un ensemble ordonné admettant des Inf finis et des Sup quelconques, qui définit donc une catégorie cat(σ) ayant des produits finis et des sommes quelconques. Nous dirons qu'une famille de morphismes $U_i \longrightarrow U$ de même but U est couvrante si U est le Sup des U_i . Supposant que dans cat(σ) les sommes sont universelles i.e. que dans σ les Sup quelconques commutent aux Inf, on définit ainsi sur cat(σ) une topologie qui en fait un site, d'où un topos cat(σ)$^{\sim}$, noté aussi simplement $\sigma^{\sim}$. Montrer que I est canoniquement isomorphe à Ouv($\sigma^{\sim}$).

Montrer que la catégorie Homtop(E,σ) est équivalente à la catégorie associée à l'ensemble ordonné des morphismes d'ensembles ordonnés $\sigma \longrightarrow$ Ouv(E) qui commutent aux Inf finis et aux Sup quelconques. (Utiliser le critère 4.9.4.) Si σ' est un ensemble ordonné satisfaisant aux mêmes conditions que σ, conclure que Homtop($\sigma^{\sim}$,$\sigma'^{\sim}$) est équivalente à la catégorie associée à l'ensemble ordonné de tous les morphismes d'ensembles ordonnés $\sigma \longrightarrow \sigma'$ qui commutent aux Inf finis et aux Sup quelconques.

c) Montrer que pour que le topos E soit équivalent à un topos de la forme $O^{\sim}$, avec O comme dans b), il faut et il suffit que la famille des ouverts de E soit génératrice dans E. Pour qu'il soit équivalent à un Top(X) pour $X \in \underline{U}$, il faut et il suffit qu'il satisfasse à la condition précédente et qu'il ait suffisamment de points. Supposant réalisée la première condition, exprimer la seconde en termes de la structure de l'ensemble ordonné $\mathcal{O} = \mathrm{Ouv}(E)$, en utilisant la dernière assertion de b).

d) Définir un morphisme de topos canonique

$$E \longrightarrow \mathrm{Ouv}(E)^{\sim} \qquad ,$$

qui soit universel (à équivalence près) pour les morphismes de E dans des topos engendrés par leurs ouverts (cf. c)).

e) Soit X' un petit sous-ensemble de X=Point(E), qu'on munit de la topologie induit par celle de X. Définir un morphisme canonique de topos

$$\mathrm{Ouv}(E)^{\sim} \longrightarrow \mathrm{Top}(X') \qquad ,$$

qui est une équivalence lorsque la famille X' de points de E est conservative. En conclure alors un morphisme canonique de topos

$$E \longrightarrow \mathrm{Top}(X') \qquad .$$

Donner une caractérisation universelle (à équivalence près) de ce morphisme de topos pour les morphismes du topos E dans des topos de la forme Top(Y). (Noter à ce propos qu'à équivalence près, Top(X') ne dépend pas de la petite famille conservative de foncteurs fibres choisie, ou ce qui revient au même (4.2), que X'_{sob} ne dépend pas à homéomorphisme près du choix d'une telle famille).

f) Supposons que la catégorie Point(E) ne soit pas équivalente à une petite catégorie (cf. 7.3), et que E admette une petite famille conservative de foncteurs fibres. Montrer que si une telle famille est prise assez grande, la partie X' de Point(E) qu'elle définit n'est pas un espace topologique sobre pour la topologie induite.

g) Pour les relations avec l'exercice 7.6, cf. 8.

8. Localisation. Ouverts d'un topos

8.1 Soit C une catégorie, et T(X) une relation faisant intervenir un objet X de C . On dit que la relation T(X) est stable par changement de base (en X), si pour tout morphisme $X' \longrightarrow X$ de C , la relation T(X) implique T(X') . Il revient au même de dire que la sous-catégorie pleine R de C , formée des objets X de C tels qu'on ait T(X) , est un crible (I 4.1).

Remarque 8.1.1. Supposons que C soit une U-catégorie (I 1.1), de sorte que C peut être identifié à une sous-catégorie pleine de $\hat{C}$ (I 1.4). Il est parfois commode d'étendre la définition de la relation T dans ob C en une relation $\hat{T}$ portant sur un objet F de $\hat{C}$, en désignant par $\hat{T}(F)$ la relation : pour toute flèche $X \longrightarrow F$ dans $\hat{C}$, avec $X \in \mathrm{ob}\, C$, on a T(X). La relation $\hat{T}(F)$ est évidemment encore stable par changement de base en F . Désignant encore par R le sous-objet de l'objet final e de $\hat{C}$ défini par le crible R de C (I 4.2.1), la relation $\hat{T}(F)$ peut aussi s'exprimer par $\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(F,R) \neq \emptyset$, i.e. elle signifie que l'unique morphisme $F \longrightarrow e$ se factorise par le sous-objet R de e .

8.2. Supposons maintenant que C soit un site. Une relation T(X) en un argument $X \in \mathrm{ob}\, C$ est dite stable par descente si pour toute famille couvrante $(X_i : X_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ d'un objet X de C, la relation "$T(X_i)$ pour tout $i\in I$ " implique la relation T(X). On dit que T est une relation de nature locale si elle est stable par changement de base (8.1) et stable par descente. Lorsque C est une $\underline{U}$-catégorie, et que T est déjà supposée stable par changement de base, i.e. qu'elle est définissable par un crible R de C, qu'on identifiera à un sous-préfaisceau du préfaisceau final sur C, on voit aussitôt que C est de nature locale si et seulement si R est un faisceau. Ainsi, les relations de nature locale en un argument $X \in$ ob C correspondent exactement aux sous-faisceaux du faisceau final de C, i.e. aux sous-objets de l'objet final du topos $C^{\sim}$. Elles ne dépendent donc essentiellement que du topos $C^{\sim}$ défini par le site C (comme toutes les notions importantes associées à un site !). En termes du sous-faisceau R du faisceau final, la relation T(X) s'exprime comme $\mathrm{Hom}(\varepsilon(X),R) \neq \emptyset$. Elle se prolonge canoniquement en la relation $T^{\sim}(F)$: $\mathrm{Hom}(F,R) \neq \emptyset$ sur le topos $C^{\sim}$.

Remarque 8.2.1. Avec la notation introduite dans 8.1.1, pour un préfaisceau F sur C, comme $\mathrm{Hom}(F,R) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{a}(F),R)$, la relation $\hat{T}(F)$ équivaut à la relation $\tilde{T}(\underline{a}(F))$.

Définition 8.3. On appelle ouvert d'un $\underline{U}$-topos E tout sous-objet de l'objet final e_E de E ; si X est un objet de E, on appelle parfois ouvert de X tout ouvert du topos induit $E_{/X}$, i.e. tout sous-objet de X.

On appelle ouvert d'un $\underline{U}$-site C un ouvert du $\underline{U}$-topos associé $C^{\sim}$.

On notera que, les objets finaux de E étant canoniquement isomorphes, l'ambiguité introduite dans 8.3 par le choix de e_E est inoffensive ;

on peut aussi, de façon plus intrinsèque mais moins maniable du point de vue pratique, définir les ouverts de E comme étant les sous-catégories pleines R de E qui sont telles que la relation $F \in \text{ob } R$ pour un objet F de E soit une relation de nature locale. De même, les ouverts d'un U-site C correspondent biunivoquement aux sous-catégories pleines de C telles que la relation $F \in \text{ob } R$ pour un objet de C soit de nature locale ; cette notion est donc essentiellement indépendante de l'univers choisi U. Enfin, en vertu de ce qui a été dit dans 8.2, une relation de nature locale sur un topos (ou sur un site) est essentiellement la même chose qu'un ouvert dudit topos (ou du site).

8.4. Exemples d'ouverts.

8.4.1. Soit X un espace topologique, et interprétons Top(X) (2.1) comme la catégorie des espaces étales sur X. Comme il est clair que les monomorphismes dans Top(X) sont les applications injectives, il s'ensuit que les ouverts du topos T(X) s'identifient aux ouverts de l'espace X. Plus généralement, les ouverts d'un topos Top(X,G) (2.4) s'identifient aux ouverts de X invariants par l'action de G.

8.4.2. Les ouverts d'un U-topos E forment un ensemble U-petit (I 7.4) ordonné par l'inclusion, admettant des sup quelconques et des inf finis. Il admet l'objet initial (ou "objet vide") $\emptyset_E$ comme plus petit élément, et l'objet final e_E de E comme plus grand élément. Ces deux éléments ne sont identiques que si E est un "topos vide" (2.2).

8.4.3. Soit G un Monoïde dans E, d'où un topos B_G (2.4), catégorie des objets de E sur lesquels G opère à gauche. L'objet final e_G de B_G est l'objet final e_E de E avec opération triviale de G. On voit par suite que l'ensemble ordonné des ouverts de B_G est canoniquement isomorphe à la catégorie des ouverts de E. En particulier, si E est le topos ponctuel donc G est un monoïde ordinaire, l'ensemble des ouverts de B_G est exactement formé de deux éléments, savoir $\emptyset_{B_G}$ et e_G .

8.4.4. Si E est un topos de la forme $\hat{C}$, où C est une $\underline{U}$-catégorie, alors (8.1) l'ensemble ordonné des ouverts de E est isomorphe à l'ensemble ordonné des cribles de C.

8.4.5. Soit X un espace topologique sobre non discret. Montrer que TOP(X) (2.5) a des ouverts qui ne proviennent pas d'ouverts de X, i.e. d'ouverts de Top(X), par image inverse à l'aide du morphisme canonique (4.10.1) $TOP(X) \longrightarrow Top(X)$.

8.5. Exemples de relations de nature locale

Pour tout objet X du topos E , on désigne par $F \longrightarrow F_X$ le foncteur de localisation $j_X^* : E \to E_{/X}$, $Y \mapsto Y{\times}X$ (5.2).

8.5.1. Soit $u: F \longrightarrow G$ un morphisme de E. La relation en l'argument $X \in \mathrm{ob}\, E$,

$u_X: F_X \longrightarrow G_X$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme)

est une relation de nature locale. En particulier, si G est un Groupe de E, la relation " G_X est le groupe unité sur X " est de nature locale ; l'ouvert de E qui lui correspond est appelé le cosupport du Groupe G.

8.5.2. Soient u, v: $F \rightrightarrows G$ deux morphismes de E. La relation en l'argument $X \in \mathrm{ob}\, E$

$$u_X = v_X \quad : \quad F_X \longrightarrow G_X$$

est une relation de nature locale. En particulier, si G est un Groupe de E, et u une <u>section</u> de G (4.3.6), la relation en X

la section u_X du Groupe G_X de $E_{/X}$ est nulle

est de nature locale ; l'ouvert de E qui lui correspond est appelé le <u>cosupport de la section u du Groupe</u> G.

<u>Remarque</u> 8.5.3. Lorsque E=Top(X), le cosupport d'un faisceau en groupes G, resp. d'une section d'un tel faisceau G, n'est autre que l'ouvert de X complémentaire du <u>support de</u> G resp. du <u>support de</u> u dans la terminologie classique [TF].

8.5.4. Soit P(f) une relation en l'argument $f \in \mathrm{f}\ell\, C$, C un site. Lorsque dans C les produits fibrés sont représentables, on dit que la relation P(f) est <u>stable par changement de base</u> (resp. <u>stable par descente</u>), resp. <u>de nature locale</u>) <u>sur le but</u> (ou <u>sur la base</u>, ou "<u>en bas</u>") , si pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de C , la relation en l'argument $Y' \in \mathrm{ob}\, C_{/Y}$:

"le morphisme $f' : X' = X\times_Y Y' \longrightarrow Y'$ déduit de f par changement de base par le morphisme structural $Y' \longrightarrow Y$ satisfait P(f') "

est stable par changement de base, resp. stable par descente, resp. est de nature locale. Lorsque la topologie de E est définie à l'aide d'une prétopologie, on dit que la relation P(f) est <u>de nature locale sur la source</u> (ou "<u>en haut</u>") si pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de C et toute famille

$(g_i : X_i \longrightarrow X)_{i \in I}$ de Cov(X), la relation P(f) équivaut à la relation " $P(fg_i)$ pour tout $i \in I$ ". Lorsque Cov(X) est formée de toutes les familles couvrantes de C, cette condition signifie donc aussi que la relation en l'objet X' du site induit $C_{/X}$

P(fg), où $g : X' \longrightarrow X$ est le morphisme structural

est de nature locale. Noter que si la relation P(f) est de nature locale en haut, elle est a fortiori de nature locale en bas.

8.5.5 Prenons par exemple C=(Sch), catégorie des schémas $\in \underline{U}$, avec la topologie fidèlement plate quasi-compacte (SGA 3 IV 6.3) ou une topologie moins fine. Alors chacune des propriétés suivantes d'un morphisme est de nature locale en bas :

surjectif, radiciel, universellement ouvert, universellement finie, propre, quasi-compact, quasi-compact et dominant, homéomorphisme universel, séparé, quasi-séparé, localement de type fini, localement de présentation finie, de type fini, de présentation finie, un isomorphisme, un monomorphisme, une immersion ouverte, une immersion fermée, une immersion quasi-compacte, affine, quasi-affine, fini, quasi-fini, entier, plat, fidèlement plat, net, lisse, étale

(EGA IV 2.6.4, 2.7.1 et EGA IV 17.7.1). D'autre part, munissons (Sch) de la prétopologie pour laquelle, pour tout schéma $X \in \underline{U}$, Cov(X) est formé des familles de morphismes $(f_i : X_i \longrightarrow X)_{i \in I}$ qui sont surjectives et telles que les f_i soient plats et localement de présentation finie. Alors chacune des propriétés suivantes est <u>de nature locale en haut</u> :

localement de type fini, localement de présentation finie, de type fini, plat, net, lesse, étale.

(EGA IV 17.7.5, 17.7.7).

Exercice 8.6. Soit $f: E \to F$ un morphisme de $\underline{U}$-topos. Considérons la relation en l'argument $X \in \mathrm{ob}\, F$: le morphisme induit $E_{/f^*(X)} \to F_{/X}$ est une équivalence de topos. Prouver que cette relation est de nature locale.

Exercice 8.7. (Partitions d'un topos, somme de topos). Soit E un $\underline{U}$-topos. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E, i.e. de sous-objets de l'objet final e de E, est appelée une partition de e (ou encore, du topos E) si le morphisme canonique $\coprod_{i\in I} e_i \to e$ est un isomorphisme, i.e. (II 4.6 2)) si e est le sup des e_i et si $i\neq j$ implique $e_i \cap e_j = \emptyset_E$.

a) Montrer que pour que la famille $(e_i)_{i\in I}$ d'objets de E soit une partition de E, il faut et il suffit que le foncteur

(8.7.1) $$E \longrightarrow \prod_i E_{/e_i}$$

défini par les foncteurs de localisation $E \to E_{/e_i}$ soit une équivalence de catégories.

b) Soit réciproquement $(E_i)_{i\in I}$ une famille de $\underline{U}$-topos, avec $I\in\underline{U}$. Prouver que $E = \prod_{i\in I} E_i$ est un $\underline{U}$-topos (qui sera appelé le topos somme de la famille des topos $(E_i)_{i\in I}$). Définir une partition $(e_i)_{i\in I}$ de E et des équivalences de catégories $E_{/e_i} \approx E_i$, de telle façon que les foncteurs de projection $E \to E_i$ s'identifient aux foncteurs de localisation $E \to E_{/e_i}$.

c) Soit E le topos somme de la famille des topos $(E_i)_{i\in I}$. Montrer que pour tout $i\in I$ le foncteur projection $E \to E_i$ est de la forme u_i^* , où

(8.7.2) $$u_i : E_i \longrightarrow E$$

est un morphisme de topos. Prouver que pour tout $\underline{U}$-topos F, le foncteur $v \longmapsto (v \circ u_i)_{i \in I}$

(8.7.3) $$\underline{\mathrm{Homtop}}(E,F) \longrightarrow \prod_i \underline{\mathrm{Homtop}}(E_i,F)$$

est une équivalence de catégories.

d) Soit $(e_i)_{i \in I}$ une partition du topos E. Pour tout morphisme de topos $g : F \longrightarrow E$, la famille $(f_i)_{i \in I}$, avec $f_i = g^*(e_i)$, est une partition de F, et les morphismes induits $g_i : E_{/e_i} \longrightarrow F_{/f_i}$ permettent de réconstituer g (à isomorphisme unique près), le foncteur g^* s'identifiant au produit cartésien des foncteurs g_i^* (compte tenu des équivalences du type (8.7.1)). En conclure une description complète de la catégorie $\underline{\mathrm{Homtop}}(F,E)$, en termes des catégories de la forme $\underline{\mathrm{Homtop}}(F',E_i)$, où F' est un topos de la forme $F_{/f}$ (f sommande directe de l'objet final de F) et $E_i = E_{/e_i}$.

e) En particulier, si F est connexe non vide (cf. 4.3.5) i.e. si pour toute partition $(f_i)_{i \in I}$ de F il existe un $i \in I$ et un seul tel que $f_i \neq \emptyset_F$, prouver que le foncteur canonique

(8.7.4) $$\coprod_{i \in I} \underline{\mathrm{Homtop}}(F,E_i) \longrightarrow \underline{\mathrm{Homtop}}(E)$$

déduit des morphismes de topos (8.7.2) est une équivalence de catégories. Plus particulièrement, la famille des morphismes de topos (8.7.2) induit une équivalence de catégories

$$\coprod_{i \in I} \underline{\mathrm{Point}}(E_i) \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Point}}(E) \quad .$$

f) Une partie I de l'ensemble des ouverts de E est appelée une <u>partition réduite</u> de E si la famille identique $(e_i)_{i\in I}$ indexée par I est une partition, et si les e_i sont $\neq \emptyset_E$. Montrer que la relation de raffinement (I 4.3.2) entre partitions réduites fait de l'ensemble P des partitions réduites un ensemble ordonné $\underline{U}$-petit, tel que la borne supérieure de deux éléments de P existe. On trouve ainsi un système projectif strict $(I_p)_{p\in P}$, qui sera considéré comme un pro-ensemble et noté $\pi_o(E)$. On l'appelle le <u>pro-π_o du topos</u> E.

g) Prouver que $\pi_o(E)$ pro-représente le foncteur

$$T \mapsto f_* f^*(T) = \Gamma(E, T_E) \; : \; (\underline{U}\text{-Ens}) \longrightarrow (\underline{U}\text{-Ens})$$

associé au morphisme canonique f: E $\longrightarrow$ P de E dans le topos ponctuel P (4.3). En particulier, pour que ce foncteur soit représentable, il faut et il suffit que $\pi_o(E)$ soit essentiellement constant, i.e. isomorphe (en tant que pro-ensemble) à un ensemble "ordinaire", qui sera noté encore $\pi_o(E)$. Pour que $\pi_o(E)$ soit réduit à un point, il faut et il suffit que E soit "connexe non vide". Pour que $\pi_o(E)$ soit vide, il faut et il suffit que E soit le "topos vide" (2.2).

h) Supposons E quasi-compact, i.e. que tout recouvrement de son objet final e admette un sous-recouvrement fini. Montrer qu'alors $\pi_o(E)$ est un ensemble profini, et peut s'identifier par suite (moyennant l'équivalence de catégories bien connue entre pro-objets de la catégorie des ensembles finis, et espaces compacts totalement discontinus) à un espace compact totalement discontinu, qu'on notera également $\pi_o(E)$.

i) Soit X un espace topologique, $\pi_o(X)$ l'ensemble des composantes connexes de X, considéré comme un pro-ensemble constant. Définir un morphisme canonique de pro-ensembles

(8.7.5) $$\pi_o(X) \longrightarrow \pi_o(\mathrm{Top}(X)) \quad ,$$

ou ce qui revient au même, une application canonique

(8.7.6) $$\pi_o(X) \longrightarrow \varprojlim \pi_o(\mathrm{Top}(X)) \quad .$$

Montrer que le premier morphisme est un isomorphisme si et seulement si X est homéomorphe à un espace somme d'espaces connexes (ce qui est le cas en particulier si X est localement connexe).

j) Supposons que X soit un schéma quasi-compact. Prouver qu'alors (8.7.6) est bijectif.

k) Etablir le "caractère fonctoriel" en X des morphismes (8.7.5) et (8.7.6), en précisant pour commencer le sens de cette expression.

l) (Comparer 7.6 i)). Montrer que les deux conditions suivantes sur le $\underline{U}$-topos E sont équivalentes : (i) Le morphisme canonique de E dans le topos ponctuel est "essentiel" (exercice 7.6 a)) i.e. le foncteur $I \longmapsto I_E$ de ($\underline{U}$-Ens) dans E commute aux produits indexés par des ensembles $\in \underline{U}$. (ii) Pour tout objet X de E, le topos induit $E_{/X}$ a un $\pi_o(E_{/X})$ qui est un ensemble ordinaire, i.e. X est isomorphe à la somme d'une famille d'objets connexes de E. - On dit alors que E est un <u>topos localement connexe</u> (comparer 2.7.5).

<u>Exercice</u> 8.8. (<u>Morphismes dominants de topos</u>). a) Soit $f: E' \longrightarrow E$ un morphisme de topos. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(i) $f_*(\emptyset_{E'}) = \emptyset_E$ (où $\emptyset_E, \emptyset_{E'}$ désignent les objets initiaux de E,E').

(ii) Pour tout objet X de E qui est "non vide" i.e. non isomorphe à $\emptyset_E$, $f^*(X)$ est un objet non vide de E'.

(ii') Comme (ii), avec X un sous-objet de l'objet final e_E de E, i.e. X un ouvert du topos E.

On dit alors que le morphisme f de topos est <u>dominant</u>.

b) Soit $f: X' \longrightarrow X$ une application continue d'espaces topologiques, d'où un morphisme de topos $Top(f) : Top(X') \rightarrow Top(X)$ (4.1). Montrer que Top(f) est dominant si et seulement si f est dominant, i.e. f(X') est dense dans X.

c) Montrer que si $f: E' \longrightarrow E$ est un morphisme "conservatif" de topos (6.4.0), i.e. tel que f^* soit fidèle, alors f est dominant. Montrer que la réciproque n'est pas nécessairement vraie, même pour un morphisme de localisation $E_{/U} \longrightarrow E$, où U est un ouvert du topos E,((Montrer que dans ce cas f n'est conservatif que si U est l'objet final de E (donc si f est une équivalence de topos), et utiliser l'exemple b).)

d) Soit $f: X' \longrightarrow X$ une flèche dans un topos E. On dit que f est un <u>morphisme dominant</u> dans le topos E si le morphisme correspondant des topos induits $E_{/X'} \longrightarrow E_{/X}$ (5.5.2) est dominant. Montrer que cette propriété ne dépend que de l'image f(X') de X' dans X, en tant qu'élément de l'ensemble ordonné ouv(X) des sous-objets de X. Montrer que le morphisme $E_{/X'} \longrightarrow E_{/X}$ est conservatif si et seulement si f est couvrant.

9. Sous-topos et recollement de topos

9.1. Sous-topos et plongement de topos

Définition 9.1.1.

a) Un morphisme de topos $f : F \longrightarrow E$ est appelé un plongement si le foncteur $f_*: F \to E$ est pleinement fidèle (i.e. si le morphisme d'adjonction $f^* f_* \to \mathrm{id}_F$ est un isomorphisme).

b) On appelle sous-topos d'un topos E une sous-catégorie strictement pleine E' de E qui est un topos et tel que le foncteur d'inclusion $\alpha : E' \to E$ soit de la forme i_*, où $i : E' \to E$ est un morphisme de topos (i.e. (3.1.1.) α admet un adjoint à gauche i^* qui est exact à gauche). Le morphisme i (qui est déterminé à isomorphisme unique près) est alors appelé le morphisme d'inclusion du sous-topos E' dans E.

Remarque 9.1.2.

a) Il est clair que le morphisme d'inclusion d'un sous-topos est un plongement, et qu'une sous-catégorie E' du topos E est un sous-topos si et seulement si c'est l'image essentielle d'un foncteur image directe f_* associé à un morphisme de topos $g : F \to E$ qui est un plongement.

b) Il résulte aussitôt des définitions qu'un morphisme de topos $f : F \to E$ est un plongement si et seulement s'il est isomorphe à un morphisme composé

$$F \xrightarrow{g} E' \xrightarrow{i} E ,$$

où g est une équivalence de topos et i le morphisme d'inclusion d'un sous-topos E' de E. Ce dernier est déterminé de façon unique par les conditions précédentes, comme l'image essentielle de f_*, et la factorisation précédente est également unique à isomorphisme unique près. Bien entendu, il y a lieu en pratique d'identifier, au moyen de g, F au sous-topos E' de E (comparer IV 3.4.1.).

c) Une équivalence de topos (3.4.) $u : E \overset{\approx}{\rightarrow} E_1$ définit de façon évidente une bijection entre l'ensemble des sous-topos de E et l'ensemble des sous-topos de E_1. En effet, u_* étant une équivalence de catégories, établit une bijection entre l'ensemble des sous-catégories strictement pleines de E et l'ensemble des sous-catégories strictement pleines de E_1 (à $E' \subset E$ correspondant l'image essentielle E'_1 de $u_* | E'$), et on constate aussitôt que E' est un sous-topos de E si et seulement si E'_1 est un sous-topos de E_1 . On peut donc, pour l'étude des sous-topos, se ramener au cas où E est de la forme $\tilde{C}$, où C est un petit site. Dans ce cas, il résulte de II 5.5 qu'une sous-catégorie strictement pleine E' de E est un sous-topos si et seulement si le foncteur d'inclusion $\alpha : E' \to E$ admet un adjoint à gauche qui est exact à gauche (cela implique donc déjà que E' est un topos), et que l'ensemble de ces sous-topos est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des topologies T' sur C qui sont plus fines que la topologie donnée T de C, en associant à toute telle T' la sous-catégorie strictement pleine $(C, T')^\sim$ de $C^\sim$, formée des faisceaux pour la topologie T' . Ceci montre en même temps, pour <u>tout</u> $\mathcal{U}$-topos E : une sous-catégorie strictement pleine E' de E est un sous-topos si et seulement si le foncteur d'inclusion $\alpha : E' \to E$ admet un adjoint à gauche qui est exact à gauche ; <u>l'ensemble ordonné</u> $\mathcal{C}(E)$ <u>des sous-topos de</u> E <u>est</u> $\mathcal{U}$-<u>petit</u>, <u>et toute partie de</u> $\mathcal{C}(E)$ <u>admet une borne supérieure et une borne inférieure</u>.

d) Si E' et E'' sont deux sous-topos du topos E , leur intersection est un sous-topos de E . En effet, comme cette intersection est strictement pleine, on est ramené au cas où E est de la forme $C^\sim$. Avec les notations de b), E' et E'' correspondent alors à deux topologies T' , T'' sur C plus fines que T , et il suffit de voir qu'alors $E' \cap E''$ <u>est la catégorie des faisceaux pour la topologie</u> T''' <u>borne supérieure de</u> T' <u>et de</u> T'' . Indiquons la démonstration de ce fait (qui aurait dû figurer en corollaire après II 4.4 ou II 5.5 !). Soit E''' la catégorie des faisceaux pour T''' , évidemment contenue dans E' et E'' donc dans $E' \cap E''$. Soit, pour toute sous-catégorie pleine D de E, $t(D)$ la topologie la plus fine parmi celles pour lesquelles les éléments de D sont des faisceaux (II 2.2). Les inclusions $E''' \subset E' \cap E'' \subset E'$, E'' impliquent évidemment $t(E'), t(E'') \leqslant t(E' \cap E'') \leqslant t(E''')$, d'autre part on a (II 4.4.1) $t(E') = T'$, $t(E'') = T''$, $t(E''') = T'''$, de sorte que les inégalités précédentes et la définition de T''' comme borne supérieure impliquent que $T''' = t(E' \cap E'')$, donc $E' \cap E'' \subset E'''$, cqfd. Plus généralement, cet argument montre que si T' est une topologie borne supérieure d'une famille quelconque de topologies (T_i), la catégorie E' des faisceaux pour T' est l'intersection des catégories E_i de faisceaux pour les T_i . On en conclut en particulier :

Proposition 9.1.3. Soit E un topos. Alors pour toute famille de sous-topos $(E_i)_{i \in I}$ de E , l'intersection $\bigcap_{i \in I} E_i$ est un sous-topos de E .

Proposition 9.1.4. *Soient* $i : E' \to E$ *un plongement de topos, et* F *un topos. Le foncteur*

(9.1.4.1.) $\quad f \longmapsto i \circ f : \underline{\mathrm{Homtop}}(F,E') \longrightarrow \underline{\mathrm{Homtop}}(F,E)$

est pleinement fidèle, et son image essentielle est formée des morphismes de topos $g : F \to E$ *tels que l'image essentielle de* g_* *soit contenue dans celle de* i_* .

Considérons en effet le diagramme commutatif évident

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Homtop}}(F,E') \arrow[r] \arrow[d, hook] & \underline{\mathrm{Homtop}}(F,E) \arrow[d, hook] \\
\underline{\mathrm{Hom}}(F,E') \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}(F,E) ,
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les foncteurs $h \mapsto h_*$, qui sont pleinement fidèles par définition de $\underline{\mathrm{Homtop}}$ (IV 3.2.). D'autre part la deuxième flèche horizontale $G \longmapsto i_* G$ est pleinement fidèle, puisque i_* l'est, donc il en est de même de la première flèche horizontale. Reste à prouver la caractérisation de l'image essentielle de (9.1.4.1.). La nécessité de la condition étant évidente par la formule $(if)_* = i_* f_*$, il reste à prouver que si l'image essentielle de g_* est contenue dans celle de i_* , i.e. si on peut écrire $g_* = f_* i_*$, avec $f_* : F \to E'$ un foncteur, alors g est dans l'image essentielle de (9.1.4.1.). Il revient au même de dire que f_* admet un adjoint à gauche qui est exact à droite.

Or il est clair que f_* admet $g^* i_*$ comme adjoint à gauche, et ce foncteur est exact à gauche, comme composé des foncteurs exacts à gauche g^* et i_*, cqfd.

Pour une réciproque de 9.1.4., cf. exercice 9.1.6.

Prenant pour F le topos ponctuel (IV 2.2), on déduit en particulier de 9.1.5. :

Corollaire 9.1.5. *Si $f : E' \longrightarrow E$ est un morphisme de plongement de topos, le foncteur correspondant*

(9.1.5.1.) $$\mathrm{Point}\,(f) : \underline{\mathrm{Point}}\,(E') \longrightarrow \underline{\mathrm{Point}}\,(E)$$

est pleinement fidèle.

Exercice 9.1.6. (*Plongements de topos et 2-monomorphismes*).

Soit $i : E' \longrightarrow E$ un morphisme de topos.

a) Si F et G sont deux topos *au-dessus de* E', définir (avec les notations de 5.14 a)) un foncteur canonique

(9.1.6.1.) $$f \longmapsto f * i : \underline{\mathrm{Homtop}}_{E'}(F, G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Homtop}}_{E}(F, G) .$$

b) Supposons que i, en tant que 1-flèche de la 2-catégorie des $\underline{V}$-$\underline{U}$-topos (3.3.2.), soit un 2-monomorphisme, i.e. tel que pour tout $\underline{U}$-topos F qui soit élément de $\underline{V}$, le foncteur (9.1.4.1.) soit pleinement fidèle. Montrer que pour tout couple de $\underline{U}$-topos F, G (pas nécessairement $\in \underline{V}$) le foncteur (9.1.6.1.) est pleinement fidèle.

c) Montrer que i est un plongement si et seulement si i est un 2-monomorphisme. (Pour la suffisance, appliquer b) à des topos induits $E'_{/X'}$ et $E'_{/Y'}$, et utiliser 5.14. c)).

d) Soit $g : F \longrightarrow E$ un morphisme de topos, et supposons que le 2-produit fibré (5.11) $F' = F \overset{2}{\times}_E E'$ existe (condition toujours vérifiée, comme l'a montré P. DELIGNE). Soit $j : F' \longrightarrow F$ le morphisme de projection. Prouver que si i est un plongement, il en est de même de j. (Utiliser c), et noter que la stabilité de la notion de 2-monomorphisme par 2-changement de base est formelle). Dans le cas où E' est un sous-topos de E et $i : E' \longrightarrow E$ est le morphisme canonique d'inclusion, l'image essentielle de F' par j_* (qui est un sous-topos de F qui ne dépend pas de l'indétermination dans la construction d'un produit 2-fibré) s'appelle le <u>sous-topos de</u> F <u>image inverse par</u> $g : F \longrightarrow E$ <u>du sous-topos</u> E' <u>de</u> E .

e) Avec les notations de la fin de d), choisissons comme produit 2-fibré le sous-topos de F image inverse du sous-topos E' de E . Soit X un objet de F . Montrer que pour que X appartienne à F' , il faut qu'il satisfasse la condition suivante : pour tout objet U de F , désignant par $g_U : F_{/U} \longrightarrow E$ le morphisme de topos induit par f, on a $g_{U*}(X|U) \in \mathrm{Ob}\, E'$, où $X|U = (X \times U \xrightarrow{pr_2} U)$ est la "restriction de X à U ". (NB : On peut noter que si $i_U : F_{/U} \longrightarrow F$ est l'inclusion canonique, on a $g_U = g \circ i_U$, d'où $g_{U*}(X|U) = g_*(i_{U*}(X|U)) = g_*(\underline{Hom}(U,X))$ où $\underline{Hom}(U,X)$ est l'objet défini dans 10.1 plus bas).

<u>Problème</u> Réciproquement, la condition précédente sur X est-elle suffisante pour que X appartienne à F' ? Il revient au même de demander si la sous-catégorie strictement pleine de F formée par ces objets X est un <u>sous-topos</u> de F

f) Soient X un objet de E , $X' = i^*(X)$, et $i_{/X} : E'_{/X'} \longrightarrow E_{/X}$ le morphisme de topos induit par i (5.10.1). Montrer que si i est un plongement, il en est de même de $i_{/X}$. (Utiliser d) et 5.11). Réciproquement, si $(X_\alpha)_\alpha$ est une famille d'objets couvrant l'objet final, et si pour tout α , $i_{/X_\alpha}$ est un plongement, il en est de même de i .

<u>Exercice</u> 9.1.7. (<u>Sous-topos et ensembles multiplicatifs de flèches</u>).

a) Soient $i : E' \longrightarrow E$ un morphisme de topos, S l'ensemble des flèches u de E telles que $i^*(u)$ soit un isomorphisme, et considérons le foncteur canonique induit par i^* (cf. [2, Chap I] ou VI) :

(9.1.7.1.) $$\varphi : E\,[S^{-1}] \longrightarrow E' .$$

Montrer que i est un plongement si et seulement si le foncteur précédent φ est une équivalence de catégories, et dans ce cas S admet un calcul des fractions à gauche et un calcul des fractions à droite. (Utiliser [2, Chap I 1.3.]). Dans ce cas, l'image essentielle de i_* se retrouve à partir de S comme formée des $X \in \mathrm{Ob}\, E$ tels que pour tout $u : Y \longrightarrow Y'$ dans S $\mathrm{Hom}(u,X) : \mathrm{Hom}\,(Y',X) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(Y,X)$ soit bijective.

b) Nous supposons désormais que i est un plongement. Montrer que pour tout topos F, le foncteur

$$f^* \longmapsto f^*\, i^* : \underline{\mathrm{Hom}}\,(E',F) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}\,(E,F)$$

induit une équivalence entre la catégorie des f^* provenant de morphismes de topos $f : F \longrightarrow E'$ (i.e. exacts à gauche et admettant un adjoint à à droite) et la catégorie des foncteurs $g^* : E \longrightarrow F$ provenant de morphismes de topos $g : F \longrightarrow E$, et tels que g^* transforme objets de S en isomorphismes.

c) Soit S une partie de Fl E , où E est un $\underline{U}$-topos. Montrer que S est associé à un sous-topos E' de E par le procédé de a) si et seulement si S satisfait aux conditions suivantes :

ST 1) S contient les flèches inversibles, est stable par composition et par changement de base.

ST 2) Si un composé vu est dans S, alors $u \in S$ si et seulement si $v \in S$.

ST 3) Si $u : X \longrightarrow Y$ est tel qu'il existe une famille couvrante $Y_i \longrightarrow Y$, $i \in I$, tel que $u_i : X_i = X \times_Y Y_i \longrightarrow Y_i$ est dans S pour tout $i \in I$, alors $u \in S$. Montrer qu'on obtient ainsi une correspondance biunivoque entre l'ensemble des sous-topos E' de E , et l'ensemble des parties S de Fl E satisfaisant aux conditions ST 1), ST 2), ST 3). (S étant donné, lui associer une $\underline{U}$-topologie T' , plus fine que la topologie canonique T de E , dont les familles couvrantes $(X_i \longrightarrow X)_{i \in I}$ sont celles pour lesquelles l'inclusion $X' \hookrightarrow X$ de l'image des X_i est $\in S$. Montrer que la catégorie des faisceaux pour T' est équivalente à un sous-topos E' de E , et utiliser II 4.4. pour prouver que celui-ci redonne S.

d) Montrer que S est connu quand on connaît la partie S_0 de S formée des <u>monomorphismes</u>. Montrer que l'application $S \longmapsto S_0$ établit une bijection entre l'ensemble des parties S de Fl E satisfaisant les conditions ST 1) à ST 3) de c), et l'ensemble des parties de Fl E formées de monomorphismes et satisfaisant aux mêmes conditions ST 1) à ST 3).

e) Soit $(E_i^!)_{i\in I}$ une famille de sous-topos de E, et $(S_i)_{i\in I}$ la famille des parties correspondantes de Fl E . Montrer que $\bigcap_{i\in I} S_i$ satisfait aux conditions ST 1) à ST 3) de c), donc correspond à un sous-topos E' de E , et que ce dernier est le <u>sous-topos engendré par les</u> E_i , i.e. <u>la borne supérieure</u> (cf. 9.1.2. c)) des sous-topos $E_i^!$.

f) Soit A une partie de Fl E . Montrer qu'il existe une plus petite partie S de Fl E parmi celles contenant A et satisfaisant aux conditions ST 1) à ST 3), et que S correspond au plus grand sous-topos E' de E tel que la partie multiplicative de Fl E correspondante contienne S . Montrer que S est égale à la réunion des parties A_n $(n \geq 0)$ de FlE , construites par récurrence de la façon suivante : $A_0 = A$, A_{n+1} est formée des flèches $u : X \longrightarrow Y$ qui sont d'un des trois types suivants (i) à (iv) :

(i) u est inversible, ou le composé de deux flèches de A_n , ou déduit par changement de base d'une flèche de A_n .

(ii) u est l'un des facteurs d'une flèche composée dont l'autre facteur ainsi que le composé sont dans A_n .

(iii) u est une somme d'une petite famille de flèches $\in A_n$.

(iv) Il existe un épimorphisme $Y' \longrightarrow Y$, tel que $u' : X' = X\times_Y Y' \longrightarrow Y'$ déduit de u par changement de base soit dans A_n .

g) Avec les notations de e), soient A la réunion des S_i , S la partie de Fl E déduite de A par le procédé de f), et E' le sous-topos correspondant de E . Montrer que E' est l'intersection (= borne inférieure) des sous-topos $E_i^!$.

<u>Exercice</u> 9.1.7.2. (<u>Factorisation canonique d'un morphisme de topos</u>).

Soit
$$f : F \longrightarrow E$$
un morphisme de topos. Montrer qu'on peut trouver une factorisation de f, à isomorphisme près, en

(9.1.7.3.) $$F \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{i} E ,$$

où f' est <u>conservatif</u> (i.e. (6.4.0.) f'^* est conservatif, ou encore fidèle) et où i est un plongement, et que cette factorisation est unique à équivalence près (cf. 9.1.4.). Pour ceci, introduire l'ensemble $S_f \subset \mathrm{Fl}\ E$ des flèches u de E telles que $f^*(u)$ soit un isomorphisme, prouver que S_f satisfait aux conditions de 9.1.7. c), prendre pour E' le sous-topos correspondant de E, et définir f'^* par (9.1.7.1.), qui correspond à un morphisme de topos f' grâce à 9.1.7 b).

b) Le sous-topos de E défini par le plongement i est appelé le sous-topos de E image du morphisme de topos f. Montrer que c'est le plus petit des sous-topos E_1 de E tels que f se factorise, à isomorphisme près, à travers E_1, i.e. (9.1.4.) le plus petit des sous-topos de E contenant l'image de f_* (ou encore, l'image essentielle de f_*). Pour que f soit un plongement, il faut et il suffit que f induise une équivalence f' de E avec son image ; pour que f soit conservatif, il faut et il suffit que son image soit égale à E tout entier.

c) Supposons que $f = \mathrm{Top}(f_o)$ soit associé à une application continue d'espaces topologiques sobres $f_o : Y \longrightarrow X$

(4.1.) Considérons la factorisation canonique de f_o en

$$Y \xrightarrow{f'_o} X' = f_o(Y) \xrightarrow{i_o} X ,$$

où i_o est l'inclusion. Montrer que la factorisation canonique de f s'identifie alors à la factorisation correspondante

$$\mathrm{Top}(Y) \xrightarrow{\mathrm{Top}(f'_o)} \mathrm{Top}(X') \xhookrightarrow{\mathrm{Top}(i_o)} \mathrm{Top}(X) .$$

Soit Z le plus petit sous-espace sobre de X contenant $X' = f(Y)$, i.e. l'ensemble des points x de X tels que $\overline{\{x\}} \cap X'$ soit dense dans $\overline{\{x\}}$. (On notera que Z = X' si les points de X sont fermés, ou si X' est une partie constructible de X supposé localement noethérien). Alors f est conservatif, i.e. le sous-topos de E = Top(X) image de F = Top(Y) par $f = \mathrm{Top}(f_o)$ est égal à E lui-même, si et seulement si Z = X, i.e. si et seulement si f(Y) est très dense (EGA IV 10.13) dans X. Ceci précise dans quelle mesure il est licite de regarder la notion de morphisme conservatif de topos comme la généralisation naturelle de la notion d'application continue surjective d'espaces topologiques.

d) Soit

$$\begin{array}{ccc} Y & \longleftarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longleftarrow & X' \end{array}$$

un diagramme cartésien d'espaces topologiques. Si Y et X' sont des espaces discrets, donc Y' discret, alors le diagramme correspondant de topos est 2-cartésien (5.11). (NB. Pour un contre-exemple lorsque l'on ne suppose plus Y, X' discrets, Y, X' étant des sous-espaces de l'espace séparé X, cf. 9.1.10. c)). En déduire un exemple d'un diagramme 2-cartésien de topos

$$\begin{array}{ccc} F & \longleftarrow & F' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ E & \longleftarrow & E' \end{array}$$

tel que f soit conservatif, mais f' non conservatif, plus précisément E' = topos ponctuel, F' = topos vide (2.2). (Prendre Y tel que l'image de Y dans X soit très dense et $\neq$ X, et prendre X' réduit à un point qui n'est pas dans l'image).

e) Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-topos d'un topos E . Prouver que E est le sup des E_i si et seulement si la famille des morphismes de plongement $E_i \longrightarrow E$ est conservative (6.4.0).

<u>Exercice</u> 9.1.8. (<u>Sous-topos et points de</u> E . <u>Cas des espaces topologiques</u>).

Soit E un topos.

a) Soit Z une sous-catégorie pleine de <u>Point</u>(E) (ou ce qui revient au même : une partie de Ob <u>Point</u> (E)). Montrer que l'ensemble S(Z) des flèches de E qui sont transformées en bijections par les foncteurs fibre correspondants aux $z \in$ Ob Z satisfait aux conditions de 9.1.7. c), et définit donc un sous-topos E_Z de E . Montrer que celui-ci admet suffisamment de points, et que Z est équivalente à une sous-catégorie pleine de <u>Point</u>(E_Z) . Montrer qu'on peut obtenir par le procédé précédent tout sous-topos E' de E qui admet suffisamment de points. (Prendre pour Z l'image essentielle du foncteur (9.1.5.1.)). Montrer qu'on obtient une bijection entre l'ensemble des sous-topos E' de E admettant suffisamment de points, et un sous-ensemble de l'ensemble des sous-catégories strictement pleines Z de Point(E) qui sont stables par facteurs directs (I 10.) et par petites limites projectives filtrantes (cf. 7.3.). (Problème : Quelles sont les sous-catégories de Point(E) qu'on trouve ainsi ? C'est essentiellement, sous une autre forme, le problème déjà soulevé dans 6.5.3., compte-tenu du dictionnaire 9.1.2.c). Noter qu'en plus des conditions nécessaires signalées à l'instant, il y a aussi des conditions plus subtiles sur la nature topologique de Point(E), genre, sobriété, cf. e)).

b) Soit $(Z_i)_{i \in I}$ une famille de sous-catégories pleines de Point(E) , et soit Z la sous-catégorie pleine réunion des Z_i . Montrer que le sous-topos correspondant E_Z défini en a) est le sous-topos de E engendré par les E_{Z_i} . (Utiliser 9.1.7. e)). En conclure que le sous-topos de E engendré par une famille de sous-topos ayant suffisamment de points, a également suffisamment de points.

c) Soit $f: E' \longrightarrow E$ un plongement de topos. Montrer que l'application $U \longmapsto f^*(U)$

(9.1.8.1.) $$\mathrm{Ouv}(E) \longrightarrow \mathrm{Ouv}(E')$$

est surjective, et en conclure que l'application

(9.1.8.2.) $$\mathrm{Point}(E') \longrightarrow \mathrm{Point}(E)$$

induite par f sur les classes d'isomorphie de points induit un homéomorphisme de Point(E') sur un sous-espace de Point(E) , pour les topologies définies dans 7.8. a). (Pour l'injectivité, utiliser 9.1.5.).

d) Soit $f : X' \longrightarrow X$ une application continue, d'où un morphisme de topos (4.1.)

$$\mathrm{Top}(f) : \mathrm{Top}(X') \longrightarrow \mathrm{Top}(X) .$$

Prouver que ce dernier est un plongement si et seulement si la topologie de X' est image inverse par f de celle de X (i.e., lorsque X' est un espace de Kolmogoroff, par exemple un espace sobre, si et seulement si f induit un homéomorphisme de X' sur un sous-espace de X). (Pour la nécessité, utiliser c), pour la suffisance, 9.1.7.2. c)).

e) Soit X un espace topologique sobre, et $E = \mathrm{Top}(X)$. Utilisant a) et d), établir un isomorphisme d'ensembles ordonnés $X' \longmapsto E_{X'}$ entre l'ensemble des sous-espaces sobres X' de X (i.e., lorsque X est séparé, entre l'ensemble de toutes les parties de X et l'ensemble des sous-topos de E ayant suffisamment de points. Montrer que $E_{X'}$ est équivalent à $\mathrm{Top}(X')$. Si $(X_i')_{i \in I}$ est une famille de sous-espaces sobres de X , montrer qu'il existe un plus petit sous-espace sobre X' de X contenant les X_i' , égal à la réunion des X_i' si I est fini ou X est séparé, et que $E_{X'}$ est le sous-topos de E engendré par les $E_{X_i'}$. (Utiliser b)).

f) Donner un exemple d'un topos E de la forme $\mathrm{Top}(X)$, et d'un sous-topos E' qui n'a pas suffisamment de points, et même qui est non vide (2.2.) sans points. (Prendre E de la forme $\hat{U}$, $E' = U^{\sim}$, où U est l'ensemble ordonné défini dans 7.4. Ou mieux, prendre l'exemple de 9.1. 10. b), qui montre qu'on peut prendre pour X n'importe quel espace compact non vide sans point isolé).

<u>Exercice</u> 9.1.9. (<u>Cas des topos définis par un ensemble ordonné</u>).

a) On utilise le yoga de 7.8. b) et c), donnant un dictionnaire entre, d'une part les topos engendrés par leurs ouverts et les morphismes de tels topos, d'autre part les ensembles ordonnées ayant des Sup quelconques, des Inf finis et où le Inf de deux éléments est distributif par rapport aux Sup quelconques, les morphismes entre des tels ensembles ordonnés étant les applications croissantes commutant aux Inf finis et aux Sup quelconques.

b) Soit E un topos, $f : E' \longrightarrow E$ un plongement de topos. Montrer que pour toute famille génératrice $(X_i)_{i \in I}$ dans E , la famille $(f^*(X_i))_{i \in I}$ est génératrice. En déduire que si E est engendré par ses ouverts, il en est de même de E' (Utiliser 9.1.8. c)).

c) Soit $f : E' \longrightarrow E$ un morphisme de topos engendrés par leurs ouverts, associé à un morphisme $g : \underline{O} \longrightarrow \underline{O}'$ sur les ensembles ordonnés correspondants. Montrer que f est un plongement si et seulement si

g est surjectif, <u>et</u> g est surjectif sur les graphes des relations d'ordre, i.e. l'ordre de $\underline{O}'$ est quotient de celui de $\underline{O}$.

d) Soit E un topos de la forme $\underline{O}^{\sim}$ comme dans a). Déduire de b) et c) une correspondance biunivoque entre l'ensemble des sous-topos de E , et l'ensemble des relations d'équivalence R dans $\underline{O}$ ayant les propriétés suivantes, analogues aux conditions ST 1) à ST 3) de 9.1.7 c) :

QO 1) La relation R est compatible avec les Inf finis, ou encore : si U, U' sont équivalents par R, il en est de même de $U \cap V$ et $U' \cap V$ pour tout $V \in \underline{O}$.

QO 2) La relation R est compatible aux Sup quelconques, ou encore : si U_i est équivalent à U'_i pour tout $i \in I$, alors $\operatorname{Sup}_i U_i$ est équivalent à $\operatorname{Sup}_i U'_i$.

Montrer que si des sous-topos E'_i de E correspondent aux relations d'équivalence R_i , alors le sous-topos engendré par les E'_i correspond à la relation intersection des R_i .

<u>Exercice</u> 9.1.10. (<u>Intersection de sous-espaces</u> ; <u>nouveaux topos sans points</u> ; <u>non existence du complémentaire d'un sous-topos</u>).

Soient X un espace topologique, $E = \mathrm{Top}(X) = \mathrm{Ouv}(X)^{\sim}$ (2.1).

a) Soit R la relation suivante sur $\mathrm{Ouv}(X)$: $(U, U') \in R \iff U \cap U'$ est dense dans U et dans U' . Montrer que R est une relation d'équivalence satisfaisant les conditions QO 1) et QO 2) de 9.1.9. d), et définit donc un sous-topos E' de E. Montrer que pour un point $x \in X$, le point correspondant est dans l'image essentielle de <u>Point</u> (E') si et seulement si x est <u>épais</u> i.e. appartient à l'adhérence de l'intérieur de $\overline{x}$. Montrer que E' est le topos vide (2.2.) si et seulement si X est vide.

b) Si X est sobre, montrer que la catégorie <u>Point</u>(E') est équivalente à la catégorie définie par le sous-ensemble ordonné de X (pour la relation de spécialisation) défini par les points épais de X . Montrer que si les points de X sont fermés (resp. si X est noethérien) alors les points épais de X sont les points isolés de X i.e. tel que $\{x\}$ soit ouvert (resp. sont les points maximaux de X). En conclure que si X

est un espace topologique séparé non vide sans points isolés, alors le sous-topos E' de E = Top(X) est un topos non "vide" qui n'a pas de points.

c) Soit X' une partie de X , et $E_{X'}$ le sous-topos de E associé à X' par le procédé 9.1.8. a). Montrer que si X' est dense, alors $E_{X'}$ contient E' . Montrer que si X est sobre et si X' et X" sont deux parties sobres de X , leur intersection $X' \cap X''$ est sobre et $E_{X' \cap X''} \subset E_{X'} \cap E_{X''}$, et que l'inclusion peut être stricte (*).(Prendre un espace séparé X non vide admettant deux parties disjointes denses X' , X"). Montrer que l'inclusion précédente est une égalité si et seulement si le sous-topos $E_{X'} \cap E_{X''}$ a assez de points. Montrer qu'il en est ainsi si X' ou X" est une partie <u>localement fermée</u> de X .

d) Soit X' une partie de X , et X" le complémentaire de X' . Un sous-topos F de E contient les $E_{\{x\}}$ pour $x \in X''$ si et seulement si il contient $E_{X''}$ (cf. 9.1.8. b)). En conclure que si X" est réunion de parties localement fermées de X (par exemple si les points de X" sont fermés), alors l'ensemble des sous-topos F de E dont l'intersection avec $E_{X'}$ est le sous-topos vide Top(∅) ne contient un plus grand élément (qui mérite alors le nom de sous-topos de E <u>complémentaire faible de</u> $E_{X'}$, cf. 9.1.13.), <u>que si</u> $E_{X'} \cap E_{X''}$ est le sous-topos vide (condition qui n'est pas satisfaite si X ≠ ∅ et si X' et X" sont tous deux denses dans X , X, X', X" étant sobres, cf. c)). Montrer que lorsque cette condition est en défaut, alors dans l'ensemble ordonné des sous-topos de E , le Inf de deux éléments n'est pas distributif par rapport aux Sup quelconques. (Le rédacteur ignore s'il est distributif par rapport aux Sup finis ; cf. cependant 9.1.11. e) et 9.1.12. d)).

<u>Exercice</u> 9.1.11. (<u>Sous-topos des topos localement noethériens</u>. <u>Cas des espaces noethériens</u>).

a) Soit f : E' ⟶ E un plongement de topos. Montrer que si X est un objet prénoethérien de E (i.e. (VI 1.) toute suite croissante de

---

(*) Voir cependant 9.1.11. b) ci-dessous pour le cas X localement noethérien.

sous-objets de X est stationnaire) alors $X' = f^*(X)$ est un objet pré-noethérien de E' . (Introduisant les topos induits $E'_{/X'}$ et $E_{/X}$, et utilisant 9.1.6. e), se ramener d'abord au cas où X est l'objet final e de E , donc X' est l'objet final e' de E' . Noter ensuite que toute suite croissante de sous-objets de e' définit, par application de f_* , une suite croissante de sous-objets de $f_*(e') = e$). En conclure que si E admet une famille génératrice formée d'objets prénoethériens (resp. si E est un topos noethérien, resp. localement noethérien (VI 2.)) alors E' satisfait à la même condition. (Utiliser 9.1.9. b)).

b) Soit E un topos localement noethérien (VI 2.). Montrer que tout sous-topos de E est de la forme E_Z (9.1.8. a)), pour une sous-catégorie pleine convenable Z de <u>Point</u>(E) . (Utiliser a) et le théorème de DELIGNE que tout topos localement noethérien admet suffisamment de points). En conclure que si E est de la forme Top(X) , où X est un espace topologique sobre localement noethérien, alors $Z \longmapsto E_Z$ est un isomorphisme de l'ensemble ordonné des sous-espaces sobres de X , avec l'ensemble ordonné des sous-topos de X . (Utiliser 9.1.8. e)). L'intersection de sous-espaces sobres Z_i (est nécessairement sobre et) définit l'intersection des sous-topos E_{Z_i} (contrairement à ce qui peut se passer dans le cas général (9.1.10. c)).

c) Soient X un espace sobre localement noethérien, X' une partie de X , X" son complémentaire. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X' est constructible.

(ii) X' et X" sont sobres.

(iii) X' est sobre, et le sous-topos $E_{X'} \cong \mathrm{Top}(X')$ de $E = \mathrm{Top}(X)$ admet un sous-topos "complémentaire" (cf. 9.1.13. e).

(iv) L'intersection des sous-topos $E_{X'} \approx \mathrm{Top}(X')$ et $E_{X''} \approx \mathrm{Top}(X'')$ de $E = \mathrm{Top}(X)$ est le sous-topos "vide" de E.

Montrer que si E' et E" sont deux sous-topos de E , ils sont complémentaires faibles si et seulement si ils sont complémentaires (9.1.13).

d) Soit X un espace sobre noethérien. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(i) Tout sous-espace sobre X' de X est constructible, i.e. (c)) son complémentaire est sobre.

(i bis) Pour tout point maximal x de X , $X - \{x\}$ est sobre, i.e. $\{x\}$ est constructible.

(ii) X est fini.

(iii) Tout sous-topos de $\mathrm{Top}(X)$ admet un sous-topos complémentaire (cf. 9.1.13.).

(iv) Dans l'ensemble ordonné des sous-topos de $\mathrm{Top}(X)$, le Inf de deux éléments est distributif par rapport aux Sup quelconques.

(Utiliser l'argument de 9.1.10. d), grâce à la formule d'intersection prouvée en b)).

e) Soit X un espace localement noetherien. Montrer que dans l'ensemble ordonné des sous-topos de $\mathrm{Top}(X)$, le Inf de deux éléments est distributif par rapport aux Sup <u>finis</u>. (Se ramener au cas X sobre, et utiliser b)).

f) Pour tout sous-espace sobre Z de l'espace sobre localement noethérien X , soit T_Z la topologie sur la catégorie $\mathrm{Ouv}(X)$ des ouverts de X pour laquelle une famille d'inclusions $U_i \longrightarrow U$ est couvrante si et seulement si on a $U \cap Z = \bigcup_i U_i \cap Z$. Montrer que $Z \longmapsto T_Z$ établit une bijection (renversant les relations d'inclusion) entre l'ensemble des sous-espaces sobres Z de X , et l'ensemble des topologies sur $\mathrm{Ouv}(X)$ plus fines que la topologie canonique T_X . (Utiliser b) et 9.1.2. c)).

g) Soit X un espace topologique sobre. Une partie X' de X est sobre si et seulement si son complémentaire est réunion de parties localement fermées ; si X est localement noethérien, cela signifie aussi que X' est "proconstructible" (EGA IV 1.9.4). Montrer qu'il existe sur X une topologie $T_{\mathrm{cons}'}$, de telle façon que les parties fermées de $X_{\mathrm{cons}'} = (X, T_{\mathrm{cons}'})$ soient les parties sobres de X . Supposons désormais X localement noethérien, $X_{\mathrm{cons}'}$ n'est donc autre que l'espace

X_{cons} de EGA IV 9.1.13. Déduire alors de b) et c) que l'ensemble ordonné Σ des sous-topos de Top(X) est isomorphe à l'ensemble ordonné des parties fermées de X_{cons} , et dans cette correspondance, les sous-topos admettant un complémentaire correspondent aux parties à la fois ouvertes et fermées de X_{cons} . Montrer que X est localement compact, et qu'il est compact si et seulement si X est noethérien i.e. le topos Top(E) est noethérien.

h) Soit E un topos localement noethérien. Supposons qu'il ait la propriété envisagée dans 9.1.14. b) (condition peut-être toujours remplie ...). Montrer que les images essentielles des foncteurs canoniques <u>Point</u>(E')$\longrightarrow$ <u>Point</u>(E) , où E' parcourt l'ensemble Σ des sous-topos de E , définissent dans l'ensemble X = Point(E) des classes d'isomorphie de points de E un ensemble de parties, qui est l'ensemble des parties fermées pour une <u>topologie</u> T_{cons} <u>sur</u> X , et qu'on obtient de cette façon un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble Σ des sous-topos de E et l'ensemble des parties fermées de X_{cons} . En conclure que dans Σ , le Sup de deux éléments est distributif par rapport aux Inf <u>quelconques</u>. Montrer que X_{cons} , qui n'est pas nécessairement <u>U</u>-petit, a un espace sobre associé (4.2.1.) qui est <u>U</u>-petit.

<u>Exercice</u> 9.1.12. (<u>Topos finis</u>). Un topos E est dit <u>fini</u> s'il est équivalent à un topos de la forme $\hat{C}$, avec C une catégorie finie.

a) (Dictionnaire). Soit <u>V</u> un univers tel que $\underline{U} \in \underline{V}$. Soit (Karfiness) la 2-catégorie définie comme 2-sous-catégorie pleine de la catégorie $(Cat)_{\underline{V}}$, formée des catégories éléments de <u>V</u> , qui sont <u>Karoubiennes et équivalentes à une catégorie finie</u> et (Topfin) la 2-catégorie définie comme la 2-sous-catégorie pleine de (<u>V</u>-<u>U</u>-Top) (3.3.1.) formée des <u>U</u>-topos <u>finis</u> qui sont $\in \underline{V}$. Montrer qu'on a des 2-équivalences quasi-inverses l'une de l'autre :

(9.1.12.1.) $\quad C \longmapsto \hat{C}$: (Karfiness) $\longrightarrow$ (Topfin)

(9.1.12.2.) $\quad E \longmapsto$ <u>Point</u>(E) : (Topfin) $\longrightarrow$ (Karfiness) .

(Utiliser 7.6. h), e)).

b) Montrer qu'un topos fini est noethérien (VI 2).

c) Montrer que tout sous-topos d'un topos fini E est un topos fini. Plus précisément, si E est équivalent à $\widehat{C}$, où C est une catégorie karoubienne finie (ou, plus généralement, équivalente à une catégorie finie), montrer qu'on obtient un isomorphisme ordonné entre l'ensemble des sous-topos E' de E et l'ensemble des sous-catégories strictement pleines C' de C qui sont karoubiennes (ou, ce qui revient au même, stables dans C par facteurs directs), en associant à toute C' l'image essentielle de $f : \widehat{C'} \longrightarrow \widehat{C}$, où $f : C' \longrightarrow C$ est le foncteur d'inclusion. (Utiliser 5.6. pour s'assurer que f_* est pleinement fidèle, et b) et 9. 1.11. b) pour le fait que tout sous-topos E' de E s'obtient comme indiqué).

d) Soit E un topos fini. Construire sur l'ensemble fini X =Point(E) des classes d'isomorphie de points de E une topologie qui en fasse un espace topologique sobre, et telle que l'ensemble ordonné des sous-topos de E soit canoniquement isomorphe à l'ensemble des parties fermées de X. (Prendre la "topologie constructible" $\mathcal{E}_{\text{cons}}$ de X , définie via la relation d'ordre $(x \leqslant y) \Longleftrightarrow$ (x est un facteur direct de y), pour laquelle l'adhérence d'un point x est formée des y tels que $y \leqslant x$). En particulier l'ensemble Σ des sous-topos de E est fini, et le Inf y est distributif par rapport aux Sup quelconques.

e) Soit C une catégorie équivalente à une catégorie finie. Montrer que pour toute sous-catégorie pleine C' de C , il existe sur C une topologie $T_{C'}$ pour laquelle une famille $(X_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ est couvrante si et seulement si pour tout $Y \in \operatorname{Ob} C'$, la famille des applications $\operatorname{Hom}(Y,X_i) \longrightarrow \operatorname{Hom}(Y,X)$ $(i\in I)$ est surjective. Montrer que la catégorie des faisceaux sur $(C,T_{C'})$ est équivalente à $\widehat{C'}$, et que $C' \longmapsto T_{C'}$ est une bijection (renversant les relations d'ordre) entre l'ensemble des sous-catégories strictement pleines C' de C qui sont karoubiennes (ou, ce qui revient au même, stables dans C par facteurs directs), et l'ensemble des topologies (II 1.1) sur la catégorie C . (Utiliser c) et

9.1.2. c)). En particulier, si C est un site dont la catégorie sous-jacente est équivalente à une catégorie finie, alors le topos $C^{\sim}$ est un topos fini.

f) Soit $f : C' \longrightarrow C$ un foncteur de $\underline{U}$-catégories, avec C équivalente à une catégorie finie. Montrer que le morphisme de topos $\hat{f} : \hat{C'} \longrightarrow \hat{C}$ (4.6.) est conservatif si et seulement si tout objet de C est isomorphe à un facteur direct d'un objet dans l'image de f . (Se ramener au cas où f est une inclusion $f : C' \hookrightarrow C$, avec C' comme dans c)).

g) Soit C la catégorie ayant deux objets e (l'objet final) et a , et, en plus des flèches identiques, trois flèches $f : a \longrightarrow e$, $g : e \longrightarrow a$, $p = gf$ (donc $p^2 = p$). Montrer que $E = \hat{C}$ a, en plus des sous-topos E et $Top(\emptyset)$, exactement un sous-topos E' , savoir $E' = \widehat{\{e\}}$; par suite, pour tout sous-topos E'' de E , $E'' \neq Top(\emptyset)$, on a $E' \cap E'' \neq Top(\emptyset)$.

<u>Exercice</u> 9.1.13. (<u>Sous-topos complémentaires d'un topos</u>).

Soient E un topos, E' et E'' deux sous-topos. On dit que E' et E'' sont <u>complémentaires</u> l'un de l'autre si $E' \cap E'' = Top(\emptyset)$, $E' \vee E'' = E$. Où le signe $\vee$ désigne le Sup dans l'ensemble ordonné des sous-topos de E).

On supposera que dans l'ensemble Σ des sous-topos de E , le Inf de deux éléments est distributif par rapport au Sup fini.

a) Si E' et E'' sont complémentaires, E'' est le plus grand parmi les sous-topos E''_1 de tels que $E' \cap E''_1 = Top(\emptyset)$ (i.e. E'' est un complémentaire faible de E' , dans la terminologie de 9.1.10. d)).

b) Montrer que les conditions suivantes sur E sont équivalentes :

(i) Si E' et E'' sont deux sous-topos de E tels que E'' soit un complémentaire faible de E' , alors E'' est un complémentaire de E' .

(ii) Pour tout sous-topos E' de E tel que $E' \neq \quad E$, il existe un sous-topos E'' de E tel que $E'' \neq Top(\emptyset)$ et $E' \cap E'' = Top(\emptyset)$.

(i bis) Si E' et E'' sont deux sous-topos de E tels que E'' soit maximal dans l'ensemble des sous-topos E''_1 tels que $E' \cap E''_1 = Top(\emptyset)$, alors E'' est un complémentaire de E .

Montrer que même si E est un topos fini (9.1.12.), ces conditions ne sont pas nécessairement vérifiées (9.1.12. g)). Elles le sont cependant si E est de la forme Top(X) , X un espace localement noethérien. (Utiliser 9.1.11. b)).

c) Un sous-topos E' de E est appelé <u>complémenté</u> s'il admet un complémentaire (comparer 9.1.12. c)). Prouver que l'ensemble des sous-topos complémentés est stable par Inf et Sup finis, et par complémentarité, et que cette dernière transforme Inf et Sup, Sup en Inf.

d) Enoncer les duals des observations a), b), c) (qui étaient en fait des énoncés généraux triviaux sur un ensemble ordonné abstrait Σ; noter que l'hypothèse faite sur Σ est en fait autoduale).

9.1.14. <u>Questions ouvertes</u>. Soit E un topos.

a) Dans l'ensemble des sous-topos de E , le Inf de deux éléments est-il distributif par rapport aux sup finis ?

b) Soient E' , E" deux sous-topos de E tels que E = E' $\vee$ E" . Alors est-il vrai que tout point de E est isomorphe à l'image d'un point de E' ou d'un point de E" ?

On notera que si la réponse à b) est affirmative pour E et tous ses sous-topos, alors la réponse à a) est affirmative du moins pour le cas de sous-topos ayant suffisamment de points (donc pour tous les sous-topos, si E est localement noethérien (9.1.11. b)). La réponse à a)(et, à fortiori à b)), n'est pas connue cependant pour tous les topos noethériens. Cependant la réponse à a) et b) est affirmative si E est de la forme Top(X) , X est espace localement noethérien (9.1.11.), ou si E est un topos fini (9.1.12.).

On notera que a) peut se reformuler sous la forme suivante (appliquée à tous les sous-topos F de E) :

a') Si E' et E" sont deux sous-topos d'un topos F , tels que le morphisme canonique (cf. 8.7. b))

(9.1.14.1.) $$E' \amalg E'' \longrightarrow F$$

soit conservatif (ce qui signifie aussi E = E' $\vee$ E" (9.1.7.2. e)), alors il en est de même pour le morphisme déduit par 2-changement de base

$F_1 \hookrightarrow F$, où F_1 est un sous-topos de F .

On a une reformulation analogue b') de b), en prenant un changement de base $F_1 \longrightarrow F$ par un topos ponctuel F_1 (2.2.). On voit donc qu'une réponse affirmative à a), b) résulterait d'une réponse affirmative à la question suivante (où on prend pour F n'importe quel sous-topos de E) :

c) Si E' et E'' sont deux sous-topos du topos F , dont le sup soit F i.e. tel que le morphisme de topos (9.1.14.1.) soit conservatif, alors ce morphisme est-il même universellement conservatif, i.e. reste-t-il conservatif après tout 2-changement de base $F_1 \longrightarrow F$?

Cet énoncé a un sens, grâce au résultat de DELIGNE ( ) affirmant l'existence des 2-produits-fibrés de topos. Voir cependant l'exemple 9.1.7.2. d).

D'autre part, on voit par 9.1.11. h) qu'une réponse affirmative à b) fournirait dans le cas localement noethérien une réponse affirmative à la question suivante :

d) Dans l'ensemble ordonné Σ des sous-topos de E , le Sup de deux éléments est-il distributif par rapport aux Inf quelconques (pas nécessairement finis) ?

Cela signifie aussi que Σ s'interprête comme l'ensemble ordonné des "sous-topos fermés" d'un topos convenable E_{cons}, (savoir $\Sigma^{\circ\sim}$, où l'ensemble ordonné opposé Σ° de Σ , considéré comme une catégorie, est munie de sa topologie canonique, cf. 7.8.b)), qui est engendré par les sous-objets de l'objet final, donc est très proche d'un espace topologique ordinaire. Il resterait à étudier ce topos E_{cons} , en s'inspirant des exemples 9.1.11. g) et 9.1.12. d), et notamment à déterminer s'il est noethérien si E l'est, ce qui revient à la question suivante pour les sous-topos F de E, qui a un sens indépendamment de d) :

e) Soient F un topos noethérien, $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-topos de E dont l'intersection soit $Top(\emptyset)$. Alors existe-t-il une sous-famille finie ayant la même propriété ?

Dans un ordre d'idées assez différent, rappelons également la question soulevée dans (9.1.6 e)), qui mériterait d'être éclaircie.

9.2. Cas des sous-topos ouverts.

(9.2.1) Soit U un ouvert d'un topos E , i.e. un sous objet de l'objet final e de E (8.3). Considérons le morphisme de localisation (5.2)

(9.2.2) $$j : E_{/U} \longrightarrow U \quad .$$

Comme $U \longrightarrow e$ est ici un monomorphisme, le foncteur $j_!$ (qui s'interprète comme le foncteur oubli) est pleinement fidèle, donc son biadjoint j_* l'est également (1.5.7 a)). En d'autres termes, le morphisme de localisation j (9.2.2) associé à un ouvert U du topos E est un plongement de topos (9.1.1 a)).

Un plongement de topos $F \rightarrow E$ est appelé un plongement ouvert s'il est isomorphe au plongement de topos défini par un ouvert U de E. Un sous-topos E' (9.1.1. b)) de E est appelé un sous-topos ouvert s'il est défini à l'aide d'un ouvert de E, i.e. si le morphisme d'inclusion canonique $E' \longrightarrow E$ est un plongement ouvert. On notera que l'ouvert U de E associé à un plongement ouvert de topos $j: E' \longrightarrow E$ est déterminé de façon unique comme égal au sous-objet $j_!(e')$ de e, où e' désigne l'objet final de E'. Par suite, on trouve une correspondance biunivoque entre ouverts U de E et sous-topos ouverts de E.

Remarque 9.2.3. Conformément aux définitions précédentes, le sous-topos ouvert de E associé à l'ouvert U de E est la sous-catégorie strictement pleine de E image essentielle du foncteur image directe

$$j_*: E/_U \longrightarrow E$$

On se gardera de confondre cette sous-catégorie de E avec la sous-caté gorie strictement pleine, image essentielle de $j_!$, formée des objets X de E tels que le morphisme structural $X \longrightarrow e$ se factorise par U. Il est clair cependant que ces deux sous-catégories se déterminent mutuellement, et qu'elles sont canoniquement équivalentes. C'est pourquoi certains auteurs ont pu être tentés d'appeler (voire, ont pu appeler) "sous-topos ouvert défini par U" la sous-catégorie strictement pleine image essentielle de $j_!$, dont la description en termes de U est plus simple que celle de l'image essentielle de j_* . Cette terminologie ne présente pas d'inconvénient tant qu'on ne se propose pas d'étudier d'autres sortes de sous-topos que des sous-topos ouverts. Comme ce n'est pas notre cas, nous ne suivrons pas ici les auteurs sus-mentionnés.

Pour la commodité du lecteur, nous allons résumer les propriétés spéciales les plus importantes des plongements ouverts :

Proposition 9.2.4. Soit

$$j : \mathcal{U} \longrightarrow E$$

un plongement ouvert de topos (9.2.1). Alors le foncteur $j_!$ adjoint à gauche de j^* existe, de sorte qu'on a une suite de trois foncteurs adjoints

$$j_! \ , \ j^* \ , \ j_* :$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, shift left=2, "j_!"] \arrow[r, shift right=2, "j_*"'] & E \arrow[l, "j^*"'] \end{tikzcd}$$

De plus :

a) Le foncteur $j_!$ et le foncteur j_* sont pleinement fidèles.

b) Le foncteur $j_!$ commute aux produits fibrés, aux produits indexés par des petits ensembles $I \neq \emptyset$, et aux limites projectives relatives à de petites catégories d'indices co-filtrantes (1.2.7).

c) Pour tout objet X de E, le morphisme d'adjonction

$$j_! j^*(X) \longrightarrow X$$

est un monomorphisme.

Démonstration. On peut supposer que j est le morphisme de localisation défini par un ouvert U de E. Alors a) est mis pour mémoire, b) provient de l'interprétation de $j_!$ comme un foncteur oubli et du fait que $U \to e$ est un monomorphisme. Enfin c) est immédiat en notant que le morphisme envisagé n'est autre que le morphisme déduit de l'inclusion $U \to e$ par le changement de base $X \to e$, compte tenu que par changement de base un monomorphisme est transformé en monomorphisme.

Remarques 9.2.4.1 On peut trouver des plongements de topos $j : E' \longrightarrow E$ tels que $j_!$ existe, mais que $j_!$ ne commute pas aux produits de deux objets, ni aux limites projectives cofiltrantes (exercice 9.5.9 c)).

9.2.5. Soit maintenant

$$g : E' \longrightarrow E$$

un morphisme de topos quelconque, et soit $U' = g^{*}(U)$ l'image inverse de l'ouvert U de E. On a vu dans 5.11 que le diagramme de topos

$$\begin{tikzcd} E'/_{U'} \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "g_U"'] & E' \arrow[d, "g"] \\ E/_U \arrow[r, "j"] & E \end{tikzcd}$$

est 2-cartésien. On en conclut en particulier que l'image inverse par g d'un sous-topos ouvert de E (cf. 9.1.6 d))est un sous-topos ouvert de E', ou ce qui revient au même, que la notion de plongement ouvert de topos (9.2.1) est stable par 2-changements de base dans la 2-catégorie des U-topos (éléments d'un univers donné V).

Notons aussi que pour que le morphisme de topos $g : E' \longrightarrow E$ se factorise, à isomorphisme près, par $j : E/_U \longrightarrow E$, il faut et il suffit évidemment que $j' : E'/_{U'} \longrightarrow E'$ soit une équivalence de catégories, ce qui signifie encore que l'inclusion $U' \hookrightarrow e'$ (=objet final de E') est un isomorphisme. Ceci précise donc 9.1.4 , en caractérisant de façon simple l'image essentielle du foncteur envisagé dans loc. cit.

9.2.6. Appliquons 9.2.5 au cas où E' est de la forme $E/_V$,où V est un deuxième ouvert de E, g étant le morphisme de localisation. Alors $U' = U \cap V$, et on trouve que le produit 2-cartésien de $E/_U$ et $E/_V$ sur E s'identifie à $E_{/U \cap V}$. On en conclut <u>qu'une intersection finie de sous-topos ouverts de</u> E <u>est un sous-topos ouvert de</u> E, plus précisément l'application (9.2.6.1)

$$U \longmapsto \text{sous-topos de E défini par U}$$

commute aux intersections finies.

<u>Exercice</u> 9.2.7. Prouver que l'application (9.2.6.1) commute également aux Sup <u>quelconques</u>. (Utiliser 9.1.7.2 e)).

9.3. <u>Construction du sous-topos fermé complémentaire d'un sous-topos ouvert</u>.

9.3.1 Soient $\mathcal{T}$ un espace topologique, et U un ouvert de $\mathcal{T}$, de sorte que Top(U) s'identifie à un sous-topos ouvert de Top($\mathcal{T}$) (notations de 2.1). Soit Y le sous-espace topologique fermé de $\mathcal{T}$ complémentaire de U. On peut alors, (à équivalence près) considérer Top(Y) comme un sous-topos de Top ($\mathcal{T}$), savoir le sous-topos formé des objets F de Top($\mathcal{T}$) dont la restriction à U est le topos final de U. Cette description d'une sous-catégorie de E=Top($\mathcal{T}$) garde un sens chaque fois qu'on a un topos et un ouvert U de celui-ci, et on verra qu'elle fournit toujours un sous-topos de E. De plus, il est immédiat dans le cas particulier envisagé d'abord (et avec la terminologie introduite dans l'exercice 9.1.13) que Top(Y) et Top(U) sont des sous-topos complémentaires l'un de l'autre (utiliser 9.2.5 et 9.1.7.2 e)). Il en sera encore de même dans le cas général, et nous verrons que cette propriété caractérise de façon unique le sous-topos envisagé. Il mérite donc à tous points de vue, le nom de sous-topos fermé complémentaire de l'ouvert envisagé U, ou du sous-topos ouvert défini par U. Le détail de la construction de ce topos $\mathcal{F}$, et du foncteur image inverse $i^{*} : E \longrightarrow \mathcal{F}$, sera donné dans la présente section, tandis que la section 9.4 en développera les premières propriétés.

9.3.2. Soient donc, comme 9.2.1, E un topos, U un ouvert de E, et considérons le morphisme de localisation

(9.3.2.1) $$j : \mathfrak{U} = E_{/U} \longrightarrow E ,$$

qui est un plongement ouvert.

Pour tout objet X de E, posons

(9.3.2.2) $$X_{C\,U} = U \coprod_{U \times X} X ,$$

où l'amalgamation est faite pour les projections canoniques

$$pr_1 : U \times X \longrightarrow U , \quad pr_2 : U \times X \longrightarrow X$$

On a donc un diagramme <u>cocartésien</u> (I 10) dans E, dépendant fonctoriellement de X:

(9.3.2.3)
$$\begin{tikzcd} U\times X \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & X \arrow[d] \\ U \arrow[r] & X_{\complement U} \end{tikzcd}$$

On notera que dans l'exemple envisagé dans 9.3.1 , $X_{\complement U}$ est canoniquement isomorphe à $i_*i^*(X)$ (où $i: Y \to T$ est l'inclusion), et $X \to X_{\complement U}$ s'identifie au morphisme d'adjonction.

Proposition 9.3.3. *Avec les notations précédentes, on a ce qui suit :*

a) *Pour tout objet* X *de* E, *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *Il existe un objet* Y *de* E *et un isomorphisme* $X \simeq Y_{\complement U}$.

(ii) *Le morphisme canonique* $X \xrightarrow{m} X_{\complement U}$ *est un isomorphisme*.

(iii) *Le morphisme canonique* $pr_2 : X\times U \to U$ *est un isomorphisme* (i.e. $j^*(X)$ *est un objet final de* $E/_U$).

b) *Pour tout morphisme*

$$m: E \to X'$$

dans E, *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i') *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "m"] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\ X_{\complement U} \arrow[r] & X'_{\complement U} \end{tikzcd}$$

est cartésien.

(ii') *Le morphisme* $m\times id_U : X\times U \to X'\times U$ *est un isomorphisme*, i. e. $j^*(m)$ *est un isomorphisme*.

c) *le foncteur*

$$X \to X_{\complement U}$$

de E *dans* E *est exact à gauche*, *transforme les familles épimorphiques en familles épimorphiques*, *commute aux limites inductives filtrantes* et aux sommes amalgamées.

Démonstration. On démontre d'abord la proposition dans le cas où E est de la forme $\hat{C}$, où C est une petite catégorie, et pour cela on est ramené par I.3.1 au cas où E est le topos "ponctuel" (Ens), où la proposition est évidente. On passe de là au cas général par les procédés standard de II 4, par utilisation du foncteur "faisceau associé".

Proposition 9.3.4 : Avec les notations de 9.3.2 , la sous-catégorie strictement pleine $\mathcal{F}$ de E définie par les sous-objets X de E tels que $j^*(X)$ soit un objet final de $\mathcal{U}$ (cf. 9.3.3 a)) est un sous-topos de E , i.e. (9.1.1.)) c'est un topos, et le foncteur d'inclusion $i_*: \mathcal{F} \longrightarrow E$ est le foncteur image directe par un morphisme de topos $i : \mathcal{F} \longrightarrow E$, dont le foncteur image réciproque est le foncteur $X \longmapsto i^*X = X_{CU}$. Le morphisme d'adjonction $X \longrightarrow i^*i_*X$ est le morphisme canonique $X \longrightarrow X_{CU}$ de (9.3.2.3)

Démonstration : Pour tout objet X de E, désignons par u(X) le morphisme canonique $X \to X_{CU}$. Le morphisme u(X) est fonctoriel en X et pour tout objet X , $u(X_{CU})$ est un isomorphisme. Il résulte alors formellement et trivialement de ces deux propriétés que le foncteur i^* est adjoint à gauche au foncteur i_* et que le morphisme d'adjonction est u(X). Comme le foncteur $X \longrightarrow X_{CU}$ est exact à gauche, le foncteur i^* est exact à gauche. Il résulte alors de II 5.5 que $\mathcal{F}$ est un topos, et de la définition 3.1 que le couple (i^* , i_*) est un morphisme de topos.

9.3.5. Le sous-topos $\mathcal{F}$ de E décrit dans 9.3.4 est appelé le sous-topos fermé de E complémentaire de l'ouvert U de E, ou (au choix) du sous-topos ouvert de E correspondant à U. Conformément à 9.1.1 b), le morphisme $i: \mathcal{F} \longrightarrow E$ construit dans 9.3.4. est appelé le morphisme d'inclusion. Une sous-catégorie pleine $\mathcal{F}$ de E est appelé un sous-topos fermé de E s'il existe un ouvert U de E tel que $\mathcal{F}$ soit le sous-topos fermé complémentaire de U. On notera que cet U est déterminé de façon unique comme $i_*(\emptyset_{\mathcal{F}})$, où $\emptyset_{\mathcal{F}}$ est l'objet initial de $\mathcal{F}$, égal à $i^*(\emptyset_E)$; on l'appelle aussi l'ouvert de E complémentaire du sous-topos fermé $\mathcal{F}$

et le sous-topos de E défini par U s'appelle aussi le <u>sous-topos ouvert de E complémentaire de $\mathcal{F}$</u> . Enfin, un plongement de topos (9.1.1 a)) $i : F \to E$ est dit <u>plongement fermé</u> si le sous-topos correspondant de E est fermé.

Si G est un Groupe sur E , $s \in \mathrm{Hom}(e_E, G)$, on appelle <u>support</u> de G (resp. de S) le sous-topos fermé de E complémentaire de l'ouvert cosupport de G (resp. s) (8.5.1, 8.5.2).

9.3.6. Avec les notations de 9.3.2. et 9.3.4. on trouve donc deux morphismes de topos

(9.3.6.1) $$\mathcal{U} \xrightarrow{j} E \xleftarrow{i} \mathcal{F},$$

définissant cinq foncteurs formant deux suites de foncteurs adjoints $(j_!\ ,\ j^*\ ,\ j_*)$ et $(i^*\ ,\ i_*)$:

(9.3.6.2)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, shift left=2, "j_!"] \arrow[r, shift right=2, "j_*"'] & E \arrow[l, "j^*"'] \arrow[r, shift left, "i^*"] & \mathcal{F} \arrow[l, shift left, "i_*"] \end{tikzcd} .$$

Le foncteur

(9.3.6.3) $$\rho = i_* j^* : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$$

est appelé le <u>foncteur de recollement</u> relatif à l'ouvert U de E ; plus généralement si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ sont deux topos quelconques, un foncteur $\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ est appelé <u>foncteur de recollement</u> s'il est exact à gauche et accessible (I.9.2) , ou ce qui revient au même (I.8), s'il admet un pro-adjoint. Les raisons de cette terminologie vont apparaître dans 9.4.1 d) et 9.5.4. ci-dessous.

9.4 <u>Premières propriétés du sous-topos fermé $\mathcal{F}$ et de $i : \mathcal{F} \to E$</u>

<u>Proposition</u> 9.4.1. <u>Les notations sont celles de</u> 9.3.2 <u>et</u> 9.3.4.

a) <u>Le foncteur</u> $i_* : \mathcal{F} \to E$ <u>transforme les familles épimorphiques en familles épimorphiques</u>. <u>Il commute à la formation des sommes amalgamées et des limites inductives filtrantes</u>.

b) <u>Pour tout objet</u> X <u>de</u> E <u>tel que le morphisme de projection</u> $U \times X \to U$ <u>soit un épimorphisme</u>, <u>le morphisme d'adjonction</u> $X \to i_* i^* X$ <u>est un épimorphisme</u>.

c) Le couple de foncteurs (i^*, j^*) de E dans $\mathcal{F}$ et $\mathcal{U}$ respectivement est conservatif (I 6.1) i.e. un morphisme m de E est un isomorphisme si et seulement si $i^*(m)$ et $j^*(m)$ sont des isomorphismes (ceci équivaut à dire que le couple de foncteurs (i^*, j^*) est fidèle (6.4.0)).

d) Le foncteur de recollement $\rho = i^*j_* : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ est un foncteur exact à gauche et accessible (I 9.2), ou ce qui revient au même (I 8.) il admet un pro-adjoint $\sigma : \mathrm{Pro}\mathcal{F} \longrightarrow \mathrm{Pro}\,\mathcal{U}$

Démonstration : a) résulte le 9.3.3 c). Pour démontrer b) il suffit de se reporter à la définition (9.3.2.2) de $X_{\complement U}$ compte-tenu de ce que $i_*i^*X = X_{\complement U}$ (9.3.4). L'assertion c) résulte de 9.3.3 b). Les foncteurs i_* et j_* sont exacts à gauche et par suite ρ est exact à gauche. Le foncteur j_* est un foncteur image directe par un morphisme de topos et par suite il est accessible (I 9.5;on note qu'un topos est une catégorie accessible (I 9.11.3)). Comme le foncteur i^* commute aux limites inductives (c'est un foncteur image réciproque), le foncteur ρ composé de deux foncteurs accessibles est accessible.

Proposition 9.4.2. Soit E' un topos. Alors le foncteur $h \longmapsto i \cdot h$:

$$\mathrm{Homtop}(E', \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Homtop}(E', E)$$

est pleinement fidèle, et son image essentielle est formée des morphismes de topos $g : E' \longrightarrow E$ tels que $g^*(U)$ soit un objet initial $\emptyset_{E'}$ de E' .

Par 9.1.4 , on sait que le foncteur envisagé est pleinement fidèle et que g est dans son image essentielle si et seulement si pour tout objet X' de E' , l'objet $g_*(X')$ de E appartient à $\mathcal{F}$, i.e. qu'on a

$$(*) \qquad j^*(g_*(X')) \simeq e_{\mathcal{U}} \text{ pour tout } X' \in \mathrm{Ob}\, E' .$$

Or, posons $U' = g^*(U)$, et considérons le diagramme de topos

$$\begin{tikzcd} E'_{/U'} \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "g_U"'] & E' \arrow[d, "g"] \\ E_{/U} \arrow[r, "i"] & E \end{tikzcd} \quad ;$$

il est clair qu'on a un isomorphisme canonique

$$j^*(g_*(X')) \simeq g_{U_*}(j'^*(X')) \ ,$$

d'autre part il est immédiat aussi que le foncteur j'^* est essentiellement surjectif, donc la condition (*) équivaut à la condition

(**) $$g_{U*}(Y') \simeq e_{\mathcal{U}} \quad \text{pour tout } Y' \in \mathrm{Ob}\, E'_{/U'} \ .$$

Utilisant la propriété d'adjonction de g_{U*} et $g_U{}^*$, on voit aussitôt que cela signifie que $g_U^*(Y)$ est un objet initial de $E'_{/U'}$ pour tout objet Y de $E_{/U}$, ou encore (utilisant que l'objet initial de $E'_{/U'}$ est strict (II 4.5) qu'il en est ainsi pour $Y=e_{\mathcal{U}}$, objet final de $\mathcal{U}$. Mais cela signifie aussi que l'objet final U' de $E'_{/U'}$ est initial, ou, ce qui revient manifestement au même, si et seulement si U' est un objet initial $\emptyset_{E'}$ de E', cqfd.

<u>Corollaire</u> 9.4.3 Soient $g : E' \longrightarrow E$ un morphisme de topos $U' = g^*(U)$, $\mathcal{U}'=E'_{/U'}$ <u>et</u> $\mathcal{F}'$ <u>le sous-topos fermé de</u> E' <u>complémentaire de l'ouvert</u> U', <u>enfin</u> $i' : \mathcal{F}' \to E'$ <u>le morphisme d'inclusion</u>. <u>Alors le morphisme de topos</u> $g \cdot i' : \mathcal{F}' \longrightarrow E$ <u>se factorise à isomorphisme près en un morphisme de topos</u> $g_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$, <u>et le diagramme de topos correspondant</u>

(9.4.3.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "g_{\mathcal{F}}"'] & E' \arrow[d, "g"] \\
\mathcal{F} \arrow[r, "i"] & E
\end{tikzcd}$$

<u>est</u> 2-cartésien (cf.5.11).

Résulte formellement de 9.4.2. et des définitions.

Avec la terminologie introduite dans 9.1.6 d), on peut donc dire, en particulier, que l'image inverse par un morphisme de topos $g : E' \longrightarrow E$ d'un sous-topos <u>fermé</u> $\mathcal{F}$ de E est un sous-topos <u>fermé</u> $\mathcal{F}'$ de E' (savoir le sous-topos fermé complémentaire de l'ouvert $U'=g^*(U)$, où U est l'ouvert de E complémentaire de $\mathcal{F}$).

<u>Corollaire</u> 9.4.4 <u>Soient</u> E <u>un topos</u>, $\mathcal{U}$ <u>un sous-topos ouvert de</u> E, $\mathcal{F}$ <u>le sous-topos fermé complémentaire</u>.

a) On a

$$\mathcal{U}\cap\mathcal{F}\approx \mathrm{Top}(\emptyset) \quad , \mathcal{U}\vee\mathcal{F} = E \ ,$$

où le signe $\vee$ désigne le Sup dans l'ensemble de tous les sous-topos de E (9.1.2 c)). (Avec la terminologie introduite dans 9.1.13 , $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ sont des sous-topos de E complémentaires l'un de l'autre).

b) $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{F}$) est le plus-grand parmi les sous-topos E' de E tels que l'on ait $E'\cap\mathcal{F}\approx$ Top($\emptyset$) (resp. $\mathcal{U}\cap E'\approx$ Top($\emptyset$)).

Démonstration. a) la première relation revient à dire que si E' est un topos et $g:E'\longrightarrow E$ est un morphisme de topos qui se factorise à isomorphisme près par $\mathcal{U}$ et par $\mathcal{F}$, alors $E'\approx$ Top($\emptyset$) ; or en vertu de 9.2.5 et 9.4.2, l'hypothèse signifie que $g^*(U)$ est à la fois un objet initial et un objet final de E' , d'où la conclusion. Pour la deuxième relation, on note que par 9.1.7.2 e) elle équivaut à 9.4.1 c).

b) Supposons que $E'\cap\mathcal{F}\approx$ Top($\emptyset$) ; en vertu de 9.4.3 $E'\cap\mathcal{F}$ est équivalent au sous-topos de E' complémentaire de $g^*(U)$, où $g:E'\longrightarrow E$ est le morphisme d'inclusion, donc la condition envisagée signifie que $U'=g^*(U)$ est un objet final de E' , i.e. (9.2.5) que $E'\subset\mathcal{U}$. Supposons que $\mathcal{U}\cap E'\approx$ Top($\emptyset$) ; en vertu de 5.11 $\mathcal{U}\cap E'$ est équivalent à $E'_{/U'}$, donc la condition envisagée signifie que U' est objet initial de E' , i.e. (9.4.2) que $E'\subset\mathcal{F}$.

Corollaire 9.4.5 Soit $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-topos fermés du topos E, et pour tout $i\in I$, soit U_i l'ouvert de E complémentaire de $\mathcal{F}_i$. Alors le sous-topos de E intersection de $\mathcal{F}_i$ (9.1.3) est un sous-topos fermé, dont l'ouvert complémentaire est $U=\operatorname{Sup}_i U_i$.

Cela résulte formellement de la propriété universelle de l'intersection comme 2-produit et de 9.4.2 , compte tenu que pour un morphisme de topos $g:E'\longrightarrow E$, $g^*(U)=\operatorname{Sup}_i g^*(U_i)$ est un objet initial si et seulement si les $g^*(U_i)$ le sont.

On prouve de façon analogue :

Corollaire 9.4.6. Avec les notations de 9.4.5 supposons I fini. Alors

<u>le sous-topos de</u> E <u>borne supérieure de</u> (9.1.2 c)) <u>est un sous-topos fermé de</u> E, <u>dont l'ouvert complémentaire est égal à</u> $\bigcap_i U_i$.

<u>Exercice</u> 9.4.7. (<u>Recollement de sous-topos</u>). Soit E un topos.

a) Soient E' un sous-topos de E, $(S_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de E recouvrant l'objet final, et pour tout $i\in I$, soit S_i' l'image inverse de S_i dans E', et $E_i' \approx E'_{/S_i'}$ le sous-topos de $E_i = E_{/S_i}$ image inverse par le morphisme de localisation $E_i \rightarrow E$ du sous-topos E' de E (9.1.6 d) et 5.11). Montrer que pour un objet X de E, X appartient à E' si et seulement si pour tout $i\in I$, l'image inverse $X|S_i$ de X dans E_i appartient à E_i' .

b) Supposons que E soit de la forme $C^\sim$, où C est un <u>U</u>-site. Montrer que le préfaisceau sur C

$S \mapsto$ ensemble des sous-topos du topos $(C_{/S})^\sim \approx E^\sim_{/\varepsilon(S)}$

est un faisecau. E étant de nouveau quelconque, en conclure qu'il existe un élément de E qui représente le foncteur

$$S \mapsto \text{ensemble des sous-topos du topos } E_{/S} \ ;$$

c) Avec les notations de a), montrer que pour que le sous-topos E' de E soit un sous-topos ouvert (resp. un sous-topos fermé), il faut et il suffit que pour tout $i\in I$, il en soit de même du sous-topos induit E_i' de E_i .

<u>Exercice</u> 9.4.8. (<u>Intérieur</u>, <u>extérieur</u>, <u>adhérence</u> et <u>frontière d'un sous-topos</u>.) Soient E un topos, E' un sous-topos, $i: E' \rightarrow E$ le morphisme d'inclusion.

a) Montrer que $i_*(\emptyset_{E'})$ est le plus grand ouvert U de E tel que l'on ait $E'|\mathcal{U} \approx \mathrm{Top}(\emptyset)$, où $\mathcal{U}$ est le sous-topos ouvert de E défini par U . On appelera cet U, ou $\mathcal{U}$, l'<u>extérieur</u> du sous-topos E' de E, et le sous-topos fermé de E complémentaire de U l'<u>adhérence</u> de E'.

b) Montrer qu'il existe un plus grand ouvert V de E tel que le sous-topos ouvert correspondant $\mathcal{V}$ de E soit contenu dans E'. (Utiliser 9.2.7.) On appelera ce V, ou $\mathcal{V}$, l'<u>intérieur</u> du sous-topos E' de E. Les ouverts U et V de E sont disjoints ($U\wedge V = \emptyset_E$) ; le sous-topos fermé de E complémentaire de $\mathrm{Sup}(U,V)=U\amalg V$ s'appele la <u>frontière</u> du sous-topos E' de E.

c) Pour que E' soit un sous-topos ouvert (resp. fermé) de E, il faut et il suffit qu'il soit égal à son intérieur (resp. qu'il soit égal à son adhérence). Pour que la frontière de E' soit vide, il faut et il suffit que E' soit un sous-topos ouvert et fermé de E, ou encore, qu'il soit le sous-topos ouvert de E défini par un ouvert V de E qui soit <u>sommande direct</u> de l'objet final e, i.e. tel qu'il existe un sous-objet V de e avec $e \simeq U\amalg V$. Pour que l'extérieur de E' soit "vide" i.e. pour que l'adhérence soit égale à E, il faut et il suffit que $i: E' \to E$ soit dominant (8.8).

d) Soient S un objet de E, $F=E_{/S}$ le topos induit, $F' \simeq F_{/S'}$ le sous-topos de F induit par le sous-topos E' de E. Montrer que l'extérieur (resp. l'adhérence, resp. l'intérieur, resp. la frontière) de F' est induit par l'extérieur (resp. ...) de E'.

<u>Exercice</u> 9.4.9. (<u>Sous-topos localement fermés d'un topos</u>.) Un sous-topos F d'un topos E est dit <u>sous-topos localement fermé</u> de E s'il est une intersection d'un sous-topos ouvert et d'un sous-topos fermé.

a) Prouver que l'intersection d'une famille finie de sous-topos localement fermés de E est localement fermé. Si $g: E' \to E$ est un morphisme de topos, prouver que l'image inverse (9.1.6 d)) d'un sous-topos localement fermé de E est un sous-topos localement fermé de E'.

b) Soient X un espace topologique, et E=Top(X). Pour toute partie X' de X, considérons le sous-topos T(X') de E image essentielle de Top(X') dans Top(X). Montrer que si X' est une partie localement fermée, T(X') est un sous-topos localement fermé de E, la réciproque étant vraie si on suppose de plus X et X' sobres. Prouver que $X' \mapsto T(X')$ établit un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des parties localement fermées X' de X et l'ensemble des sous-topos localement fermés de E.

c) Soit F un sous-topos de E. Montrer que tout sous-topos ouvert de

F est induit par un sous-topos ouvert de E. (Utiliser 9.1.8 c)). Montrer que F est un sous-topos localement fermé deE si et seulement si c'est un sous-topos ouvert de son adhérence (9.4.8 a)). En conclure, en utilisant 9.4.8 d), que la propriété pour F d'être un sous-topos localement fermé de E est une propriété locale sur E.

d) Soit F un sous-topos localement fermé de E. Montrer que parmi toutes les façons d'écrire F comme un intersection d'un sous-topos ouvert $\mathcal{U}$ et d'un sous-topos fermé $\mathcal{F}$ de E, il en est une avec $\mathcal{U}$ le plus grand possible, et $\mathcal{F}$ le plus petit possible. (Prendre $\mathcal{F}$ = adhérence de F, et $\mathcal{U}$ = plus grand sous-topos ouvert induisant sur $\mathcal{F}$ le sous-topos F.) Compatibilité de la formation de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ avec la localisation sur E.

Exercice 9.4.10. Développer la notion de sous-topos constructible, localement constructible, quasi-constructible, localement quasi-constructible, sur le modèle des notions familières dans le cas des espaces topologiques (EGA O_{III} 9.1 , EGA IV 10.1). Dans le cas d'un topos de la forme Top(X), on retrouvera une bijection entre l'ensemble des parties constructibles (resp. ...) de X, et l'ensemble des sous-topos constructibles (resp. ...) de Top(X).

9.5. Le théorème de recollement

9.5.1. Soit f : A→B un foncteur entre deux catégories. Désignons par (B,A,f) la catégorie suivante : les objets de (B,A,f) sont les triples

$$(X,Y,u)$$

où X est un objet de B, Y un objet de A , et un morphisme de X dans f(Y) ; les morphismes entre deux objets (X,Y,u) et (X',Y',u') sont les couples (m,m'), où m est un morphisme de X dans X' et m' un morphisme de Y dans Y' , tels que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "m"'] & f(Y) \arrow[d, "f(m')"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & f(Y') \end{tikzcd}$$

la composition des morphismes est définie de la manière évidente.

9.5.2. Remarquons que la catégorie (B,A,f) dépend de manière fonctorielle du système des données A, B, f, en un sens que nous laissons au lecteur le soin de préciser. En particulier, si f' est un deuxième foncteur de A dans B, alors tout morphisme de foncteurs

$$f \xrightarrow{\ u\ } f'$$

définit un foncteur $(A,B,f) \longrightarrow (A,B,f')$, qui est un isomorphisme si $u : f \longrightarrow f'$ l'est.

9.5.3. Revenons à la situation de 9.3., et considérons la catégorie $(\mathfrak{F},\mathfrak{U},\rho)$ définie dans 9.5.1. A chaque objet X de E correspond un objet $(i^*X\ ,\ j^*X\ ,\ h(X) : i^*X \longrightarrow \rho j^*X)$ de $(\mathfrak{F},\mathfrak{U},\rho)$ où $h(X)$ s'obtient en transformant par le foncteur i^* le morphisme d'adjonction $X \longrightarrow j_*j^*(X)$ (on a $\rho = i^*j_*$ (9.10)). On a donc défini ainsi un foncteur

(9.5.3.1) $$\Phi : E \longrightarrow (\mathfrak{F},\mathfrak{U},\rho) \quad .$$

Théorème 9.5.4.

a) Soient E un topos, $\mathfrak{U}$ un sous-topos ouvert de E, $\mathfrak{F}$ le sous-topos fermé complémentaire. Le foncteur

$$\rho = i^*j_* : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{F}$$

est exact à gauche et accessible et le foncteur Φ (9.5.3.1) est une équivalence de catégories.

b) Réciproquement, soient $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{F}$ deux topos et $\rho : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{F}$ un foncteur de recollement (9.3.6) (i.e. accessible (I 9.2) et exact à gauche). La catégorie $E = (\mathfrak{F},\mathfrak{U},\rho)$ est un topos. Soient $\emptyset_{\mathfrak{F}}$ un objet initial de $\mathfrak{F}$, $e_{\mathfrak{U}}$ un objet final de $\mathfrak{U}$, et soit $U = (\emptyset_{\mathfrak{F}}\ ,\ e_{\mathfrak{U}}\ ,\ \emptyset_{\mathfrak{F}} \longrightarrow \rho(e_{\mathfrak{U}})) \in \mathrm{Ob}\, E$. Le foncteur $X \longmapsto (\emptyset_{\mathfrak{F}}\ ,\ X\ ,\ \emptyset_{\mathfrak{F}} \longrightarrow \rho(X))$ induit une équivalence de $\mathfrak{U}$ sur $E_{/U}$, donc avec le sous-topos ouvert $\mathfrak{U}'$ de E défini par U. Le foncteur $Y \longmapsto (Y,e,Y \longrightarrow \rho(e))$ est un plongement fermé (9.3.5), i.e. induit une équivalence de $\mathfrak{F}$ avec un sous-topos fermé $\mathfrak{F}'$ de E. Les sous-topos $\mathfrak{U}'$ et

$\mathcal{F}'$ *sont complémentaires. Soit* $\rho' : \mathcal{U}' \longrightarrow \mathcal{G}'$ *le foncteur de recollement. Les foncteurs* ρ *et* ρ' *sont compatibles avec les équivalences explicitées ci-dessus.*

Définition 9.5.5. *Soient* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{F}$ *deux topos et* $\rho : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$ *un foncteur de recollement* (9.3.6). *Le topos* $(\mathcal{F},\mathcal{U},\rho)$ *est appelé le* topos construit à partir de $\mathcal{U}$ et de $\mathcal{F}$ par recollement à l'aide du foncteur ρ.

9.5.6. *Démonstration de* 9.5.4. a) (*) La première assertion n'est qu'un rappel de 9.4.1 d). Le couple de foncteurs (i^*,j^*) est conservatif, ou encore, fidèle (9.4.1 c)). A fortiori le foncteur Φ est fidèle. Montrons qu'il est pleinement fidèle. Il résulte de 9.3.3 b) que, pour tout objet X de E, le diagramme ci-après est cartésien :

(*)
$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & j_*j^*X \arrow[d] \\
i_*i^*X \arrow[r] & i_*i^*j_*j^*X
\end{tikzcd} \qquad ; .
$$

Soient alors X et Y deux objets de E, et (m,m') :

$$
\begin{tikzcd}
i^*X \arrow[r] \arrow[d, "m"'] & i^*j_*j^*X \arrow[d, "i^*j_*m'"] \\
i^*Y \arrow[r] & i^*j_*j^*Y
\end{tikzcd}
$$

un morphisme entre $\Phi(X)$ et $\Phi(Y)$. En utilisant la fonctorialité du produit cartésien et les diagrammes (*), on obtient un morphisme $w : X \longrightarrow Y$ qui rend commutatif les diagrammes ci-après :

(*) Pour un énoncé de recollement plus général que 9.5.5, cf. exercice.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dash, "w"] \arrow[d] & Y \\
j_*j^*X \quad j_*m' \quad j_*j^*Y
\end{tikzcd}
\quad , \qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dash, "w"] \arrow[d] & Y \\
i_*i^*X \quad i_*m \quad i_*i^*Y
\end{tikzcd}
$$

En appliquant respectivement les foncteurs j^* et i^* on obtient : $j^*w = m'$, $i^*w = m$. Montrons maintenant que le foncteur Φ est essentiellement surjectif. Soit $(Y,X,u : Y \to i^*j_*(X))$ un objet de $(\mathcal{F},\mathcal{U},i^*j_*)$. On en déduit un diagramme :

$$
\begin{tikzcd}
 & j_*X \arrow[d] \\
i_*Y \arrow[r, "i_*u"] & i_*i^*j_*X
\end{tikzcd}
$$

D'où, en prenant le produit fibré, un diagramme cartésien :

(**)
$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r] \arrow[d] & j_*X \arrow[d] \\
i_*Y \arrow[r, "i_*u"] & i_*i^*j_*X
\end{tikzcd}
$$

Nous laissons au lecteur, le soin de montrer que $\Phi(W)$ est insomorphe à $(Y,X,u: Y \to i^*j_*(X))$ et que le diagramme (**) est isomorphe au diagramme (*) relatif à W.

9.5.7. <u>Démonstration</u> de 9.5.4.1). Nous nous bornerons à montrer que $(\mathcal{F},\mathcal{U},\rho)$ est un topos. La démonstration des autres assertions est laissée au lecteur. Vérifions les propriétés a), b), c), d) de 1.1.2 .

a) <u>Les limites projectives finies sont représentables</u> : Clair car les catégories $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ sont des topos et ρ commute aux limites projectives finies.

b) <u>Les sommes directes sont représentables</u>, <u>disjointes et universelles</u> : Soit $(Y_i \xrightarrow{u_i} \rho(X_i))$, $i \in I$, une famille d'objets de $(\mathcal{F},\mathcal{U},\rho)$
Par définition des limites inductives, on a un morphisme canonique

$$\coprod_{i \in I} \rho(X_i) \longrightarrow \rho(\coprod_{i \in I} X_i)$$

d'où, en composant avec le morphisme $\coprod u_i$, un morphisme

$$n : \coprod_{i\in I} Y_i \longrightarrow (\coprod_{i\in I} X_i) \ .$$

On vérifie immédiatement que ce dernier objet est la somme directe de la famille considérée, et que cette somme directe est disjointe et universelle.

c) <u>Les relations d'équivalence sont effectives et universelles</u> :

Soit

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \rightrightarrows & Y \\ \downarrow & & \downarrow w \\ \rho(R_2) & \overset{f(u)}{\underset{f(v)}{\rightrightarrows}} & \rho(X) \end{array}$$

une relation d'équivalence sur l'objet $Y \xrightarrow{w} \rho(X)$. La relation $R_1 \rightrightarrows Y$ est alors une relation d'équivalence sur Y dans $\mathfrak{F}$, et la relation $R_2 \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} X$ est un relation d'équivalence sur X dans $\mathfrak{U}$. Les quotients Y/R_1, $\rho(X)/\rho(R_2)$, X/R_2 sont représentables dans $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{U}$ car ces catégories sont des topos. De plus, par définition des limites inductives, le morphisme canonique $\rho(X) \longrightarrow \rho(X/R_2)$ se factorise par $\rho(X)/\rho(R_2)$. On en déduit, par la fonctorialité des limites inductives, un morphisme canonique $Y/R_1 \xrightarrow{t} \rho(X/R_2)$. On vérifie que ce dernier objet est le quotient de $Y \xrightarrow{w} \rho(X)$ par la relation d'équivalence considérée, que ce quotient est effectif (I 10) et que toutes ces propriétés sont conservées par changement de base.

d) $(\mathfrak{F},\mathfrak{U},\rho)$ <u>admet une petite famille génératrice</u>. Cette propriété résulte de (1.9.2 5) (compte tenu de ce que ρ est accessible), en prenant $B=\Delta_1=(0 \xrightarrow{f} 1)$, $E_o=\mathfrak{F}$, $E_1=\mathfrak{U}$, $f^*=\rho : E_1 \longrightarrow E_o$, d'où $\underline{\mathrm{Hom}}_B(B,E)=(\mathfrak{F},\mathfrak{U},\rho)$.

On peut aussi éviter le recours à 1.9.25 (dont la démonstration donnée était assez pénible !) et utiliser l'hypothèse sur ρ sous la forme que ρ admet un pro-adjoint

$$\sigma : \mathrm{Pro}(\mathfrak{F}) \longrightarrow \mathrm{Pro}(\mathfrak{U}) \ ,$$

(cette interprétation (I 8) reposant sur (I 9.), dont la démonstration est nettement plus compréhensible). Il suffit alors de noter que si C' (resp. C") est une sous-catégorie génératrice de $\mathfrak{U}$(resp. $\mathfrak{F}$), et si pour tout X"$\in$Ob C", on représente σ(X") sous forme d'un système projectif $(\sigma(X")_i)_{i\in I(X')}$, où I(X') est un petit ensemble ordonné filtrant, alors la famille des objets de E qui sont, soit de la forme $(\emptyset_{\mathfrak{F}}, X', \emptyset_{\mathfrak{F}} \longrightarrow \emptyset(X'))$ avec X'$\in$Ob C', soit de la forme $(X", \sigma(X")_i$, $u_{X"}: X" \longrightarrow \rho(\sigma(X")_i)$, ou X"$\in$Ob $C"^X$ $i\in I$ (X") , et $u_{X"}$ correspond par adjonction au morphisme canonique $\sigma(X")\longrightarrow\sigma(X")_i$, -est une famille génératrice (évidemment petite) si C', C" sont choisis petits. La vérification de ce fait est effectivement immédiate, et laissée au lecteur.

9.5.4.8. Utilisons les notations de 9.5.7 b), et montrons comment on peut expliciter, à isomorphismes canoniques près de foncteurs, le système de foncteurs (9.3.6.2), où on fait $E=(\mathfrak{F},\mathfrak{U},\rho)$. Le détail des vérifications des assertions ci-dessous (essentiellement mécaniques à l'aide de 9.5.4) est laissé au lecteur.

9.5.8.1. Le foncteur

$$i^* : (\mathfrak{F},\mathfrak{U},\rho) \longrightarrow \mathfrak{F}$$

est donné par

$$i^*(X,Y,u: X\longrightarrow\rho(Y)) = X .$$

9.5.8.2. Le foncteur

$$i_*:\mathfrak{F} \longrightarrow (\mathfrak{F},\mathfrak{U},\rho)$$

est donné par $i_*(X)=(X,e,X\longrightarrow \rho(e))$ (e=objet final de $\mathfrak{U}$).

9.5.8.3. Le morphisme d'adjonction

$$id \longrightarrow i_*i^*$$

est isomorphe au morphisme fonctoriel

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "id"'] & \rho(Y) \arrow[d] \\ X \arrow[r] & \rho(e) \end{tikzcd}$$

9.5.8.4. Le foncteur

$$j^*: (\mathcal{F},\mathcal{U},\rho) \longrightarrow \mathcal{U}$$

est donné par $j^*(X,Y,u : X \longrightarrow \rho(Y))=Y$.

9.5.8.5. Le foncteur

$$j_!: \mathcal{U} \longrightarrow (\mathcal{F},\mathcal{U},\rho)$$

est donné par $j_!(Y)=(\emptyset_{\mathcal{F}},Y,\emptyset_{\mathcal{F}} \longrightarrow \rho(Y))$

($\emptyset$ objet initial de)

9.5.8.6. Le foncteur

$$j_* : \mathcal{U} \longrightarrow (\mathcal{F},\mathcal{U},\rho)$$

est donné par $j_*(Y)=(\rho(Y),Y,\mathrm{id} : \rho(Y) \longrightarrow \rho(Y))$.

9.5.8.7. Le morphisme d'adjonction

$$j_!j^* \longrightarrow \mathrm{id}$$

est isomorphe au morphisme fonctoriel

$$\begin{tikzcd} \emptyset_{\mathcal{F}} \arrow[r] \arrow[d] & \rho(Y) \arrow[d, "\rho(\mathrm{id})"] \\ X \arrow[r, "u"] & \rho(Y) \end{tikzcd} .$$

9.5.8.8. Le morphisme d'adjonction

$$\mathrm{id} \longrightarrow j_*j^*$$

est isomorphe aux morphisme fonctoriel

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"'] & \rho(Y) \arrow[d, "\rho(\mathrm{id})"] \\ \rho(Y) \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \rho(Y) \end{tikzcd}$$

<u>Exercice</u> 9.5.9. (<u>Propriétés d'exactitude d'un topos recollé</u>.) Soient $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ deux topos, $\rho : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F}$ un foncteur de recollement, $E=(\mathcal{F},\mathcal{U},\rho)$ le topos recollé, $j : \mathcal{U} \longrightarrow E$ et $i : \mathcal{F} \longrightarrow E$ les morphismes de topos canoniques, de sorte que $\rho = i^*j_*$.

a) Prouver que i^* commute aux (petits) produits (i.e. (1.8 ou **1.8**) le foncteur i^* admet un adjoint à gauche $i_!$) si et seulement si il en est de même de ρ, i.e. (loc. cit.) si et seulement si ρ admet un adjoint à gauche $\sigma : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{U}$ (ou encore si et seulement si le proadjoint de ρ

restreint à $\mathcal{F}$ (9.6.3) se factorise à isomorphisme près par $\mathcal{U}$) : on a alors $\sigma = j^* i_!$. Donc les foncteurs de recollement ρ ayant cette propriété correspondent à isomorphisme près aux foncteurs $\sigma : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{U}$ qui ont un adjoint à droite, i.e. (1.6) qui commutent aux U-limites inductives, ou encore qui sont continus. Lorsque $\mathcal{F}$ est équivalent à un topos $C^\sim$, où C est un U-site, ces foncteurs correspondent donc à isomorphisme près aux foncteurs continus $C \longrightarrow \mathcal{U}$ (III 1.2 et 1.7).

b) Supposons que le foncteur $i_!$ soit défini. Montrer que pour que $i_!$ commute à un type déterminé de petites limites projectives, il faut et il suffit que $\sigma : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{U}$ y commute. (Pour la nécessité, utiliser que j^* commute aux petites limites projectives ; pour la suffisance, utiliser la description équivalente de E en termes de σ comme formé des triples (Y,X,u) avec $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}$, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}$, $u : \sigma(Y) \longrightarrow X$.)

c) Déduire de a) et b) un exemple de plongement fermé de topos $i : \mathcal{F} \longrightarrow E$ tel que $i_!$ existe, mais ne commute ni aux produits fibrés, ni aux limites projectives filtrantes.(Il suffit de trouver un foncteur continu entre deux topos qui ne possède aucune de ces deux propriétés d'exactitude.)

Exercice 9.5.10. (Recollement de topos de la forme $\hat{C}$.) Soient C une petite catégorie, et $E = \hat{C}$, qui est un U-topos.

a) Se rappeler que les ouverts U de E correspondent aux cribles C' de C (1.4.1 , 4.2), $E_{/U}$ étant alors équivalent à $\widehat{C'}$, le foncteur $j^* : E \longrightarrow E_{/U}$ s'identifiant au foncteur restriction (1.5.11), i.e. le morphisme d'inclusion $j : E_{/U} \longrightarrow E$ étant $\hat{f} : \widehat{C'} \longrightarrow \hat{C}$ (4.6.1), où $f : C' \longrightarrow C$ est l'inclusion. Soit C" la sous-catégorie pleine de C complémentaire de C' (i.e. Ob C" est le complémentaire de Ob C' dans Ob C), $g : C'' \longrightarrow C$ l'inclusion. Alors le sous-topos fermé $\mathcal{F}$ de $E = \hat{C}$, complémentaire du sous-topos ouvert défini par C', est canoniquement équivalent à $\widehat{C''}$, le morphisme d'inclusion $i : \mathcal{F} \longrightarrow E$ s'identifiant à $\hat{g} : \widehat{C''} \longrightarrow \hat{C}$.

b) Considérer le foncteur

(9.5.10.1) $\quad h : C'^{\circ} \times C'' \longrightarrow (\mathrm{Ens})\ ,\ h(X',X'') = \mathrm{Hom}_C(X',X'')\ ,$

et noter que C se reconstitue à isomorphisme près, avec sa sous-catégorie pleine C', par la connaissance des catégories C',C" et du bifoncteur h (ce dernier pouvant être choisi arbitrairement). (Comparer 9.7.1 plus bas.) La donnée de h équivaut à celle d'un foncteur $C'' \to \widehat{C'} = \underline{\mathrm{Hom}}(C'^{\circ},(\mathrm{Ens}))$, ou encore (III 1.2 et 1.7) à celle d'un foncteur

(9.5.10.2) $\quad \sigma : \widehat{C''} \longrightarrow \widehat{C'}$

continu, i.e. (1.6) commutant aux petites limites inductives, ou encore, admettant un adjoint à droite.

(9.5.10.3) $\quad \rho : \widehat{C'} \longrightarrow \widehat{C''}\ .$

Montrer que ρ n'est autre que le foncteur de recollement associé au sous-topos ouvert $\widehat{C'}$ de $E=\widehat{C}$.

c) Déduire de a) et b) que si on se donne un foncteur de recollement (9.5.10.3) entre deux catégories de préfaisceaux, d'où un topos recollé E, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) E est équivalent à un topos de laforme $\widehat{C}$.

(ii) Le foncteur ρ commute aux petits produits (ou encore, il admet un adjoint à gauche (9.5.10.2).

(iii) Le morphisme d'inclusion $i : \widehat{C''} \longrightarrow E$ est "essentiel" i.e. i^* commute aux produits , ou encore i^* admet un adjoint à gauche $i_!$.

Lorsqu'il en est ainsi, expliciter une catégorie C telle que $E \approx \widehat{C}$ à l'aide du bifoncteur (9.5.10.1) défini par la restriction de (9.5.10.2) à C" .

d) Montrer qu'un topos obtenu en recollant deux topos ponctuels n'est pas nécessairement équivalent à un topos de la forme $\widehat{C}$.

<u>Exercice</u> 9.5.11. (Morphisme d'un topos recollé dans un topos.)

a) Soient $:\mathcal{f} \longrightarrow \mathcal{F}$ un foncteur entre deux catégories,

$E = (\mathfrak{F},\mathfrak{U},\rho)$ la catégorie "recollée" de 9.5.1, et F une catégorie quelconque. Considérer le foncteur $f \mapsto \rho\circ f$:

$$\bar{\rho} : \bar{\mathfrak{U}} = \underline{\mathrm{Hom}}(F,\mathfrak{U}) \longrightarrow \bar{\mathfrak{F}} = \underline{\mathrm{Hom}}(F,\mathfrak{F}) ,$$

et définir une équivalence de catégories

$$\underline{\mathrm{Hom}}(F,E) \xrightarrow{\approx} (\bar{\mathfrak{U}},\bar{\mathfrak{F}},\bar{\rho}) .$$

b) Soit $f : F \to E$ un foncteur, et considérons ses composés avec les foncteurs canoniques $j^* : E \to \mathfrak{U}$ et $i^* : E \to \mathfrak{F}$. Montrer que f commute à un type déterminé de limites inductives (supposé représentable dans $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{F}$, donc dans E) si et seulement si j^*f et i^*f y commutent. Montrer que si ρ commute à un type déterminé de limites projectives (qui est donc représentable dans E), alors f y commute si et seulement si il en est de même de j^*f et i^*f .

c) Supposons maintenant que $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{F}$ soient des topos, et ρ un foncteur de recollement. Soit F un topos, $f : F \to E$ un foncteur. Conclure de b) que f est un foncteur image inverse associé à un morphisme de topos $E \to F$ si et seulement si il en est de même des foncteurs $j^*f : F \to \mathfrak{U}$ et $i^*f : F \to \mathfrak{F}$. Conclure de ceci et de a) que l'on a une équivalence entre la catégorie $\underline{\mathrm{Homtop}}(E,F)$, et la catégorie des triples (f',f'',u), où f' (resp. f'') est un objet de $\underline{\mathrm{Homtop}}(\mathfrak{U},F)$ (resp. $\underline{\mathrm{Homtop}}(\mathfrak{F},F)$), et où $u : f''^* \to \rho\circ f'^*$ est un homomorphisme de foncteurs $F \to \mathfrak{F}$: si f est un objet de $\underline{\mathrm{Homtop}}(E,F)$, (f',f'',u) le triple correspondant, alors $f' = f\circ j$, $f'' = f\circ i$.

d) Préciser en quel sens on peut dire que c) fournit une caractérisation à équivalence près (dans une 2-catégorie de topos) du topos E en termes du triple $(\mathfrak{U},\mathfrak{F},\rho)$.

Exercice 9.5.12. (Recollement de deux espaces topologiques.)

a) Soient X un espace topologique, $\rho : \mathrm{Top}(X) \to (\mathrm{Ens}) = \mathrm{Top}(pt)$ un foncteur de recollement, i.e. (I 8.) un foncteur proreprésentable, $A \in \mathrm{Ob}\ \mathrm{Pro}(\mathrm{Top}(X))$ l'objet qui le proreprésente, E le topos déduit de ρ par recollement. Montrer que E est équivalent à un topos de la forme Top(Y) si et seulement si A est isomorphe à un objet de Pro(Ouv(X)).

En conclure que si X n'est pas vide, on peut trouver ρ tel que E ne soit pas équivalent à un topos de la forme Top(Y).

b) Plus généralement, considérons un foncteur recollement $\rho : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(Y)$, avec X,Y deux espaces topologiques. En déduire une application

$$\phi : X \longrightarrow \mathrm{Ob\,Pro}(\mathrm{Top}(Y))$$

(composée de $X \longrightarrow \mathrm{Ob}\underline{\mathrm{Point}}(\mathrm{Top}(X)) \longrightarrow \mathrm{Ob\,Pro}(\mathrm{Top}(X))$ (6.8.5) et du pro-adjoint σ de ρ. (N. B. pour $x \in X$, $\phi(x)$ s'identifie à la <u>fibre en</u> x <u>du faisceau de recollement</u> (9.6.4) <u>défini par</u> ρ.) Montrer que si E est équivalent à un topos de la forme Top(Z), alors ϕ prend ses valeurs dans l'image essentielle de Pro(Ouv(Y)).

<u>Problème</u> : A-t-on une réciproque ?

9.6. Faisceau de recollement

Nous avons vu dans 9.5.4 que la donnée d'un topos E muni d'un ouvert U revient essentiellement à celle de deux topos $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ et d'un foncteur de recollement

(9.6.1) $$\rho : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F}$$

i.e. d'un foncteur admettant un pro-adjoint

(9.6.2) $$\sigma : \mathrm{Pro}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Pro}(\mathcal{U}) .$$

D'après le sorite sur les foncteurs proadjoints (I 8), le foncteur ρ est connu à isomorphisme unique près (et par suite le topos recollé $E = (\mathcal{F},\mathcal{U},\rho)$ est connu à équivalence de topos près) quand on connaît le foncteur σ, ou encore, le foncteur induit par σ

(9.6.3) $$\sigma_\circ : \mathcal{F} \longrightarrow \mathrm{Pro}(\mathcal{U}) .$$

Le foncteur σ est déterminé, à isomorphisme unique près, par la propriété de commuter aux petites limites projectives filtrantes et de prolonger le foncteur $\sigma_\circ$. D'autre part, pour qu'un foncteur donné (9.6.3) soit isomorphe à un pro-adjoint, il faut et il suffit évidemment que pour tout objet X de $\mathcal{U}$, le foncteur contravariant

$$Y \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(\mathcal{U})}(\sigma^{\circ}(Y),X)$$

sur $\mathcal{F}$ soit représentable, ou encore, que ce soit un faisceau sur $\mathcal{F}$ pour la topologie canonique (1.1.2 (iii)). On voit tout de suite que ceci signifie aussi que le foncteur opposé

(9.6.4) $$\sigma^{\circ\circ} : \mathcal{F}^{\circ} \longrightarrow \mathrm{Pro}(\mathcal{U})^{\circ} \subset \check{\mathcal{U}} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{U},(\mathrm{Ens}))$$

est un faisceau sur $\mathcal{F}$ à valeurs dans $\mathrm{Pro}(\mathcal{U})^{\circ}$ (II 6.1). Ainsi, la donnée d'un foncteur de recollement (9.6.1) équivaut aussi (à isomorphisme près) à celle d'un faisceau sur $\mathcal{F}$ à valeurs dans $\mathrm{Pro}(\mathcal{U})^{\circ}$. Le faisceau ainsi associé à un foncteur de recollement (ou à une situation $(E,U,\mathcal{F})$ comme dans (9.3) s'appelle le faisceau de recollement associé au foncteur de recollement envisagé ρ (resp. à l'ouvert U du topos E).

Exercice 9.6.5. Préciser 9.5.4 en un énoncé de 2-équivalence de 2-catégories, entre la 2-catégorie formée des couples (E,U) d'un topos E et d'un ouvert U dudit, et la 2-catégorie formée des triples $(\mathcal{U},\mathcal{F},\rho)$ de topos $\mathcal{U},\mathcal{F}$ et d'un foncteur de recollement $\rho : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F}$ (la description explicite des 2-catégories en question étant à la charge du lecteur). Donner une variante de cet énoncé faisant intervenir la 2-catégorie des triples $(\mathcal{U},\mathcal{F},\phi)$, où ϕ est maintenant un faisceau sur $\mathcal{F}$ à valeurs dans $\mathrm{Pro}(\mathcal{U})^{\circ}$.

9.7. Points d'un topos recollé

9.7.1. Soient C une catégorie, et

$$u : D' \longrightarrow C \quad , \quad v : D'' \longrightarrow C$$

deux foncteurs pleinement fidèles, tels que les images essentielles C', C" de u et de v soient telles que

$$\mathrm{Ob}\ C' \cap \mathrm{Ob}\ C'' = \emptyset \ , \ \mathrm{Ob}\ C' \cup \mathrm{Ob}\ C'' = \mathrm{Ob}\ C.$$

Supposons de plus que

$$X' \in \mathrm{Ob}\ C' \ , \ X'' \in \mathrm{Ob}\ C'' \Longrightarrow \mathrm{Hom}(X'',X') = \emptyset \ ,$$

ou ce qui revient au même, qu'on ait

$$\mathrm{Hom}(v(A''),u(A')) = \emptyset \quad \text{pour } A' \in \mathrm{Ob}\ D',\ A'' \in \mathrm{Ob}\ D'' \ .$$

Il est alors immédiat que la catégorie C se reconstitue, à isomorphisme canonique près, par la connaissance des catégories C' et C" et du foncteur

$$(X',X'') \mapsto \mathrm{Hom}(X',X'') : C'^{\circ} \times C'' \longrightarrow (\mathrm{Ens}) \ ;$$

de même, C se reconstitue à équivalence près (celle-ci définie à isomorphisme unique près) par la connaissance de D',D" et du foncteur

$$(A',A'') \mapsto \mathrm{Hom}(u(A'),v(A'')) : D'^{\circ} \times D'' \longrightarrow (\mathrm{Ens}) \ .$$

Cette remarque s'applique en particulier à la situation décrite dans la proposition suivante, et nous montre que la catégorie Point(E) est déterminée, à équivalence près, par la connaissance des catégories Point($\mathcal{U}$) et Point($\mathcal{F}$) et d'un certain foncteur

$$\mathrm{Point}(\mathcal{U})^{\circ} \times \mathrm{Point}(\mathcal{F}) \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

déduit du foncteur de recollement $\rho : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F}$.

Proposition 9.7.2. *Soient* E *un topos,* U *un ouvert de* E, $\mathcal{U} = E_{/U}$ *et* $\mathcal{F}$ *le sous-topos fermé de* E *complémentaire de* U. *Considérons les foncteurs* $p \mapsto p \circ j$ *et* $q \mapsto q \circ i$ *induits par les morphismes d'inclusion* $j : \mathcal{U} \longrightarrow E$ *et* $i : \mathcal{F} \longrightarrow E$:

(9.7.2.1) $\qquad u : \mathrm{Point}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathrm{Point}(E), \quad v : \mathrm{Point}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Point}(E)$.

Alors on a ce qui suit :

a) *Les foncteurs précédents* u *et* v *sont pleinement fidèles, et tout point de* E *appartient à l'image essentielle de l'un ou l'autre des foncteurs* u *et* v *exclusivement*.

b) *Soient* p *et* q *deux points de* E, *tels que* p (*resp.* q) *appartienne à l'image essentielle de* u (*resp. de* v). *Alors on a*

(9.7.2.2) $\qquad \mathrm{Hom}(q,p) = \emptyset$.

c) *Soient* p (*resp.* q) *un point de* $\mathcal{U}$ (*resp.* $\mathcal{F}$). *On a alors un isomorphisme, fonctoriel en* (q,p) :

(9.7.2.3) $\quad \mathrm{Hom}(u(p),v(q)) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Pro}(\rho)(p),q) \simeq \mathrm{Hom}(p,\sigma(q))$,

où

$$\sigma : \mathrm{Pro}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Pro}(\mathcal{U})$$

est le foncteur (9.6.2) *pro-adjoint du foncteur de recollement* $\rho : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F}$,

et où $\quad \rho : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F}$, on a identifié (à équivalence près) les catégories $\underline{\mathrm{Point}}(\mathfrak{U})$, $\underline{\mathrm{Point}}(\mathfrak{F})$ à des sous-catégories pleines de $\mathrm{Pro}(\mathfrak{U})$, $\mathrm{Pro}(\mathfrak{F})$ respectivement (6.8.5).

Démonstration. a) La pleine fidélité de u et v est connue (9.1.4). L'assertion sur les images essentielles de u,v résulte des critères 9.2.5 et 9.2.4 pour qu'un point $P \to E$ se factorise à isomorphisme près par $\mathfrak{U}$ resp. $\mathfrak{F}$, compte tenu du fait que le topos ponctuel P n'a que deux ouverts, savoir l'objet initial et l'objet final de P.

b) Compte tenu de a), l'assertion signifie que si le point $p: P \to E$ se factorise par $\mathfrak{U}$, il en est de même de tout point $p': P \to E$ tel que $\mathrm{Hom}(p',p) \neq \emptyset$. Or si $\alpha: p' \to p$ il induit $p^*(\mathfrak{U}) \to p'^*(\mathfrak{U})$, et alors $p^*(\mathfrak{U}) = e_P$ implique $p'^*(\mathfrak{U}) = e_P$, c.q.f.d.

c) Grâce au lemme 9.7.2.4 ci-dessous, appliqué aux inclusions $j: \mathfrak{U} \to E$ et $i: \mathfrak{F} \to E$, on a un diagramme de foncteurs commutatif à des isomorphismes canoniques près

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Point}}(\mathfrak{U}) \arrow[r, "u"] \arrow[d, hook] & \underline{\mathrm{Point}}(E) \arrow[d, hook] & \underline{\mathrm{Point}}(\mathfrak{F}) \arrow[l, "v"'] \arrow[d, hook] \\
\mathrm{Pro}(\mathfrak{U}) \arrow[r, "\mathrm{Pro}(j_*)"] & \mathrm{Pro}(E) & \mathrm{Pro}(\mathfrak{F}) \arrow[l, "\mathrm{Pro}(i_*)"']
\end{tikzcd},$$

où les flèches verticales désignent les foncteurs pleinement fidèles canoniques (6.8.5). D'autre part, comme i_* admet un adjoint à gauche i^* $\mathrm{Pro}(i_*)$ admet un adjoint à gauche $\mathrm{Pro}(i^*)$ (I 8), et on obtient finalement des isomorphismes fonctoriels

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(u(p),v(q)) \simeq\ & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(E)}(\mathrm{Pro}(j_*)(p),\mathrm{Pro}(i_*)(q)) \\
& \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(\mathfrak{F})}(\mathrm{Pro}(i^*)(\mathrm{Pro}(j_*)(p)),q) \\
& \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(\mathfrak{F})}(\mathrm{Pro}(i^*j_*)(p),q),
\end{aligned}$$

ce qui n'est autre que la première formule (9.7.2.3), la deuxième étant alors triviale par définition de σ comme pro-adjoint de ρ. Cela prouve donc 9.7.2 , modulo le

Lemme 9.7.2.4. *Soit* $f: F \to E$ *un morphisme de topos. Alors le diagramme de foncteurs*

(9.7.2.4.1)
$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Point}}(F) \arrow[r, "p \mapsto f \circ p"] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Point}}(E) \arrow[d] \\
\mathrm{Pro}(F) \arrow[r, "\mathrm{Pro}(f_*)"] & \mathrm{Pro}(E)
\end{tikzcd}$$

<u>est commutatif à isomorphisme canonique près</u> (<u>les flèches verticales désignant les foncteurs pleinement fidèles</u> 6.8.5).

La vérification est immédiate à partir des définitions, et laissée au lecteur.

<u>Corollaire</u> 9.7.3. <u>Soit</u> E <u>un topos admettant assez de points</u>, <u>alors il en est de même pour tout sous-topos fermé</u> $\mathfrak{F}$ <u>de</u> E. <u>Plus précisément</u>, <u>si</u> $(p_i)_{i\in I}$ <u>est une famille conservative de points de</u> E, <u>alors la famille des points de</u> $\mathfrak{F}$, <u>définie par la sous-famille</u> $(p_i)_{i\in J}$ <u>formée des</u> p_i <u>qui proviennent de points de</u> $\mathfrak{F}$, <u>est conservative</u>. (Comparer 6.7.3 , 6.7.4.)

En effet, soit $f: X \longrightarrow Y$ une flèche de $\mathfrak{F}$ transformée en isomorphisme par les foncteurs fibre associés aux points envisagés de $\mathfrak{F}$. Comme $i^*i_* \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{F}}$, on voit que $i_*(f): i_*(X) \longrightarrow i_*(Y)$ est transformé en isomorphisme par les foncteurs fibre associés aux p_i avec $i\in J$; il en est de même pour les p_i avec $i\in I-J$, i.e, provenant de points de U, puisque j^*i_* est le foncteur constant de valeur l'objet final. Donc $i_*(f)$ est un isomorphisme, donc aussi $f \simeq i^*i_*(f)$, c.q.f.d.

<u>Remarque</u> 9.7.4. Si E est un topos ayant assez de points, il est clair qu'un ouvert U de E est déterminé quand on connaît la sous-catégorie pleine de <u>Point</u>(E) image essentielle de <u>Point</u>($E_{/U}$) ; en fait, si C est une sous-catégorie pleine de <u>Point</u>(E) définissant une famille conservative de points de E, il suffit même de connaître la sous-catégorie $C_{/U}$ des éléments de C appartenant à l'image essentielle de <u>Point</u>(U). De ceci et de 9.7.2 a) il résulte qu'un sous-topos fermé $\mathfrak{F}$ de E est déterminé quand on connaît l'image essentielle de <u>Point</u>($\mathfrak{F}$) dans <u>Point</u>(E) ou même seulement l'insersection de celle-ci avec C.

<u>Exercice</u> 9.7.5. Soit E un topos. Pour tout sous-topos F de E , soit P(F) le sous-ensemble de Point(E) formé des classes d'isomorphie de points de E qui se factorisent par E. Ainsi, P(F) est homéomorphe à Point(F) (9.1.8 c)). Montrer que si F est un sous-topos ouvert (resp. fermé, resp. localement fermé (9.4.9)) de E, alors P(F) est une partie

ouverte (resp. fermée, resp. localement fermée) de E. Montrer que lorsque E a suffisamment de points, il en est de même de tous sous-topos localement fermé de E, et l'application $F \longmapsto P(F)$ induit une bijection entre l'ensemble des sous-topos ouverts (resp.fermés, resp. localement fermés)de E, et l'ensemble des parties ouvertes (resp. fermées, resp. localement fermées) de Point(E). Généraliser les considérations précédentes au cas où on remplace Point(E) par n'importe quel sous-espace X de Point(E) correspodant à une famille conservative de points de E.

9.8. Compléments sur certains topos liés aux espaces topologiques.

Nous indiquons dans ce numéro quelques compléments, qui seront donnés sous forme d'exercices. Il est conseillé au lecteur de les parcourir, pour s'habituer au point de vue des topos dans diverses situations de type classique.

Exercice 9.8.1. (Descente de faisceaux sur un espace topologique.) Soit $f: X \longrightarrow Y$ une application continue d'espaces topologiques $\in \underline{U}$, d'où un foncteur

$$f^{*}: \mathrm{Top}(Y) \longrightarrow \mathrm{Top}(X).$$

a) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f^{*} est fidèle.

(ii) f^{*} est conservatif.

(iii) $f(X)$ est une partie très dense (EGA IV 10.1.3) de Y.

Il suffit pour ceci que f ou f_{sob} soit surjectif. Donner un exemple où f^{*} est fidèle et où $f = f_{sob}$ n'est pas surjectif (prendre X discret, f injectif, f(X)=ensemble des points fermés de Y, Y un espace topologique noethérien non discret). Donner un exemple ou f_{sob} est surjectif mais non f , un autre où f est surjectif mais non f_{sob} .

b) Supposons f(X) très dense dans Y, et sa topologie quotient de celle de X. Prouver que la flèche f^{*} de (Esp) est un morphisme de descente pour la catégorie fibrée des faisceaux d'ensembles sur des espaces variables, i.e. que le foncteur f^{*} induit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie Top(Y) dans la catégorie des objets de Top(X) munis d'une donnée de descente relativement à $f: X \longrightarrow Y$. Se ramener un cas f surjectif, et calquer le raisonnement de VIII 9.1 donné dans le contexte des topologies étales de schémas.)Donner une réciproque.

c) Supposons que $f(X)$ soit très dense dans Y, que sa topologie soit quotient de celle de X, et que les fibres de f soient connexes. Prouver que le foncteur f^* est pleinement fidèle. (Calquer le raisonnement de SGA 1 IX 3.4.) Donner une réciproque, tout au moins si les points de Y sont fermés.

d) Supposons que Y soit réunion d'ouverts Y_i au-dessus desquels X admette des sections. Prouver qu'alors f est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des faisceaux d'ensembles sur des espaces topologiques variables, i.e. que le foncteur envisagé dans c) est même une équivalence de catégories.

Exercice 9.8.2. (Topos quotients d'espaces topologiques. Etendues topologiques.)

a) Soit

(9.8.5.1) $$X_2 \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; X_1 \;\underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}}\; X_o$$

un objet semi-simplicial tronqué à l'ordre 2 de la catégorie (Esp) des espaces topologiques $\in \underline{U}$, d'où par les foncteurs images inverses un diagramme de catégories de faisceaux

$$\mathrm{Top}(X_o) \underset{p_2^*}{\overset{p_1^*}{\rightrightarrows}} \mathrm{Top}(X_1) \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; \mathrm{Top}(X_2) ,$$

(de façon plus précise, on a une catégorie cofibrée sur la catégorie des simplexes-types Δ_n, $0 \leqslant n \leqslant 2$). Montrer que la catégorie $\varprojlim$ de ce diagramme (i.e. la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X_o , munis d'une donnée de descente relativement au diagramme (9.8.6.1), i.e. d'un isomorphisme $p_1^*(F) \simeq p_2^*(F)$ tel que ...), est un $\underline{U}$-topos T. (Pour un énoncé plus général de stabilité des topos par opérations $\varprojlim$, cf VI) Définir un morphisme de topos $q: \mathrm{Top}(X_o) \longrightarrow T$, et prouver que pour tout

$\underline{U}$-topos E, $\underline{\text{Homtop}}$(T),E) est équivalent via q^* à la catégorie $\underleftarrow{\text{Lim}}$ du diagramme suivant de catégories, déduit de (9.8.2.1) :

$$\underline{\text{Homtop}}(\text{Top}(X_o),E) \rightrightarrows \underline{\text{Homtop}}(\text{Top}(X_1),E) \overset{\rightarrow}{\rightrightarrows} \underline{\text{Homtop}}(\text{Top}(X_2),E) .$$

b) En particulier, soit R une relation d'équivalence dans un objet X de (Esp), i.e. (I 10) un sous-objet R de XxX (N. B. l'inclusion $R \hookrightarrow X\times X$ est continue, mais la topologie de R n'est pas nécessairement induite par celle de XxX), tel que pour tout objet Y de (Esp), Hom(Y,R) soit le graphe d'une relation d'équivalence dans Hom(Y,X). On en déduit un diagramme de la forme (9.8.2.1), avec

$X_o=X, X_1=R, X_2=(R,p_2)\times_X(R,p_1)$, où p_1, p_2 sont les deux projections de R dans X, d'où un topos, qu'on notera Top(X)/R, ou même Top(X/R), voire X/R, par abus de notations, et qui joue le rôle d'un quotient de X par R, en un sens précisé par a). Supposons que la topologie de R soit induite par celle de XxX, et que, désignant par X/R l'espace topologique quotient ordinaire, X admette localement des sections sur X/R , prouver qu'alors T est équivalent à Top(X/R). (Utiliser 9.8.1 d)).

c) Soit $H \longrightarrow X$ un morphisme injectif de groupes topologiques, i.e. un monomorphisme d'objets groupes dans (Esp), et soit R la relation d'équivalence qu'il définit dans X, i.e. R=HxH, avec $p_1=pr_1$ et p_2 défini par l'action de H sur X via translations à gauche. Montrer que pour que la topologie de R soit induite par celle de XxX, il faut et il suffit que la topologie de H soit induite par celle de X. Donner des exemples où cette condition n'est pas remplie, et où la topologie quotient ordinaire de X/H est la topologie grossière avec a) $H=\underline{Z}\times\underline{Z}$, X = $\underline{R}$, et b) H = $\underline{R}$, X = $\mathbf{T}\times\mathbf{T}$, avec $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, ("géodésiques du tore"). Prouver que les deux topos obtenus sont équivalents et ne sont pas équivalents à Top(X/H) (qui est un topos final (2.2), ni à aucun topos de la forme Top(Y) .

d) Soit G un groupe topologique opérant sur un espace topologique X , d'où de façon bien connue un objet semi-simplicial

$$\dots\ G\times G\times X \rightrightarrows G\times X \rightrightarrows X\ .$$

Montrer que le topos T qui s'en déduit en vertu de a) s'identifie à la catégorie des espaces X' à groupe d'opérateurs G au-dessus de X, tels que $X' \longrightarrow X$ soit un étalement (compatible à l'action de G). En particulier, lorsque G est discret, on retrouve le topos Top(X,G) de 2.3.

Les considérations qui précèdent justifient la notation Top(X)/G, voire Top(X/G) ou même simplement X/G, pour le topos précédent T. On fera attention cependant que lorsque G est un groupe discret (pour fixer les idées) opérant proprement sur X, de sorte que l'espace quotient ordinaire X/G possède des propriétés assez raisonnables, le morphisme de topos naturel $T \longrightarrow \mathrm{Top}(X/G)$ déduit de la caractérisation universelle a) de T n'est une équivalence de topos que si G opère librement i.e. sans points fixes, i.e. lorsque $G\times X \longrightarrow X\times X$ est un monomorphisme ; donc dans le cas d'une "pré-relation d'équivalence (ou "groupoïde" au sens de (SGA 3 V 1) qui n'est pas une relation d'équivalence, la notion de passage au quotient au sens des topos (ou "passage au quotient fin") ne correspond pas en général (via la correspondance $X \longrightarrow \mathrm{Top}(Y)$) au passage au quotient topologique habituel.

e) Soit T un U-topos. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une famille $(S_i)_{i\in I}$ d'objets de T couvrant l'objet final de E, telle que pour tout $i\in I$, le topos induit $T_{/S_i}$ soit équivalent à un topos de la forme Top(X), avec $X\in(\mathrm{Esp})$.

i') Il existe un $S\in \mathrm{Ob}E$ couvrant l'objet final tel que le topos induit $T_{/S}$ soit équivalent à un topos de la forme Top(X).

(ii) Il existe un espace topologique X, et une pré-relation d'équivalence R dans X (au sens de la catégorie (Esp)) qui soit étale (i.e. telle que $p_1 : R \longrightarrow X$ soit un étalement), tels que T soit équivalent à Top(X/R), où les notations sont celles de b).

On dira alors que le topos T est localement un espace topologique, ou encore que T est une étendue topologique (ou simplement une étendue, si aucune confusion n'est à craindre).

f) Montrer que le topos T construit dans a) a suffisamment de points, et plus précisément, qu'il admet une famille conservative de points paramétrée par le (petit) ensemble X_o . En particulier, toute étendue à une petite famille conservative de points, donc a suffisamment de points. Lorsqu'une étendue T est réalisée sous la forme Top(X/R) comme dans e) ii), prouver que tout point de T est isomorphe à l'image d'un point de Top(X), donc est défini par un point ordinaire de X_{sob} (ou encore de X, lorsque X est sobre).

g) Montrer que le topos Top(X/G) de 2.3 est une étendue . (Utiliser sa description d) ou 7.1.10 c)) Montrer que pour tout $x \in X$, le monoïde des endomorphismes du point de Top(X,G)=Top(X)/G défini par x est canoniquement isomorphe au groupe de stabilité G_x de x. En particulier, les points d'une étendue peuvent avoir des groupes d'automorphismes non triviaux. Déterminer Point(J) pour l'étendue T définie par une prérelation d'équivalence étale dans un espace X, et montrer que tout endomorphisme d'un point de T est un automorphisme.

h) Soit T un topos. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout point p de T, tout endomorphisme de p (resp. tout automorphisme de p) est l'identité.

ii) Pour tout topos S ayant suffisamment de point, et tout morphisme de topos $f:S \longrightarrow T$, tout endomorphisme de f (resp. tout automorphisme de f) est l'identité.

Montrer de même que les conditions suivantes sont équivalentes :

i') Pour deux points p,q de T, il existe au plus un morphisme de p dans q.

ii') Pour deux morphismes $f,g:S \rightrightarrows T$ d'un topos S ayant suffisamment de points dans T, il existe au plus un morphisme de f dans g.

Lorsque ces dernières conditions sont vérifiées, on dit que le topos T est <u>ponctuellement rigide</u>, ou simplement <u>rigide</u>. Montrer que si X est un espace topologique muni d'une pré-relation d'équivalence étale R, l'étendue quotient T = Top(X)/R est rigide si et seulement si R est une relation d'équivalence.

i) Soient (X,G) un espace topologique à groupe discret d'opérateurs, H un sous-groupe distingué de G tel que l'opération induite de H sur X soit propre et libre, et soient X'=X/H, G'=G/H, de sorte que G' opère sur X' de façon évidente. Prouver que le morphisme de topos

$$\mathrm{Top}(X,G) \longrightarrow \mathrm{Top}(X',G')$$

induit par le morphisme canonique $(X,G) \longrightarrow (X',G')$ d'espaces à opérateurs (4.1.2) est une équivalence de topos.

Montrer que l'ensemble des ouverts du topos Top(X/G) s'identifie à l'ensemble des ouverts de X stables par l'action de G, ou encore à l'ensemble des ouverts de l'espace topologique quotient X/G. En conclure que Top(X/G) est connexe si et seulement si toute partie de X à la fois ouverte et fermée et stable sous l'action de G est vide ou égale à X. Lorsque les composantes connexes de X sont ouvertes, Top(X,G) est connexe si et seulement si G opère transitivement sur l'ensemble $\pi_0(X)$ des composantes connexes de X ; plus généralement $\pi_0(\mathrm{Top}(X))$ (8.7 g) est un pro-ensemble essentiellement constant isomorphe à l'ensemble quotient $\pi_0(X)/G$.

Montrer que lorsque X est localement connexe et localement simplement connexe, et T=Top(X,G) connexe i.e. G transitif sur $\pi_0(X)$, alors parmi toutes les façons de réaliser T à l'aide d'un espace à opérateurs (X',G') (cf. ci-dessus pour certaines telles façons), il y en a une, unique à isomorphisme non unique près, pour laquelle X' est connexe et simplement connexe. Montrer que le choix d'un tel (X',G') revient au choix d'un "revêtement universel" de l'objet final de T, et que G' est isomorphe au groupe $\pi_1(T)$ relatif à ce revêtement universel (cf. 2.7.5).

(Hint : montrer que la donnée d'une équivalence de T avec un Top(X,G) revient à la donnée d'un G_T-torseur P dans T, et que si (X,G) et P se correspondent, on a une équivalence canonique Top(X)—$T_{/P}$).

Conclure de ceci une démonstration triviale de la dernière assertion de c). Caractériser les topos T équivalents à des Top(X,G), où G est un groupe discret opérant sur un espace topologique localement connexe et localement simplement connexe en permutant transitivement les composantes connexes, comme étant les étendues connexes, localement connexes et localement simplement connexes dont le revêtement universel P de l'objet final e_T de T soit tel que le topos induit $T_{/P}$ soit équivalent à un topos de la forme Top(X) (ou, comme on dira simplement par abus de langage $T_{/P}$ "est" un espace topologique).

Donner un exemple d'une étendue, localement isomorphe à $\underline{R}$, qui est connexe et simplement connexe mais qui n'est pas un espace topologique. (Prendre le revêtement universel de la droite $\underline{R}$ avec origine dédoublée.)

j) Un topos annelé $(T,\underline{O}_T)$ (cf. § 11) est appelé une <u>étendue différentiable</u> (resp. une <u>étendue analytique réelle</u>. resp. une <u>étendue analytique complexe</u>) s'il existe des objets S_i de T couvrant l'objet final, tels que le topos annelé induit $(T_{/E}\ ,\ \underline{O}_T/E)$ soit équivalent au topos annelé défini par une variété différentiable avec son faisceau de fonctions réelles C^{∞} (resp. au topos annelé défini par un espace analytique réel, resp. au topos annelé défini par un espace analytique complexe). Donner une description constructive de ces topos annelés, du type de e) ii) (où on prendra pour X respectivement une variété différentiable, un espace analytique complexe ou un espace analytique réel). Donner des exemples de tels topos annelés qui ne soient pas équivalents à des topos annelés associés à des espaces topologiques, en reprenant les exemples envisagés dans c).

Exercice 9.8.3 (Topos associés aux relations d'équivalence locales et aux feuilletages) (*).

Soit X un espace topologique.

a) Pour tout ouvert U de X, soit $\mathrm{Quot}(U)$ l'ensemble des relations d'équivalence dans U, et pour un ouvert $V \subset U$, considérons l'application naturelle $\mathrm{Quot}(U) \longrightarrow \mathrm{Quot}(V)$, d'où un préfaisceau Quot_X sur X. Soit Q_X ou simplement Q le faisceau associé, et soit r une section de Q ("relation d'équivalence locale sur X"). De la relation d'ordre sur l'ensemble $\mathrm{Quot}(U)$ des relations d'équivalence sur un ouvert U de X, déduire sur le préfaisceau Quot, et sur le faisceau associé Q, une structure d'ordre i.e. une structure de préfaisceau resp. de faisceau à valeurs dans la catégorie des ensembles ordonnés.

b) Considérer, pour toute relation d'équivalence R sur X, la section $\mathrm{loc}(R)$ de Q qu'elle définit. Soit $E(r)$ l'ensemble des relations d'équivalence sur X telles que $\mathrm{loc}(R)$ soit moins fine que r, et soit $\mathrm{glob}(r)$ la relation d'équivalence borne supérieure de $E(r)$, (dont le graphe est l'intersection des graphes des $R \in E(r)$). Soit $(U_x)_{x\in X}$ une famille de voisinage ouverts des $x \in X$, et pour tout $x \in X$ soit R_x une relation d'équivalence dans U_x dont le germe en x soit r_x. Pour toute famille $\underline{V}$ d'ouverts V_x ($x\in X$, $x \in V_x \subset U_x$), soit $R_{\underline{V}}$ la relation d'équivalence dans X engendrée par la famille des relations $R_x | V_x$. Montrer que si $\underline{V}' \leqslant \underline{V}$ (dans un sens évident) on a $R_{\underline{V}'} \geqslant R_{\underline{V}}$, et que $\mathrm{glob}(r)$ est la borne supérieure de la famille filtrante croissante de relations d'équivalence $R_{\underline{V}}$. Donner un exemple où $\mathrm{glob}(r)$ n'est pas dans $E(r)$, i.e. où il existe un $a \in X$ tel que,

(*) Cet exercice est donné sous toutes réserves, ayant été rédigé hâtivement et insuffisamment vérifié. Monsieur N. SAAVEDRA a vérifié les parties a) à e). Prière au lecteur de nous communiquer ses observations éventuelles.

pour tout voisinage ouvert $W \subset U_a$ de a, il existe un $\underline{V} = (V_x)$ et deux points y,z de W qui sont équivalents pour R_a, mais qui ne son[t] pas équivalents pour $R_{\underline{V}}$. Montrer que pour toute $R \in \mathrm{Quot}(X)$ on a glob $\mathrm{loc}(R) \geqslant R$.

c) On dit que r est une <u>relation d'équivalence locale précohéren[te]</u> (<u>resp. cohérente</u>) si $\mathrm{glob}(r) \in E(r)$ i.e. $\mathrm{loc}(\mathrm{glob}(r)) \leqslant r$ (resp. si pour tout ouvert U de X, la restriction de r à U est précohérente). On dit que r est globalement cohérente si elle est cohérente, et si, de plus, $r = \mathrm{loc}\ \mathrm{glob}(r)$. On dit qu'une relation d'équivalence R sur X est <u>localement cohérente</u> si $r = \mathrm{loc}(R)$ est cohérente, <u>cohérente</u> si de plus $R = \mathrm{glob}(r)$ i.e. $R = \mathrm{glob}(\mathrm{loc}(R))$. Montrer que les relations d'équivalence <u>globalement</u> cohérentes R sur X correspondent biunivoquement aux relations d'équivalence cohérentes sur X, par $r \longmapsto \mathrm{glob}(r)$ et $R \longmapsto \mathrm{loc}(R)$;

d) Montrer que pour que r soit cohérente il suffit que pour tout $a \in X$ et tout voisinage ouvert $W' \subset U_a$ de a, il existe un voisinage ouvert $W \subset W'$ de a, tel que toute classe d'équivalence de $R_a|W$ soit contenue dans une composante connexe d'une classe d'équivalence de $R_a|W'$ (à fortiori, il suffit qu'il existe une famille fondamentale de voisinages ouverts $W_a \subset U_a$ de a tels que les fibres de la relations d'équivalence induite $R_a|W_a$ soient connexes). (Hint: se ramener à établir l[a] pré-cohérence dans le cas où r est définie par une $R \in \mathrm{Quot}(X)$, et noter dans ce cas que les fibres des relations d'équivalence $R_{\underline{V}}$ sont des parties relativement ouvertes -donc aussi relativement fermées- des fibres de R). Montrer que pour qu'une relation d'équivalence globale R soit cohérente, il suffit qu'elle soit localement cohérente et que ses fibres soient connexes ; prouver que cette condition est nécessaire si les fibres sont fermées. Donner un exemple d'une relation d'équivalence à fibres connexes et localement connexes, et qui n'est pas localement cohérente (?).

e) Soit $f: X' \longrightarrow X$ une application continue. Définir un homomorphisme de préfaisceaux naturel $f_*(\mathrm{Quot}_{X'}) \longrightarrow \mathrm{Quot}_X$, induisant un homomorphisme de faisceaux $f_*(Q_{X'}) \longrightarrow Q_X$ d'où $f^*(Q_X) \longrightarrow Q_{X'}$. Si r est une relation d'équivalence locale sur X , on dit que f est une "application fibre" pour la relation d'équivalence locale r sur X , si l'image inverse de r est la relation d'équivalence locale grossière sur X' . Soit, pour tout espace topologique X' , $\mathrm{Homfib}_r(X',X)$ l'ensemble des applications continues de X' dans X qui sont des applications fibres relativement à r . Montrer que pour X' variable, on obtient un contrafoncteur en X' .

f) Supposons r cohérente. Montrer que le foncteur précédent est représentable par un espace topologique X^r au-dessus de X . Montrer que l'application fibre universelle $\phi: X^r \longrightarrow X$ est bijective, et que tout $x \in X^r$ admet un voisinage ouvert U tel que l'application $U \longrightarrow X$ induite par ϕ soit un homéomorphisme de U sur son image. Montrer que les composantes connexes X^r sont ouvertes et correspondent par la bijection ϕ aux fibres de la relation d'équivalence $R = \mathrm{glob}(r)$. Donner un exemple où la restriction de ϕ aux composantes connexes de X^r n'induit pas des homéomorphismes de ces espaces avec leurs images dans X .

g) La relation d'équivalence locale r est dite <u>ouverte</u> si elle est une section du sous-faisceau Qouv_X de Q provenant du sous-préfaisceau $\mathrm{Quotouv}_X$ de Quot_X dont la valeur en tout ouvert U de X est l'ensemble des relations d'équivalence <u>ouvertes</u> de U . On dira que la relation d'équivalence locale r est <u>strictement ouverte</u> si elle est cohérente et ouverte ou ce qui revient au même, si elle est cohérente et si pour tout ouvert U de X , $\mathrm{glob}(r|U)$ est une relation d'équivalence ouverte dans U . On dit que la relation d'équivalence R dans X est <u>strictement ouverte</u> si elle est cohérente et si $\mathrm{loc}(R)$ est une relation d'équivalence locale strictement ouverte. Prouver que pour que r supposée ouverte soit strictement ouverte, il suffit qu'elle satisfasse à la condition envisagée dans d) ; si r est localement définie par une R à fibres fermées, alors cette condition est aussi nécessaire.

h) Soit F un faisceau d'ensembles sur X , Pour tout ouvert U de X , soit $\mathrm{Quot}(U,F)$ l'ensemble des couples formés d'une relation d'équivalence R_U dans U et d'une relation d'équivalence $R_{F|U}$ dans $F|U$ (F étant interpreté comme espace étalé sur X) tels que le morphisme structural $p : F|U \longrightarrow U$ soit compatible avec les relations d'équivalence R_U , $R_{F|U}$, et que le diagramme correspondant d'espaces topologiques

$$\begin{array}{ccc} F|U & \longrightarrow & (F|U)/R_{F|U} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ U & \longrightarrow & U/R_U \end{array}$$

soit cartésien avec q un étalement (de sorte que $F|U$ s'identifie à l'image inverse du faisceau $(F|U)/R_{F|U}$ sur U/R_U). Montrer que les $\mathrm{Quot}(U,F)$ pour U variable définissent un préfaisceau sur X , dont le faisceau associé sera noté $Q(F/X)$. Définir un homomorphisme de faisceaux $Q(F/X) \longrightarrow Q_X$. Pour une section donnée r de Q_X , on appelle r-structure sur le faisceau F toute section de $Q(F/X)$ au-dessus de la section donnée r de Q_X . Définir la catégorie $\mathrm{Top}(X/r)$ des r-faisceaux sur X , et définir un foncteur conservatif et fidèle : "oubli de la r-structure" $\mathrm{Top}(X/r) \longrightarrow \mathrm{Top}(X)$. Prouver que dans $\mathrm{Top}(X/r)$ les limites projectives finies et les limites inductives finies sont représentables, et que le foncteur précédent commute auxdites limites. En conclure que dans $\mathrm{Top}(X/r)$ les sommes finies sont disjointes et universelles et les relations d'équivalence sont effectives universelles. Prouver que $\mathrm{Top}(X/r)$ admet une petite famille génératrice. Donner un exemple avec r cohérente, où $\mathrm{Top}(X/r)$ n'admet pas des sommes directes infinies (?), donc n'est pas un topos.

i) Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue compatible avec $R = \mathrm{glob}(r)$. Définir un foncteur

$$f_r^* : \mathrm{Top}(Y) \longrightarrow \mathrm{Top}(X/r)$$

dont le composé avec le foncteur d'inclusion $\mathrm{Top}(X/r) \longrightarrow \mathrm{Top}(X)$ soit f^*. Montrer que si r est globalement cohérente et strictement ouverte (i.e. si R est strictement ouverte et $r = \mathrm{loc}(R)$), et si f est l'application canonique $X \longrightarrow Y = X/R$, alors f_r^* est une équivalence de catégories, donc $\mathrm{Top}(X/r)$ est un $\underline{U}$-topos, et $\mathrm{Top}(X/r) \longrightarrow \mathrm{Top}(X)$ est le foncteur image inverse d'un morphisme de topos.

j) Conclure de i) que si r est strictement ouverte, alors $\mathrm{Top}(X/r)$ est un topos, et le foncteur d'inclusion $\mathrm{Top}(X/r) \longrightarrow \mathrm{Top}(X)$ est le foncteur image inverse associé à un morphisme de topos

$$p : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(X/r) \quad .$$

k) Définir une loi fonctorielle du topos $\mathrm{Top}(X/r)$ et du morphisme de topos précédent p, par rapport au couple (X,r) d'un espace topologique X muni d'une relation d'équivalence locale strictement ouverte. Montrer que si $X' \longrightarrow X$ est un étalement et si r' est l'image inverse de r dans X', alors le morphisme induit $\mathrm{Top}(X'/r') \longrightarrow \mathrm{Top}(X/r)$ est équivalent à un morphisme de localisation $\mathrm{Top}(X/r)_{/E} \longrightarrow \mathrm{Top}(X/r)$, où E est un objet de $\mathrm{Top}(X/r)$ (déterminé à isomorphisme unique près). Pour que E couvre l'objet final de $\mathrm{Top}(X/r)$, il faut et il suffit que le saturé sous $R = \mathrm{glob}(r)$ de l'image de X' dans X soit égal à X.

l) Déduire de k) que $\mathrm{Top}(X/r)$ est une <u>étendue rigide</u> (9.8.2 b)). Montrer que si X est sobre l'ensemble des classes d'isomorphie de points de $\mathrm{Top}(X/r)$ est homéomorphe, pour sa topologie canonique ( ) à l'espace topologique quotient $X/\mathrm{glob}(r)$, et que pour deux points de $\mathrm{Top}(X/r)$, provenant de points x et x' de X, il existe au plus un morphisme de l'un dans l'autre ; il y en a effectivement un si et seulement si x' et x sont équivalents mod $\mathrm{glob}(r)$ à des points x_1' et x_1 tels que x_1 générise x_1'.

m) Etudier le morphisme de topos canonique $\mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(X/r)$, en notant que pour tout objet U de $Top(X/r)$ tel que le topos induit sur U "soit" un espace topologique ordinaire, le morphisme induit $Top(X)_{/p^*(U)} \longrightarrow Top(X/r)$ "est" une application continue d'espaces topologiques ordinaires $X_U \longrightarrow U$. Montrer que les fibres de l'application $X_U \longrightarrow U$ sont homéomorphes à des composantes connexes de l'espace X^r de f .

n) Soit X une variété différentiable munie d'un feuilletage, i.e. d'un sous-faisceau F localement facteur direct du faisceau tangent de X , stable par crochets. Définir sur X une relation d'équivalence locale strictement ouverte associée au feuilletage, et définir sur le topos quotient $T= Top(X/r)$ un Anneau qui en fasse une étendue différentiable (9.8.2. j)). Définir une équivalence de la catégorie des Modules localement libres sur l'étendue différentiable T (appelés aussi fibrés vectoriels différentiables sur T), et la catégorie des Modules localement libres sur X munis d'une connexion relativement au sous-fibré F donné du fibré tangent. Donner des variantes dans le cas analytique réel et analytique complexe.

10. Faisceaux de morphismes

Proposition 10. 1 : Soient E un topos, X et Y deux objets de E ; le foncteur $Z \longmapsto \mathrm{Hom}_E(Z\times X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_{E_{/Z}}(X_Z,Y_Z)$ est représentable.

En effet, les limites inductives sont universelles dans E (II 4.3). Le foncteur $Z \longmapsto Z\times X$ commute donc aux limites inductives. Par suite, le foncteur $Z \longmapsto \mathrm{Hom}_E(Z\times X,Y)$ transforme les limites inductives de l'argument Z en limites projectives. Il est donc représentable (IV 1.4 et 1.2).

10.2. L'objet représentant le foncteur $Z \longmapsto \mathrm{Hom}_E(Z\times X,Y)$ est noté $\mathcal{H}om_E(X,Y)$ (ou plus simplement $\mathcal{H}om(X,Y)$) et est appelé le faisceau des morphismes de X dans Y . C'est un bifoncteur en X et Y . On a donc un isomorphisme trifonctoriel.

(10.2.1.) $$\mathrm{Hom}_E(Z,\mathcal{H}om_E(X,Y)) \simeq \mathcal{H}om_E(Z\times X,Y) .$$

Il résulte alors de la formule (10.2.1) que le bifoncteur $(X,Y) \longmapsto \mathcal{H}om(X,Y)$ transforme les limites inductives de l'argument X (resp. les limites projectives de l'argument Y) en limites projectives dans E .

Proposition 10.3 : Soit $v : E \longrightarrow E'$ un morphisme de topos. Pour un objet variable X de E et un objet variable Y de E' , on a un isomorphisme bifonctoriel.

(10.3.1) $$v_*\mathcal{H}om_E(v^*Y,X) \simeq \mathcal{H}om_{E'}(Y,v_*X) .$$

Démonstration. Pour tout objet Z de E' , on a une suite d'isomorphismes, fonctoriels en tous les arguments :

$$\begin{array}{lcll}
\mathrm{Hom}_{E'}(Z,v_*\mathcal{H}om_E(v^*Y,X)) & \simeq & \mathrm{Hom}_E(v^*Z,\mathcal{H}om_E(v^*Y,X)) & \text{(adjonction)} \\
\mathrm{Hom}_E(v^*Z,\mathcal{H}om_E(v^*Y,X)) & \simeq & \mathrm{Hom}_E(v^*Z\times v^*Y,X) & (10.2.1) \\
\mathrm{Hom}_E(v^*Z\times v^*Y,X) & \simeq & \mathrm{Hom}_E(v^*(Z\times Y),X) & (v^* \text{ exact à gauche}) \\
\mathrm{Hom}_E(v^*(Z\times Y),X) & \simeq & \mathrm{Hom}_{E'}(Z\times Y,v_*X) & \text{(adjonction)} \\
\mathrm{Hom}_{E'}(Z\times Y,v_*X) & \simeq & \mathrm{Hom}_{E'}(Z,\mathcal{H}om_{E'}(Y,v_*X)) & (10.2.1)
\end{array}$$

Les deux membres de (10.3.1) représentent donc des foncteurs isomorphes, c.q.f.d.

Corollaire 10.4 : Soient C un $\underline{U}$-site , X un $\underline{U}$-préfaisceau sur C , Y un $\underline{U}$-faisceau sur C , $\underline{V}$ un univers contenant $\underline{U}$ tel que C soit $\underline{V}$-petit, $C^{\wedge}_{\underline{V}}$ le topos des $\underline{V}$-préfaisceaux sur C , $C^{\sim}_{\underline{U}}$ le topos des $\underline{U}$-faisceaux sur C . Le préfaisceau $\mathcal{H}om_{C^{\wedge}_{\underline{V}}}(X,Y)$ est un $\underline{U}$-faisceau. Soit $X \longrightarrow \underline{a}X$ le morphisme canonique de X dans son faisceau associé. Le morphisme correspondant $\mathcal{H}om_{C^{\wedge}_{\underline{V}}}(\underline{a}X,Y) \longrightarrow \mathcal{H}om_{C^{\wedge}_{\underline{V}}}(X,Y)$ est un isomorphisme. On a un isomorphisme canonique $\mathcal{H}om_{C^{\wedge}_{\underline{V}}}(\underline{a}X,Y) \simeq \mathcal{H}om_{C^{\sim}_{\underline{U}}}(\underline{a}X,Y)$.

(10.4.1) Supposons d'abord que C soit un petit site et que $\underline{V} = \underline{U}$. On a alors un morphisme de topos : $C^{\sim}_{\underline{U}} \longrightarrow C^{\wedge}_{\underline{U}}$ (IV 4.8), d'où (10.3.1) les assertions dans ce cas. Pour passer de là au cas général, on remarque tout d'abord que le foncteur "faisceau associé" ne dépend pas de l'univers (II 3.6) et que le topos des $\underline{V}$-faisceaux sur C est équivalent au topos des $\underline{V}$-faisceaux sur $C^{\sim}_{\underline{U}}$ (III 4 et IV 1). Il suffit donc de démontrer le lemme suivant :

Lemme 10.4.2 : Soient E un $\underline{U}$-topos , $\underline{V}$ un univers contenant $\underline{U}$, $E^{\sim}_{\underline{V}}$ le topos des $\underline{V}$-faisceaux sur E , X et Y deux objets de E . Il existe un isomorphisme canonique $\mathcal{H}om_{E}(X,Y) \simeq \mathcal{H}om_{E^{\sim}_{\underline{V}}}(X,Y)$.

(10.4.3) Le foncteur $\varepsilon_{E} : E \longrightarrow E^{\sim}_{\underline{V}}$ est pleinement fidèle et exact à gauche. Par suite on a, pour tout objet Z de E un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{E^{\sim}_{\underline{V}}}(\varepsilon_E Z, \varepsilon_E \mathcal{H}om_E(X,Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{E^{\sim}_{\underline{V}}}(\varepsilon_E Z \times \varepsilon_E X, \varepsilon_E Y)$$

Mais tout objet de $E^{\sim}_{\underline{V}}$ est limite inductive d'objets provenant de E d'où (10.2.1) l'assertion.

10.5. Soit $v : E \longrightarrow E'$ un morphisme de topos. On se propose de définir quatre morphismes bifonctoriels.

$$\Phi_v : v^*\mathcal{H}om(X,Y) \longrightarrow \mathcal{H}om(v^*X,v^*Y) , \quad X \text{ et } Y \text{ objets de } E' ,$$
$$\Psi_v : v_*\mathcal{H}om(X,Y) \longrightarrow \mathcal{H}om(v_*X,v_*Y) , \quad X \text{ et } Y \text{ objets de } E ,$$
$$\Xi_v : \mathcal{H}om(v_!X,Y) \longrightarrow v_*\mathcal{H}om(X,v^*Y) , \quad X \in \mathrm{ob}E , Y \in \mathrm{ob}\, E' ,$$
$$\Lambda_v : v_!(X \times v^*Y) \longrightarrow v_!(X) \times Y \quad X \in \mathrm{ob}\, E , Y \in \mathrm{ob}\, E' ,$$

où, pour définir les morphismes Ξ_v et Λ_v on suppose que le foncteur v^* image réciproque par v admet un adjoint à gauche $v_!$.

(10.5.1) <u>Définition de</u> Ψ_v. Soit X un objet de E . On a un morphisme d'adjonction $v^*v_*X \longrightarrow X$, d'où, pour tout objet Z de E' , un morhisme bifonctoriel $v^*(Z\times v_*X) \longrightarrow (v^*Z)\times X$. On a donc, pour tout objet Y de E , un morphisme trifonctoriel

$$\mathrm{Hom}_E((v^*Z)\times X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(v^*(Z\times v_*X),Y) \quad .$$

On en déduit, par adjonction, un morphisme trifonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{E'}(Z,v_*\mathcal{H}om(X,Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E'}(Z,\mathcal{H}om(v_*X,v_*Y)) \quad ;$$

d'où le morphisme Ψ_v .

(10.5.2) <u>Définition de</u> Λ_v . Pour tout objet X de E , on a un morphisme d'adjonction $X \longrightarrow v^*v_!X$; d'où, pour tout objet Y de E , un morphisme bifonctoriel $X\times v^*Y \longrightarrow v^*v_!(X)\times v^*Y \simeq v^*(v_!(X)\times Y)$; d'où, par adjonction, le morphisme Λ_v .

(10.5.3) <u>Définition de</u> Ξ_v . Soient X un objet de E , Z et Y deux objets de E' . Le morphisme $\Lambda_v : v_!(X\times v^*Z) \longrightarrow v_!(X)\times Z$ fournit un morphisme trifonctoriel $\mathrm{Hom}_{E'}(v_!(X)\times Z,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E'}(v_!(X\times v^*Z,Y)$; d'où, par adjonction, un morphisme trifonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{E'}(Z,\mathcal{H}om(v_!X,Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E'}(Z,v_*\mathcal{H}om(X,v^*Y)) \quad ;$$

d'où le morphisme Ξ_v .

(10.5.4). <u>Définition de</u> Φ_v . Le morphisme trifonctoriel de (10.5.3)

$$\mathrm{Hom}_{E'}(v_!(Z)\times X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E'}(v_!(Z\times v^*X),Y) \quad ;$$

où Z est un objet de E et X , Y sont des objets de E' , permet d'obtenir, par adjonction, un morphisme trifonctoriel ,

$$\mathrm{Hom}_E(Z,v^*\mathcal{H}om(X,Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(Z,\mathcal{H}om(v^*X,v^*Y)) \quad ;$$

d'où une définition du morphisme Φ_v . Il existe une deuxième manière de définir Φ_v . Soient X , Y , Z trois objets de E' . Le foncteur $v^* : E' \longrightarrow E$ fournit un morphisme trifonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{E'}(Z\times X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(v^*(Z)\times v^*(X),v^*y) \quad ;$$

d'où, par adjonction, un morphisme trifonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{E'}(Z,\mathcal{H}om(X,Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E'}(Z,v_*\mathcal{H}om(v^*X,v^*Y)) .$$

On a donc un morphisme bifonctoriel

$$\mathcal{H}om(X,Y) \longrightarrow v_*\mathcal{H}om(v^*X,v^*Y) \quad ;$$

d'où, par adjonction, un morphisme dont on laisse au lecteur le soin de vérifier que c'est bien le morphisme Φ_v défini ci-dessus.

Proposition 10.6 : *Soit* $v : E \longrightarrow E'$ *un morphisme de topos*.

1) *Le morphisme* Ψ_v (10.5.1) *est un isomorphisme pour tout objet* Y *de* E *si et seulement si le morphisme d'adjonction* $v^*v_*X \longrightarrow X$ *est un isomorphisme*. *En particulier*, *le morphisme* Ψ_v *est un isomorphisme pour tout couple d'objets* (X,Y) *si et seulement si le foncteur* $v_* : E \longrightarrow E'$ *est pleinement fidèle*, *i.e. si* v *est un plongement de topos*.

2) *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *Pour tout couple* (X,Y) *d'objets de* E' , *le morphisme* Φ_v (10.5.4) *est un isomorphisme*.

(ii) *Le foncteur* v^* *admet un adjoint à gauche* $v_!$ *et pour tout objet* X *de* E *et tout objet* Y *de* E' , *le morphisme* Ξ_v (10.5.3) *est un isomorphisme*.

(iii) *Le foncteur* v^* *admet un adjoint à gauche* $v_!$ *et pour tout objet* X *de* E *et pour tout objet* Y *de* E' , *le morphisme* Λ_v (10.5.2) *est un isomorphisme*.

(10.6.1) La première assertion résulte immédiatement de (10.5.1). Il résulte aussi immédiatement de (10.5.2.), (10.5.3), (10.5.4) que (iii) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ ((i) et le foncteur v^* admet un adjoint à gauche $v_!$). Il reste donc à montrer que (i) implique que v^* admet un adjoint à gauche, i.e. (IV 1.8) que (i) implique que v^* commute aux petits produits. Soient e' l'objet final de E' et I un petit ensemble. Comme v^* est exact à gauche, $v^*(e')$ est un objet final de E et comme v^* commute aux limites inductives $v^*(\coprod_I e') \simeq \coprod_I v^*(e')$. Pour tout objet Y de E' , on a $\mathcal{H}om(\coprod_I e',Y) \simeq \prod_I \mathcal{H}om(e',Y) \simeq \prod_I Y$ et

$\mathcal{H}om(\coprod_I v^*(e'),v^*Y) \simeq \prod_i \mathcal{H}om(v^*(e'),v^*Y) \simeq \prod_I v^*Y$. Le morphisme fonctoriel Φ_v induit donc un isomorphisme $v^*\prod_I Y \simeq \prod_I v^*Y$ dont on vérifie que c'est l'isomorphisme canonique. c.q.f.d.

Corollaire 10.7 : Soient E un topos, Z un objet de E , $j_Z : E_{/Z} \longrightarrow E$ le morphisme de localisation (IV 5.2), X,Y deux objets de E .

1) Il existe un isomorphisme bifonctoriel

$$j_Z^* \mathcal{H}om(X,Y) \simeq \mathcal{H}om(j_Z^* X, j_Z^* Y) .$$

2) Soit X' un objet de E/Z . Il existe un isomorphisme bifonctoriel

$$\mathcal{H}om_E(j_{Z!}X',Y) \simeq j_{Z*}\mathcal{H}om_{E/Z}(X',j_Z^*Y) .$$

3) Soit Y' un objet de E/Z . Lorsque Z est un ouvert de E , il existe un isomorphisme bifonctoriel

$$j_{Z*}\mathcal{H}om(X',Y') \simeq \mathcal{H}om(j_{Z*}X', j_{Z*}Y') .$$

Les assertions 1) et 2) se démontrent en remarquant que le morphisme Λ_{j_Z} est un isomorphisme. Pour l'assertion 3), il suffit de remarquer que j_{Z*} est pleinement fidèle, car $j_{Z!}$ est pleinement fidèle (I 5.7. a)).

Corollaire 10.8.: Soient E un topos, X , Y et Z trois objets de E , $j_Z : E_{/Z} \longrightarrow E$ le morphisme de localisation.

1) On a un isomorphisme canonique

$$j_{Z*}j_Z^* Y \simeq \mathcal{H}om(Z,Y) .$$

2) On a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_E(Z,\mathcal{H}om(X,Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{E/Z}(j_Z^* X, j_Z^* Y) .$$

Soit e_Z l'objet final de $E_{/Z}$ (i.e. l'objet $id_Z : Z \longrightarrow Z)$). Il résulte de (10.2.1) qu'on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{H}om_{E/Z}(e_Z,j_Z^*Y) \simeq j_Z^* Y \quad ;$$

d'où, d'après (10.7.2), un isomorphisme

$$j_{Z*}j_Z^* Y \simeq \mathcal{H}om(j_{Z!}e_Z,Y) .$$

Comme $j_{Z!}e_Z = Z$, on a démontré 1). Démontrons 2). De (10.7), on tire un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{E_{/Z}}(e_Z, j_Z^* \mathcal{H}om(X,Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{E/Z}(j_Z^* X, j_Z^* Y) \quad ;$$

d'où, par adjonction sur le premier membre,

$$\mathrm{Hom}_E(Z, \mathcal{H}om(X,Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{E_{/Z}}(j_Z^* X, j_Z^* Y) \quad .$$

11. Topos annelés, localisation dans les topos annelés

11.1.1 Soit $\underline{U}$ un univers. On appelle $\underline{U}$-topos annelé un couple (E,A) où E est un $\underline{U}$-topos et A un objet muni d'une structure d'anneau. On appelle $\underline{U}$-site annelé un couple (C,A) où C est un $\underline{U}$-site et A un $\underline{U}$-faisceaux d'anneaux sur C. On ne mentionne pas l'univers lorsque le contexte ne prête pas à confusion. A un site annelé (C,A) est associé le topos annelé $(C^{\sim},A)$. A un topos annelé (E,A) est associé le site annelé constitué par le site E et le faisceau d'anneaux représenté par A.

11.1.2 Soit (E,A) un topos annelé. On note ${}_AE$ (resp. E_A) la catégorie des faisceaux de A-modules (nous écrirons aussi A-Modules) à gauche (resp. à droite) unitaires. La catégorie ${}_AE$ (resp. E_A) est une catégorie abélienne (II 6.7). Soient M et N deux faisceaux de A-modules à gauche (resp. à droite). Le groupe commutatif des morphismes de A-Modules de M dans N est noté $\mathrm{Hom}_A(M,N)$.

11.1.3 Soient A, B et C trois anneaux d'un topos E, M un faisceau de A-B bimodules, N un faisceau de A-C bimodules à gauche. Soit e un objet final de E et posons $\mathrm{Hom}(e,B) = \Gamma(B)$, $\mathrm{Hom}(e,C) = \Gamma(C)$. La structure de A-B bimodule de M fournit un homorphisme d'anneaux de $\Gamma(B)^{\circ}$ dans l'anneau des endomorphismes du A-module M et de même, la structure de A-C bimodule de N fournit un homomorphisme d'anneaux de $\Gamma(C)^{\circ}$ dans l'anneau des endomorphismes du A-module N. On en déduit, par fonctorialité, une structure de $\Gamma(B)$-$\Gamma(C)$ bimodule sur le groupe commutatif $\mathrm{Hom}_A(M,N)$. En particulier, lorsque A est un faisceau d'anneaux commutatifs, le groupe $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ est muni canoniquement d'une structure de $\Gamma(A)$-module.

11.1.4 Soient E un topos, A et B deux anneaux de E, $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de faisceaux d'anneaux, M un B-module (à gauche pour fixer les idées). Le faisceau M peut-être considéré comme un faisceau de A-modules par l'intermédiaire de u : Pour tout objet X de E, $M(X)$ est muni de la structure de $A(X)$-module déduite de sa structure de $B(X)$-module et de l'homomorphisme $u(X) : A(X) \longrightarrow B(X)$ par restriction des scalaires. On obtient ainsi un foncteur "<u>restriction des scalaires par</u> u "

$$\mathrm{Res}(u) : {}_{B}E \longrightarrow {}_{A}E .$$

11.1.5 En particulier lorsque $A = \underline{\underline{Z}}$ (faisceau constant $\underline{\underline{Z}}$ i.e. faisceau associé au préfaisceau constant Z) et lorsque $u : \underline{\underline{Z}} \longrightarrow B$ est l'unique morphisme canonique, on obtient un foncteur de ${}_{B}E$ dans la catégorie ${}_{\underline{\underline{Z}}}E$ qui n'est autre que la catégorie des faisceaux abéliens notée E_{Ab}. Ce foncteur est appelé le <u>foncteur faisceau abélien sous-jacent</u>.

<u>Proposition</u> 11.1.6 : <u>Le foncteur restriction des scalaires par</u> u <u>commute aux limites inductives et projectives</u>. <u>Il est conservatif</u>.

La proposition est vraie pour le foncteur restriction des scalaires pour les modules ordinaires, i.e. lorsque E est le topos ponctuel. Elle est donc vraie lorsque E est le topos des préfaisceaux sur un petit site. Il résulte alors de la détermination des limites inductives et projectives à l'aide du foncteur faisceau associé (II 6.4) que la proposition est vraie dans le cas général.

11.2.1 Soient (E,A) un topos annelé, X un objet de E, $j_X : E_{/X} \longrightarrow E$ le morphisme de localisation (IV 8). D'après III 1.7 ou IV 3.1.2, le faisceau $j_X^{*}A$ est muni canoniquement d'une structure d'anneau. Le faisceau d'anneaux $j_X^{*}A$ est noté le plus souvent $A|X$ ou bien encore, abusivement, A. Sauf mention du contraire, le topos $E_{/X}$ sera annelé par $A|X$. Le faisceau $j_{X*}j_X^{*}A$ est muni canoniquement d'une structure d'anneau. Le morphisme d'adjonction $A \longrightarrow j_{X*}j_X^{*}A$ est un morphisme de faisceaux d'anneaux.

11.2.2 Soit de plus M un A-module (à gauche pour fixer les idées). Le faisceau $j_X^* M$ est muni d'une structure de $A|X$-module (III 1.7 ; ou IV 3.1.2) ; d'où un foncteur :

$$j_X^* \quad : \quad {}_A E \longrightarrow {}_{A|X} E_{/X}$$

appelé foncteur de restriction à $E_{/X}$, ou encore foncteur de restriction à X . Le foncteur j_X^* commute aux limites inductives et projectives (loc. cit.). Il est en particulier exact. Soit maintenant N un $A|X$-Module. Le faisceau $j_{X*}N$ est un faisceau de $j_{X*}A|X$-Modules (III 1.7 ou IV 3.1.2) ; d'où, par restriction des scalaires par le morphisme d'adjonction $A \rightarrow j_{X*}(A|X)$ (11.1.4), un A-Module encore noté $j_{X*}N$. On a donc défini un foncteur

$$j_{X*} \quad : \quad {}_{A|X}E_{/X} \longrightarrow {}_A E$$

qui commute aux limites projectives (11.1.6 et III 1.7). Pour tout A-Module M , le morphisme d'adjonction $M \longrightarrow j_{X*}j_X^*M$ est un morphisme de A-Modules . Pour tout $A|X$-Module N et tout A-Module M , le morphisme d'adjonction $M \rightarrow j_{X*}j_X^*M$ définit un morphisme bifonctoriel en M et N

$$(11.2.2.1) \qquad \mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^* M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,j_{X*}N) \quad .$$

Ce dernier morphisme est un isomorphisme i.e. les foncteurs j_X^* et j_{X*} pour les A-Modules , sont adjoints (III 1.7).

11.2.3 Les foncteurs j_X^* et j_{X*} pour les Modules, commutent au foncteur "ensemble sous-jacent" (III 1.7 4)). Ils commutent donc aux foncteurs restriction des scalaires et en particulier au foncteur faisceau abélien sous-jacent.

Proposition 11.3.1 : Soient (E,A) un topos annelé, X un objet de E . Le foncteur

$$j_X^* \quad : \quad {}_A E \longrightarrow {}_{A|X}E_{/X}$$

admet un adjoint à gauche noté $j_{X!}$: ${}_{A|X}E_{/X} \longrightarrow {}_A E$ et appelé le prolongement par zéro. Le foncteur prolongement par zéro est exact et fidèle et commute aux limites inductives. Les foncteurs $j_{X!}$ pour les

<u>Modules commutent aux foncteurs restriction des scalaires et</u>, <u>en particulier</u>, <u>ils commutent au foncteur faisceau abélien sous-jacent</u>.

L'existence du foncteur $j_{X!}$ résulte de III 1.7. Comme $j_{X!}$ est un adjoint à gauche, il commute aux limites inductives (I 2). Pour démontrer les autres assertions, supposons d'abord que E soit le topos des préfaisceaux d'ensembles sur une petite catégorie C contenant l'objet X . On sait alors que $E_{/X}$ est équivalent à la catégorie des préfaisceaux sur $C_{/X}$ et que, modulo cette équivalence, le foncteur $j_X^* : E \to E_{/X}$ n'est autre que la composition avec le foncteur d'oubli $C_{/X} \longrightarrow C$ (I 5.11). Il résulte alors immédiatement de la construction explicite de $j_{X!}$ (I 5.1) que pour tout $A|X$-Module N et pour tout objet Y de C , on a

$$j_{X!}N(Y) = \bigoplus_{u \in \mathrm{Hom}_C(Y,X)} N(u) \quad ;$$

d'où l'exactitude de $j_{X!}$ et le fait que le prolongement par zéro commute aux foncteurs restriction des scalaires dans ce cas. Dans le cas général, on peut supposer que E est le topos des faisceaux sur un petit site C et que X provient d'un objet de C ((IV 1). Le topos $E_{/X}$ est alors équivalent au topos des faisceaux sur $C_{/X}$ (muni de la topologie induite) (III 5.4) et le morphisme de topos $j_X : E_{/X} \longrightarrow E$ provient du foncteur d'oubli $C_{/X} \longrightarrow C$ qui est continu et cocontinu (III 5.2). Il résulte alors de III 1.711) que le prolongement par zéro pour les faisceaux s'obtient en composant le prolongement par zéro pour les préfaisceaux avec le foncteur faisceau associé ; d'où l'assertion d'exactitude et la commutation aux restrictions des scalaires.

Pour démontrer la fidélité, il revient au même de montrer que pour $A|X$-Module N , le morphisme d'adjonction

$$ad_N : N \longrightarrow j_X^* j_{X!} N$$

est un monomorphisme. Or, en notant $j_{X!}^{\wedge}$ le foncteur prolongement par zéro pour les préfaisceaux et <u>a</u> le foncteur "faisceau associé", on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "ad_N"] \arrow[dr, "ad_N^{\wedge}"'] & j_X^* \, \underline{a} \, j_{X!}^{\frown} N \\ & \underline{a} \, j_X^* \, j_{X!}^{\frown} N \arrow[u] \end{tikzcd}$$,

où $ad_N^{\frown}$ est le morphisme d'adjonction pour les préfaisceaux. Le morphisme $ad_N^{\frown}$ est un monomorphisme d'après ce qui précède, donc $\underline{a}(ad_N^{\frown})$ est un monomorphisme. De plus, comme le foncteur d'oubli $C_{/X} \longrightarrow C$ est continu et cocontinu, le morphisme canonique $\underline{a}\, j_X^* \longrightarrow j_X^* \underline{a}$ est un isomorphisme (III 2.3). Par suite ad_N est un monomorphisme.

<u>Remarque</u> 11.3.2 : Soit N un $A|X$-Module. Le faisceau d'ensemble sous-jacent à $j_{X!}N$ n'est pas, en général, isomorphe au faisceau obtenu en prolongeant par le vide (III 5.3 et IV 5.2) le faisceau d'ensemble sous-jacent à N . On prendra donc garde de ne pas confondre le foncteur <u>prolongement par zéro</u> noté $j_{X!} : {}_{A|X}E_{/X} \longrightarrow {}_AE$ dans 11.3.1, et le foncteur prolongement par le vide noté encore $j_{X!} : E_{/X} \longrightarrow E$ dans III 5.3 et IV 5.2 . Dans la plupart des cas rencontrés dans la pratique, l'abus de notation signalé ci-dessus n'amène pas de confusions. Lorsqu'une confusion est néanmoins possible, nous utiliserons les notations $j_{X!}^{ab}$ et $j_{X!}^{ens}$ pour désigner respectivement les foncteurs prolongement par zéro et prolongement par le vide.

<u>Proposition</u> 11.3.3 : <u>Soient</u> (E,A) <u>un topos annelé et</u> X <u>un objet de</u> E . <u>Le A-Module</u> $j_{X!}(A|X)$, <u>noté le plus souvent</u> A_X <u>ou</u> $A_{X,E}$, <u>est le</u> A-Module libre engendré par X (II 6.5) <u>i.e. pour tout A-Module</u> M , <u>on a un isomorphisme canonique</u>, fonctoriel en M :

$$\mathrm{Hom}_E(X,M) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(A_X,M)$$

<u>Soit</u> $(X_i)_{i\in I}$ <u>une famille topologiquement génératrice de</u> E (II 3.0.1). <u>La famille</u> $(A_{X_i})_{i\in I}$ <u>est une famille génératrice de la catégorie des A-Modules</u> .

Soit e_X l'objet final du topos $E_{/X}$ $(e_X = X \xrightarrow{id} X)$. On a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{A|X}(A|X, j_X^*M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{E_{/X}}(e_X, j_X^*M) \quad ;$$

déduit de la section unité $e_X \longrightarrow A/X$; d'où, par adjonction, un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_A(j_{X!}^{ab}(A|X),M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_E(j_{X!}^{ens}(e_X),M) \quad .$$

Comme $j_{X!}^{ens}(e_X) = X$, on obtient l'isomorphisme annoncé. La dernière assertion résulte de II 6.6 .

<u>Remarque</u> 11.3.4 : Soient A et B deux faisceaux d'anneaux sur un topos E , X un objet de E et N un $A|X$-$B|X$-bi Module. Le faisceau abélien obtenu en prolongeant N par zéro est muni canoniquement d'une structure de A-B-biModule ainsi qu'il résulte immédiatement de sa description explicite (11.3.1). En particulier le A-module libre engendré A_X est un A-biModule .

<u>Exercice</u> 11.3.5 : Soient E un topos, X un objet de E , $x : P \longrightarrow E$ un point de E (IV 6.1), $(x_i)_{i\in I}$ la famille des points de $E_{/X}$ au-dessus de x (en correspondance biunivoque avec la fibre X_x IV 6.7.2). Montrer que pour tout faisceau abélien M sur $E_{/X}$, la fibre $(j_{X!}M)_x$ est canoniquement isomorphe à $\bigoplus_i M_{x_i}$.

<u>12. Opération sur les modules</u>

<u>Proposition</u> 12.1 : <u>Soient</u> (E,A) <u>un topos annelé</u>, M <u>et</u> N <u>deux A-Modules à gauche</u> (resp. à droite). <u>Le foncteur sur</u> E <u>qui a tout objet</u> X <u>de</u> E <u>associe le groupe commutatif</u> $\mathrm{Hom}_A(M,\mathcal{H}om_E(X,N))$ <u>est représentable par un faisceau abélien noté</u> $\mathcal{H}om_A(M,N)$ (<u>ou parfois</u> $\mathcal{H}om(M,N)$ <u>lorsqu'aucune confusion n'en résulte</u>). <u>Pour tout objet</u> X <u>de</u> E <u>on a un isomorphisme canonique</u>

(12.1.1) $$\mathcal{H}om_A(M,N)(X) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^*M,j_X^*N).$$

On a un isomorphisme canonique $\mathcal{H}om_E(X,N) = j_{X*}j_X^* N$ (10.8) et par suite $\mathcal{H}om_E(X,N)$ est muni fonctoriellement en X d'une structure de A-Module à gauche (resp. à droite). Le foncteur $X \to \mathcal{H}om_E(X,N)$ transforme les limites inductives de l'argument X en limites projec-de A-Modules (10.2 et 11.2.3) et par suite le foncteur

$X \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,\mathcal{H}om_E(X,N))$ transforme les limites inductives de l'argument X en limites projectives de groupes commutatifs, donc en limites projectives des ensembles sous-jacents. Il est donc représentable (IV 1.4 et 1.2) et l'objet qui le représente est muni d'une structure de faisceau abélien. On a, par définition, pour tout objet X de E, un isomorphisme canonique

(12.1.2) $$\mathcal{H}om_A(M,N)(X) = \mathrm{Hom}(X,\mathcal{H}om_A(M,N)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M,\mathcal{H}om(X,N))$$

et l'isomorphisme (12.1.1) résulte de (12.1.2), de l'isomorphisme $\mathcal{H}om(X,N) \approx j_{X*}j_X^*N$ (10.8) et des formules d'adjonction de 10.

12.2 Le faisceau abélien $\mathcal{H}om_A(M,N)$ est appelé le <u>faisceau des morphismes de A-Modules de M dans N</u>. C'est un bifoncteur en M et N. Il résulte de sa définition et de (10.2) qu'il transforme les limites projectives de l'argument N (resp. les limites inductives de M) en limites projectives de faisceaux abéliens. En particulier il est exact à gauche en ses deux arguments.

<u>Proposition</u> 12.3 : <u>Soient</u> (E,A) <u>un topos annelé</u>, M <u>et</u> N <u>deux A-Modules à droite</u> (<u>resp. à gauche</u>), X <u>un objet de</u> E :

a) <u>On a des isomorphismes canoniques</u> :

$$\mathcal{H}om_A(M,N)(X) \simeq \mathrm{Hom}_A(M,j_{X*}j_X^*N) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^*M,j_X^*N) \simeq \mathrm{Hom}_A(j_{X!}j_X^*M,n)$$

b) <u>On a un isomorphisme canonique</u> :

$$\Phi_X : j_X^* \mathcal{H}om_A(M,N) \simeq \mathcal{H}om_{A|X}(j_X^*M,j_X^*N)$$

<u>Soit de plus</u> P <u>un</u> $A|X$<u>-Module à droite</u> (<u>resp. à gauche</u>) :

c) <u>On a un isomorphisme canonique</u> :

$$j_{X*}\mathcal{H}om_{A|X}(j_X^*M,P) \simeq \mathcal{H}om_A(M,j_{X*}P)$$

d) <u>On a un isomorphisme canonique</u> :

$$\Xi_X : \mathcal{H}om_A(j_{X!}P,N) \simeq j_{X*}\mathcal{H}om_{A|X}(P,j_X^*N)$$

Les isomorphismes de a) résultent de (12.1.2), de l'isomorphisme $\mathcal{H}om_E(X,N) \simeq j_{X*}j_X^*N$ (10.8) et des formules d'adjonction de 10.

Démontrons d). Pour tout objet Y de $E_{/X}$ on a la suite d'isomorphismes :

$\mathrm{Hom}(Y,j_X^*\mathcal{H}om_A(M,N) \simeq \mathrm{Hom}(j_{X!}Y,\mathcal{H}om_A(M,N))$ (adjonction pour les faisceaux d'ensembles)

$$\mathrm{Hom}(j_{X!}Y, \mathcal{H}om_A(M,N)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathcal{H}om_E(j_{X!}Y,N)) \qquad (12.2.1)$$

$$\mathrm{Hom}(M, \mathcal{H}om_E(j_{X!}Y,N)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, j_{X*}\mathcal{H}om_{E_{/X}}(Y, j_X^*N)) \qquad (10.7)$$

$$\mathrm{Hom}_A(M, j_{X*}\mathcal{H}om_{E_{/X}}(Y, j_X^*N)) \simeq \mathrm{Hom}_{A/X}(j_X^*M, \mathcal{H}om_E(j_X^*N)) \qquad (11.2.2.1)$$

$$\mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^*M, \mathcal{H}om_E(Y, j_X^*N)) \simeq \mathrm{Hom}(Y, \mathcal{H}om_{A|X}(j_X^*M, j_X^*M)) \qquad (12.2.1)$$

Démontrons c). Pour tout objet Y de E, on a la suite d'isomorphismes:

$$\mathrm{Hom}(Y, j_{X*}\mathcal{H}om_{A|X}(j_X^*M,P)) \simeq \mathrm{Hom}(j_X^*Y, \mathcal{H}om_{A|X}(j_X^*M;P)) \qquad \text{(adjonction)}$$

$$\mathrm{Hom}(j_X^*Y, \mathcal{H}om_{A|X}(j_X^*M,P)) \simeq \mathrm{Hom}_{A/X}(j_X^*M, \mathcal{H}om_{E_{/X}}(j_X^*Y,P)) \qquad (12.2.1)$$

$$\mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^*M, \mathcal{H}om_{E_{/X}}(j_X^*Y,P)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, j_{X*}\mathcal{H}om_{E_{/X}}(j_X^*Y,P)) \qquad (11.2.2.1)$$

$$\mathrm{Hom}_A(M, j_{X*}\mathcal{H}om_{E_{/X}}(j_X^*Y,P)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathcal{H}om_E(Y, j_{X*}P)) \qquad (10.3)$$

$$\mathrm{Hom}_A(M, \mathcal{H}om_E(Y, j_{X*}P)) \simeq \mathrm{Hom}(Y, \mathcal{H}om_A(M, j_{X*}P)) \qquad (12.2.1)$$

Démontrons d). Pour tout objet Y de E, on à la suite d'isomorphismes :

$$\mathrm{Hom}(Y, \mathcal{H}om_A(j_{X!}P,N)) \simeq \mathrm{Hom}_A(j_{X!}P, \mathcal{H}om_E(Y,N)) \qquad (12.2.1)$$

$$\mathrm{Hom}_A(j_{X!}P, \mathcal{H}om_E(Y,N)) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(P, j_X^*\mathcal{H}om_E(Y,N)) \qquad (11.3.1)$$

$$\mathrm{Hom}_{A/X}(P, j_X^*\mathcal{H}om_E(Y,N)) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(P, \mathcal{H}om_{E_{/X}}(j_X^*Y, j_X^*N)) \qquad (10.7)$$

$$\mathrm{Hom}_{A/X}(P, \mathcal{H}om_{E_{/X}}(j_X^*Y, j_X^*N)) \simeq \mathrm{Hom}(j_X^*Y, \mathcal{H}om_{A|X}(P, j_X^*N)) \qquad (12.2.1)$$

$$\mathrm{Hom}(j_X^*Y, \mathcal{H}om_{A|X}(P, j_X^*N)) \simeq \mathrm{Hom}(Y, j_{X*}\mathcal{H}om_{A|X}(P, j_X^*N)) \qquad \text{(adjonction)}$$

<u>Corollaire</u> 12.4 : <u>Soient</u> C <u>un</u> <u>U</u>-<u>site</u> , A' <u>un</u> <u>U</u>-<u>préfaisceau d'anneaux sur</u> C , M <u>un</u> <u>U</u>-<u>préfaisceau</u> <u>de</u> <u>A'-modules</u> (<u>à gauche pour fixer les idées</u>), N <u>un</u> <u>U</u>-<u>faisceau</u> <u>de</u> <u>A'-modules</u> (<u>à gauche</u>). <u>Notons</u> A <u>le faisceau associé à</u> A' , <u>de sorte que les faisceaux</u> N <u>et</u> $\underline{a}M$ <u>(faisceau associé à</u> M) <u>sont des</u> <u>A-Modules</u>. <u>Le préfaisceau</u> $X \longmapsto \mathrm{Hom}_{A'|X}(j_X^*M, j_X^*N)$ <u>est un</u> <u>U</u>-<u>faisceau</u> <u>abélien canoniquement isomorphe à</u> $\mathcal{H}om_A(\underline{a}M,N)$. En effet il résulte de III 5.5. et III 2.3. que le foncteur de localisation à $C_{/X}$ commute avec les foncteurs faisceaux associés (pour C et $C_{/X}$). Par suite, on a des isomorphismes fonctoriels en l'objet variable X de C :

$$\mathrm{Hom}_{A'|X}(j_X^*M, j_X^*N) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(\underline{a}j_X^*M, j_X^*N) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^*\underline{a}M, j_X^*N) \simeq \mathcal{H}om_A(\underline{a}M,N)(X) \ .$$

Corollaire 12.5 : Soient E un topos, A, B, C trois faisceaux d'anneaux sur E, M un A-B biModule, N un A-C biModule. Le faisceau abélien $\mathcal{H}om_A(M,N)$ est muni canoniquement d'une structure de B-C biModule. En particulier lorsque A est un faisceau d'anneaux commutatifs et lorsque M et N sont des A-Modules, $\mathcal{H}om_A(M,N)$ est muni canoniquement d'une structure de A-Module. Les isomorphismes canoniques b), c), d) de 12.3 sont des isomorphismes de bi-Modules.

Nous nous bornerons à donner des indications. Pour tout objet X de E, on a $\mathcal{H}om_A(M,N)(X) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^*M, j_X^*N)$ (12.3). Par suite, le groupe commutatif $\mathcal{H}om_A(M,N)(X)$ est muni canoniquement d'une structure de $B(X)$-$C(X)$ bimodule (11.1.3) dont on vérifie qu'elle est fonctorielle en X. Les autres assertions sont laissées au lecteur.

Corollaire 12.6 : Soient (E,A) un topos annelé, X un objet de A, N un A-Module (à gauche pour fixer les idées). On a des isomorphismes canoniques de A-Modules :

$$\mathcal{H}om_E(X,N) \simeq j_{X*}j_X^*N \simeq \mathcal{H}om_A(A_X,N) \quad ;$$

la structure de A-Module sur $\mathcal{H}om_A(A_X,N)$ provenant de la structure de biModule sur A_X (11.3.4).

Le premier isomorphisme résulte de 10.7, le deuxième de l'isomorphisme de A-Modules $N \simeq \mathcal{H}om_A(A,N)$ et de 12.3.

Proposition 12.7 : Soient (E,A) un topos annelé, M un A-Module à droite et N un A-Module à gauche. Le foncteur qui à tout faisceau abélien P associe le groupe commutatif $\mathrm{Hom}_A(M,\mathcal{H}om_{\underline{Z}}(N,P))$ est représentable par un faisceau abélien noté $M \otimes_A N$ et appelé le produit tensoriel sur A de M et de N.

On a une injection canonique de $\mathrm{Hom}_A(M,\mathcal{H}om_Z(N,P))$ dans l'ensemble $\mathrm{Hom}(M,\mathcal{H}om(N,P)) \simeq \mathrm{Hom}(M\times N,P)$; On constate aussitôt, en revenant aux définitions, qu'un morphisme f de faisceaux d'ensembles de $M\times N$ dans P provient d'une élément de $\mathrm{Hom}_A(M,\mathcal{H}om_Z(N,P))$ si et seulement si pour tout objet X de E, $f(X) : M(X) \times N(X) \longrightarrow P(X)$ est une application $A(X)$-bilinéaire de $M(X) \times N(X)$ dans $P(X)$. Appelons morphisme A-bilinéaire les morphismes de faisceaux d'ensembles de $M\times N$ dans P qui possèdent cette propriété. Il s'agit donc de représenter le foncteur des morphismes A-bilinéaires de $M\times N$ dans P . Pour cela on procède comme dans le cas ordinaire i.e. comme dans le cas où E est le topos ponctuel. Considérons les huit morphismes :

(i) : $M\times M\times N \longrightarrow M\times N$ $\quad 1 \leq i \leq 3$

(i) : $M\times N\times N \longrightarrow M\times N$ $\quad 4 \leq i \leq 6$

(i) : $M\times A\times N \longrightarrow M\times N$ $\quad 7 \leq i \leq 8$

définis par les formules :

(1) $\quad (m_1,m_2,n) \longmapsto (m_1+m_2,n)$

(2) $\quad (m_1,m_2,n) \longmapsto (m_1,n)$

(3) $\quad (m_1,m_2,n) \longmapsto (m_2,n)$

(4) $\quad (m,n_1,n_2) \longmapsto (m,n_1+n_2)$

(5) $\quad (m,n_1,n_2) \longmapsto (m,n_1)$

(6) $\quad (m,n_1,n_2) \longmapsto (m,n_2)$

(7) $\quad (m,a,n) \longmapsto (ma,n)$

(8) $\quad (m,a,n) \longmapsto (m,an)$;

où la formule (i) décrit l'application $(i)(X)$ pour les objets variables X de E . Notons L le foncteur "faisceau abélien libre engendré ". Il est clair que le plus grand quotient (au sens des faisceaux abéliens de $L(M\times N)$ qui égalise le morphisme $L(1)$ à $L(2)+L(3)$, $L(4)$ à $L(5)+L(6)$ et $L(7)$ à $L(8)$ représente le foncteur des morphismes A-bilinéaires de $M\times N$ dans P .

12.8. On constate que le foncteur $P \longmapsto \mathrm{Hom}_A(N,\mathcal{H}om_Z(M,P))$ est aussi canoniquement isomorphe au foncteur des applications A-bilinéaires de $M\times N$ dans P . Par suite le produit tensoriel $M\otimes_A N$ représente aussi le foncteur $\mathrm{Hom}_A(N,\mathcal{H}om_Z(M,P))$. On a donc des isomorphismes, fonctoriel en tous les arguments :

(12.8.1) $\quad \mathrm{Hom}_Z(M\otimes_A N,P) \simeq \mathrm{Hom}_A(M,\mathcal{H}om_Z(N,P))$,

(12.8.2) $\quad \mathrm{Hom}_Z(M\otimes_A N,P) \simeq \mathrm{Hom}_A(N,\mathcal{H}om_Z(M,P))$.

12.9 Il résulte de (12.8.1), ou bien de (12.8.2) et de (12.2) que le foncteur $\otimes_A$ commute aux limites inductives en ses deux arguments.

Proposition 12.10 : Soient C un U-site, A' un préfaisceau d'anneaux sur C, M' (resp. N') un A'-module à droite (resp. à gauche), A,M,N les faisceaux associés à A', M' et N' respectivement. Le faisceau associé au préfaisceau $X \longmapsto M'(X) \otimes_{A(X)} N'(X)$ (X ob C) est canoniquement isomorphe au faisceau $M \otimes_A N$.

Le préfaisceau $X \mapsto M'(X) \otimes_{A'(X)} N'(X)$ peut se construire à partir des préfaisceaux M', N' et A' par les cpérations indiquées dans la démonstration de 12.7. Comme le foncteur "faisceau associé" commute aux limites projectives et inductives finies et aux foncteurs "objet abélien libre engendré", la formation du produit tensoriel commute au foncteur "faisceau associé".

Proposition 12.11 : Soient (E,A) un topos annelé, M un A-Module à droite, N un A-Module à gauche, X un objet de E.

a) On a un isomorphisme canonique

$$j_X^*(M \otimes_A N) \simeq (j_X^* M) \otimes_A (j_X^* N) .$$

Soient de plus P un A/X-Module à droite et Q un A/X module à gauche.

b) On a des isomorphismes canoniques (formules de projection) :

$$j_{X!}(P \otimes_{A|X} j_X^* N) \simeq (j_{X!} P) \otimes_A N$$

$$j_{X!}(j_X^* M \otimes_{A|X} Q) \simeq M \otimes_A (j_{X!} Q) .$$

Démontrons a). Pour tout faisceau abélien R sur $E_{/X}$, on a la suite d'isomorphismes fonctoriels en R :

$$\mathrm{Hom}_Z(j_X^*(M \otimes_A N), R) \simeq \mathrm{Hom}_Z(M \otimes_A N, j_{X*} R) \qquad (11.2.2.1)$$

$$\mathrm{Hom}_Z(M \otimes_A N, j_{X*} R) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathcal{H}om_Z(N, j_{X*} R)) \qquad (12.8.1)$$

$$\mathrm{Hom}_A(M, \mathcal{H}om_Z(N, j_{X*} R)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, j_{X*} \mathcal{H}om_Z(j_X^* N, R)) \qquad (12.3)$$

$$\mathrm{Hom}_A(M, j_{X*} \mathcal{H}om_Z(j_X^* N, R)) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^* M, \mathcal{H}om_Z(j_X^* N, R)) \qquad (11.2.2.1)$$

$$\mathrm{Hom}_{A/X}(j_X^* M, \mathcal{H}om_Z(j_X^* N, R)) \simeq \mathrm{Hom}_Z(j_X^* M \otimes_A j_X^* N, R) \qquad (12.8.1)$$

Exhibons le premier isomorphisme de b). Pour tout faisceau abélien R, on a une suite d'isomorphismes fonctoriels en R :

$$\mathrm{Hom}_Z(j_{X!}(P\otimes_{A|X}j_X^*N),R) \simeq \mathrm{Hom}_Z(P\otimes_{A|X}j_X^*N,j_X^*R) \qquad (11.3.1)$$

$$\mathrm{Hom}_Z(P\otimes_{A|X}j_X^*N,j_X^*R) \simeq \mathrm{Hom}_{A/X}(P,\mathcal{H}om_Z(j_X^*N,j_X^*R)) \qquad (12.8.1)$$

$$\mathrm{Hom}_{A|X}(P,\mathcal{H}om_Z(j_X^*N,j_X^*R)) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(P,j_X^*\mathcal{H}om_Z(N,R)) \qquad (12.3)$$

$$\mathrm{Hom}_{A|X}(P,j_X^*\mathcal{H}om_Z(N,R)) \simeq \mathrm{Hom}_A(j_{X!}P,\mathcal{H}om_Z(N,R)) \qquad (11.3.1)$$

$$\mathrm{Hom}_A(j_{X!}P,\mathcal{H}om_Z(N,R)) \simeq \mathrm{Hom}_Z(j_{X!}P\otimes_A N,R) \qquad (12.8.1)$$

Le deuxième isomorphisme s'obtient de manière analogue à l'aide de (12.8.2).

Corollaire 12.12 : *Soient E un topos, A, B, C trois faisceaux d'anneaux sur E, M un B-A biModule, N un A-C biModule. Le faisceau abélien $M\otimes_A N$ est muni canoniquement d'une structure de B-C biModule. En particulier, lorsque A est un faisceau d'anneaux commutatifs et lorsque M et N sont des A-Modules, $M\otimes_A N$ est muni canoniquement d'une structure de A-Module. Les isomorphismes de 12.9 sont des isomorphismes de biModules.*

Pour tout objet X de E, j_X^*M est un $A|X$-Module à droite sur lequel opère, à gauche, l'anneau $B(X)$ et de même, j_X^*N est un A/X-Module à gauche sur lequel opère, à droite, $C(X)$. Par fonctorialité, le faisceau abélien $j_X^*M\otimes_{A/X}j_X^*N \simeq j_X^*(M\otimes_A N)$ est muni d'une structure de $B(X)$-$C(X)$ "objet", structure qui varie fonctoriellement en X. Par suite $M\otimes_A N$ est muni d'une structure de B-C biModule. Cette structure de $B(X)$-$C(X)$ objet sur $j_X^*(M\otimes_A N)$ se reflète de façon évidente sur le foncteur "morphisme A-bilinéaire". On constate alors que, lorsque A est commutatif et lorsque M et N sont des A-Modules, les structures de A-Modules à droite et à gauche qu'on obtient sont "égales " et par suite $M\otimes_A N$ est dans ce cas un A-Module. La dernière assertion est laissée au lecteur.

Corollaire 12.13 : *Soient (E,A) un topos annelé, M un A-Module à* gauche (resp. à droite), X un objet de E. On a (avec la notation A_X de 11.3.3) un isomorphisme canonique

$$A_X \otimes_A M \simeq j_{X!} j_X^* M \quad (\text{resp. } M \otimes_A A_X \simeq j_{X!} j_X^* M)) .$$

résulte des formules de projections (12.11).

Proposition 12.14 : Soient E un topos, A et B deux faisceaux d'anneaux sur E, M un A-Module à droite, N un A-B biModule, P un B-Module à droite. On a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_B(M \otimes_A N, P) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathcal{H}om_B(N,P)) \quad .$$

De (12.8.1) on tire un morphisme A-bilinéaire canonique $\mathcal{H}om_Z(N,P) \times N \to P$; d'où, en se restreignant à $\mathcal{H}om_B(N,P) \times N$ (qui est un sous-faisceau), un morphisme A-bilinéaire $\mathcal{H}om_B(N,p) \times N \to P$ dont on vérifie immédiatement qu'il est B-linéaire sur le deuxième facteur. On a donc un morphisme canonique de B-Modules $\mathcal{H}om_B(N,P) \otimes_A N \longrightarrow P$; d'où une application canonique, fonctorielle en M :

(12.14.1) $$\mathrm{Hom}_A(M, \mathcal{H}om_B(N,P)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A N, P) \quad .$$

Montrons que ce morphisme de foncteurs est un isomorphisme. Comme les deux membres transforment les limites inductives de M en limites projectives, il suffit de montrer que (12.14.1) est un isomorphisme, lorsque M parcourt une famille génératrice de la catégorie E_A. Il suffit donc de montrer que (12.14.1) est un isomorphisme lorsque $M = A_X$ où X est un objet de E. . La vérification est alors immédiate.

13. Morphisme de topos annelés

Définition 13.1 : Soient (E,A) et (E',A') deux topos annelés. Un morphisme de topos annelé $u : (E,A) \longrightarrow (E',A')$ est un couple (m,θ) où $m : E \longrightarrow E'$ est un morphisme de topos (IV.3.1) et $\theta : m^*A' \longrightarrow A$ est un morphisme d'Anneaux.

13.1.1. Comme le foncteur $m^* : E' \longrightarrow E$ est adjoint à gauche au foncteur $m_* : E \longrightarrow E'$, se donner un morphisme de topos annelés $(m,\theta) : (E,A) \longrightarrow (E',A')$ revient à se donner un morphisme de topos $m : E \longrightarrow E'$ et un morphisme de faisceaux d'anneaux $\theta : A' \longrightarrow m_*A$.

13.2. A un morphisme de topos annelés $u = (m,\theta) : (E,A) \longrightarrow (E',A')$, on associe deux foncteurs remarquables entre les catégories de Modules :

13.2.1 <u>Le foncteur image directe pour les Modules</u> : Soit M un A-Module à gauche (resp. à droite). L'objet m_*M est muni canoniquement d'une structure de m_*A-Module ; d'où, par restriction des scalaires par le morphisme canonique $\theta' : A' \longrightarrow m_*A$, un A'-Module noté $u_*(M)$ et appelé <u>l'image directe de</u> M <u>par le morphisme</u> u .

13.2.2 <u>Le foncteur image réciproque pour les Modules</u> : Soit N un A'-Module à gauche (resp. à droite). L'objet m^*N de E est muni canoniquement d'une structure de m^*A'-Module à gauche (resp. à droite). Le A-Module à gauche $A\otimes_{m^*A'}m^*N$ (resp. à droite $m^*N\otimes_{m^*A'}A$) où A est muni de la structure de m^*A'-Module définie par $\theta : m^*A' \longrightarrow A$, est noté u^*N et est appelé l'<u>image réciproque du Module</u> N <u>par le morphisme de topos annelé</u> u .

13.2.3. On notera que pour tout A-Module M , le faisceau d'ensembles et le faisceau abélien sous-jacent à u_*M est le faisceau m_*M . Aussi emploie-t-on le plus souvent la notation u_* pour désigner le foncteur m_* : image directe pour les faisceaux d'ensembles. En revanche pour un A'-Module N , le faisceau d'ensembles ou le faisceau abélien sous-jacent à u^*N n'est ni égal ni isomorphe en général à m^*N (sauf toutefois lorsque θ est un isomorphisme). Il y a donc lieu de distinguer entre l'image réciproque pour les Modules et l'image réciproque pour les faisceaux d'ensembles ou les faisceaux abéliens. On utilise le plus souvent la notation $u^{-1} : E' \longrightarrow E$ pour désigner le foncteur m^* image inverse pour les faisceaux d'ensembles. Le foncteur u^{-1} est appelé le foncteur <u>image réciproque "ensembliste"</u> par le morphisme de topos annelé u , par opposition avec l'image réciproque "au sens modules" u^* .

<u>Définition 13.3.</u> : <u>Soient</u> (C,A) <u>et</u> (C',A') <u>deux</u> <u>U-sites</u> <u>annelés</u>. <u>Un morphisme de sites annelés</u> $u : (C,A) \longrightarrow (C',A')$ <u>est un couple</u> (m,θ) <u>où</u> m <u>est un morphisme du site</u> C <u>dans le site</u> C' (IV 4.9) <u>et</u>

$\theta : m^*A' \longrightarrow A$ un morphisme d'Anneaux.

13.3.1. Un morphisme de topos annelé est un morphisme de $\underline{U}$-sites annelés. Un morphisme de sites annelés donne naissance à un morphisme entre les topos annelés correspondants (11.1.1 et IV 4.9.1).

Proposition 13.4 : Soit $u : (E,A) \longrightarrow (E',A')$ un morphisme de topos annelés.

a) Pour un A-Module à gauche (resp. à droite) variable M, et pour un A'-Module à gauche (resp. à droite) variable N, on a des isomorphismes bifonctoriels canoniques (dits isomorphismes d'adjonction)

(13.4.1) $\quad \mathrm{Hom}_A(u^*N,M) \simeq \mathrm{Hom}_{A'}(N,u_*M)$,

(13.4.2) $\quad u_*\mathcal{H}om_A(u^*N,M) \simeq \mathcal{H}om_{A'}(N,u_*M)$.

b) Pour un objet variable X de E', on a un isomorphisme canonique, fonctoriel en X :

(13.4.3) $\quad u^*A'_X \longrightarrow A_{u^{-1}(X)}$,

où A'_X et $A_{u^{-1}(X)}$ désignent les Modules libres engendrés (11.3.3).

c) Lorsque A' est commutatif et lorsque le morphisme canonique $u^{-1}A' \longrightarrow A$ est central (resp. lorsque le morphisme canonique $u^{-1}A' \longrightarrow A$ est un isomorphisme) on a, pour un A'-Module à droite M variable et un A'-Module à gauche N variable, un isomorphisme bifonctoriel canonique :

(13.4.4) $\quad u^*M \otimes_A u^*N \simeq u^*(M \otimes_{A'} N)$

(resp. (13.4.5) $\quad u^*M \otimes_A u^*N \simeq u^{-1}(M \otimes_{A'} N)$).

On a tout d'abord un isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}_A(u^*N,M) \simeq \mathrm{Hom}_{u^{-1}A'}(u^{-1}N,M)$ (12.12), puis un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{u^{-1}A'}(u^{-1}N,M) \simeq \mathrm{Hom}_{A'}(N,u_*M)$ (III 1.7) ; d'où 13.4.1. Exhibons l'isomorphisme 13.4.2. Pour tout objet X de E', on a la suite d'isomorphismes fonctoriels :

$\mathrm{Hom}_{E'}(X,u_*\mathcal{H}om_A(u^*N,M)) \simeq \mathrm{Hom}(u^{-1}X,\mathcal{H}om_A(u^*N,M))$ (adjonction),

$\mathrm{Hom}_A(u^*N,\mathcal{H}om_E(u^{-1}X,M))$ " " " " (12.1) ,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_A(u^*N,\mathcal{H}om_E(u^{-1}X,M)) \simeq \mathrm{Hom}_{A'}(N,u_*\mathcal{H}om_E(u^{-1}X,M)) && (13.4.1)\ ,\\
&\mathrm{Hom}_{A'}(N,\mathcal{H}om_{E'}(X,u_*M)) \quad " \quad " \quad " \quad " && (10.3.1)\ ,\\
&\quad " \quad " \quad " \quad " \qquad \mathrm{Hom}_{A'}(X,\mathcal{H}om_{A'}(N,u_*M)) && (12.1)\ .
\end{aligned}$$

La formule 13.4.5 s'obtient alors à partir de la formule 13.3.2. par adjonction (définition du produit tensoriel (12.7)). La formule 13.4.4 se déduit de 13.4.5 en utilisant la commutativité du produit tensoriel lorsque l'anneau de base est commutatif (12.8). Enfin, pour démontrer 13.4.3, on considère la suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_A(u^*A'_X,M) \simeq \mathrm{Hom}_{A'}(A'_X,u_*M) && (13.4.1)\ ,\\
&\mathrm{Hom}_{E'}(X,u_*M) \simeq \quad " \quad " \quad " && (11.3.3)\ ,\\
&\quad " \quad " \quad " \simeq \mathrm{Hom}_E(u^{-1}X,M) && (\text{adjonction}),\\
&\mathrm{Hom}_A(A_{u^{-1}X},M) \simeq \quad " \quad " \quad " && (11.3.3)\ .
\end{aligned}$$

<u>Corollaire</u> 13.5 : <u>Soient</u> (E,A) <u>un topos annelé</u>, $x : P \longrightarrow E$ <u>un point de</u> E , $F \longmapsto F_x$ <u>le foncteur fibre associé</u> (IV 6.1). <u>Le foncteur fibre en</u> x <u>transforme le produit tensoriel des</u> A-<u>Modules en produit tensoriel (ordinaire) des</u> A_x-<u>modules</u>.

Le produit tensoriel dans P est le produit tensoriel ordinaire des modules (P le topos ponctuel est la catégorie des ensembles). L'assertion résulte donc de (13.4.4).

<u>Corollaire</u> 13.6 <u>Soit</u> $u : (E,A) \longrightarrow (E',A')$ <u>un morphisme de topos annelés</u>. <u>Le foncteur</u> u_* <u>image directe pour les Modules à droite ou à gauche commute aux limites projectives et en particulier est exact à gauche</u>. <u>Le foncteur</u> u^* <u>image réciproque pour les Modules à droite ou à gauche commute aux limites inductives et en particulier est exact à droite</u>.

Ceci résulte de la formule 13.4.1 (I 2.11).

13.7 On notera que le foncteur u^* , image réciproque pour les Modules, n'est pas, en général, exact, alors que le foncteur u^{-1} , image réciproque ensembliste, est exact. On peut cependant affirmer l'exactitude de u^* lorsque le morphisme canonique $u^{-1}A' \longrightarrow A$ est plat (à droite ou à gauche) (V 1.8). C'est en particulier le cas lorsque le morphisme canonique $u^{-1}A' \longrightarrow A$ est un isomorphisme.

13.8 Soient C un $\underline{U}$-site , A' un préfaisceau d'anneaux sur C , et notons A le faisceau associé à A' . La catégorie des préfaisceaux de A'-modules qui sont des faisceaux est équivalente à la catégorie des A-Modules. On utilise parfois la notation $\mathrm{Hom}_{A'}(M,N)$ pour désigner le groupe $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ (11.1.2). De même, et abusivement, on utilise les notations $\mathcal{H}om_{A'}(M,N)$ et $M \otimes_{A'} N$ pour désigner les faisceaux $\mathcal{H}om_A(M,$ et $M \otimes_A N$. Lorsque $A' = k_E$ est le préfaisceau constant, défini par un anneau ordinaire k , on écrit aussi $\mathcal{H}om_k$, $\otimes_k$ au lieu de $\mathcal{H}om_{k_E}$, $\otimes_{k_E}$

Exercice 13.9 Topos localement annelés ; cf. [9] pour plus de renseignements dans l'ordre d'idées qui suit).

Soit $(E,\underline{O}_E)$ un topos commutativement annelé. Pour $X \in \mathrm{ob}\, E$ et $f \in \underline{O}_E(X)$, soit X_f le plus grand sous-objet de X sur lequel f soit inversible.

a) Montrer que pour $X' \in \mathrm{ob}\, E_{/X}$, $f_{X'}$ est inversible si et seulement si le morphisme structural $X' \longrightarrow X$ se factorise par X_f , et que pour $f,g \in \underline{O}_E(X)$, on a

$$X_{fg} = X_f \cap X_g \quad .$$

b) Montrer que les conditions suivantes (i) à (iii) sont équivalentes :

(i) Pour $X \in \mathrm{ob}\, E$ et $f,g \in \underline{O}_E(X)$, on a

$$X_{f+g} \subset \mathrm{Sup}(X_f,\, X_g)$$

(ii) Pour $X \in \mathrm{ob}\, E$ et $f,g \in \underline{O}_E(X)$ tels que $f + g$ soit inversible, on a $X = \mathrm{Sup}(X_f,\, X_g)$.

(iii) Pour $X \in \mathrm{ob}\, E$ et $f \in \underline{O}_E(X)$, on a

$$X = \mathrm{Sup}(X_f,\, X_{1-f}) \quad .$$

Montrer que ces conditions impliquent la condition suivante (iv), et sont équivalentes à cette dernière si E a suffisamment de points :

(iv) Pour tout point p de E, l'anneau fibre $\underline{O}_{E,p}$ est un anneau local.

Lorsque les conditions équivalentes (i) à (iii) sont satisfaites, on dira que $(E,\underline{O}_E)$ est un topos localement annelé, et on dit de même qu'un site annelé est un site localement annelé si le topos annelé correspondant est un topos localement annelé.

c) Soient $(E,\underline{O}_E)$ et $(E',\underline{O}_{E'})$ deux topos localement annelés, et f un morphisme de topos annelés du premier dans le second. Montrer que la condition (i) suivante implique la condition (ii) et lui est équivalente si E a suffisamment de points :

(i) Pour tout $X \in \mathrm{ob}\, E'$ et $s' \in \underline{O}_{E'}(X')$, posant $X = f^{-1}(X)$, $s = f^{*}(s')$, on a

$$X'_{s'} = f^{-1}(X_s) \quad .$$

(ii) Pour tout point p de E, posant $p' = f(p)$, l'homomorphisme naturel sur les fibres

$$\underline{O}_{E',p'} \longrightarrow \underline{O}_{E,p}$$

est un homomorphisme local d'anneaux locaux.

Lorsque la condition (i) est satisfaite, on dira que f est un morphisme de topos localement annelés, ou encore un morphisme admissible de topos localement annelés si une confusion est à craindre. On désigne par Homtoplocan(E,E') la sous-catégorie pleine de la catégorie Homtopan(E,E') de tous les morphismes de topos annelés de E dans E' définie par les morphismes admissibles de E dans E'.

d) Supposons que $(E,\underline{O}_E)$ soit le topos annelé associé à un espace topologique annelé $(X,\underline{O}_X)$ (IV 2.1). Montrer que pour que $(E,\underline{O}_E)$ soit localement annelé, il faut et il suffit que $(X,\underline{O}_X)$ soit localement annelé, i.e. que pour tout $x \in X$, la fibre $\underline{O}_{X,x}$ soit un anneau local. (Noter que dans le critère (iv) de b), il suffit de prendre le point p dans une famille conservatrice de points de E).

Soit $f : (X,\underline{O}_X) \longrightarrow (X',\underline{O}_{X'})$ un morphisme d'espaces annelés, où $\underline{O}_X$ et $\underline{O}_{X'}$ sont des faisceaux d'anneaux locaux. Montrer que le morphisme de topos annelés correspondant $\mathrm{Top}(X,\underline{O}_X) \longrightarrow \mathrm{Top}(X',\underline{O}_{X'})$ est admissible si et seulement si il en est de même pour le morphisme f , i.e; si et seulement si pour tout $x \in X$, $\underline{O}_{X',f(x)} \longrightarrow \underline{O}_{X,x}$ est un homomorphisme <u>local</u> d'anneaux locaux.

e) Soient $(E,\underline{O}_E)$ et $(E',\underline{O}_{E'})$ deux topos localement annelés, tels que E ait suffisamment de points et que $(E',\underline{O}_{E'})$ soit équivalent au topos annelé défini par un <u>schéma</u> $(X',\underline{O}_{X'})$; prouver que la catégorie <u>Homtoplocan</u>(E,E') est équivalente à une catégorie <u>discrète</u>, i.e. que c'est un groupoïde (tout morphisme est un isomorphisme) rigide (les groupes d'automorphismes des objets sont les groupes unité). (Hint : se ramener au cas où $(E,\underline{O}_E)$ est le topos ponctuel annelé par un corps). On se rappellera que, par contre, <u>Homtop</u>(E,E') n'est pas en général équivalent à une catégorie discrète, même si E et E' sont des topos définis par des schémas (et même si E est le topos ponctuel), cf. 4.2.3).

f) Soient E un topos localement annelé, P le topos annelé défini par l'espace annelé $\mathrm{Spec}\, k$, où k est un corps. Montrer que les morphismes admissibles de topos localement annelés $P \longrightarrow E$ correspondent aux couples (p,u) d'un point p de E , et d'une injection de $k(p)$ dans k , où $k(p)$ est le corps résiduel de l'anneau local $\underline{O}_{E,p}$. Généraliser en un énoncé exhibant les morphismes admissibles d'un topos localement annelé ponctuel dans E (généralisant EGA I 2.4.4).

On appelle <u>point géométrique d'un topos localement annelé</u> E tout morphisme admissible dans E du topos localement annelé défini par un espace annelé de la forme $\mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps <u>algébriquement clos</u>. Définir la <u>catégorie des points géométriques de</u> E (sous-entendu: correspondants à des corps $k \in \underline{U}$), notée <u>Ptgéom</u>(E) , et un foncteur canonique <u>Ptgéom</u>$(E) \longrightarrow$ <u>Point</u>(E). Montrer que ce foncteur est fidèle si et seulement si E n'a pas de point i.e. Point(E) est la catégorie vide.

g) Soient E un $\underline{U}$-topos , V un univers tel que $U \in V$. Définir une 2-catégorie $(\underline{V}\text{-}\underline{U}\text{-Top})_{/E}$ en termes de l'objet E de la 2-catégorie $(\underline{V}\text{-}\underline{U}\text{-Top})$ (3.3.1), en s'inspirant de 5.14 a). Lorsque E est annelé par un Anneau A , définir de même une 2-catégorie $(V\text{-}\underline{U}\text{-Topan})_{/E}$, et lorsque E est localement annelé, utilisant la notion de morphisme admissible (cf. c)), définir une 2-catégorie $(\underline{V}\text{-}\underline{U}\text{-Topanloc})_{/E}$, admettant Ptgéom(E) (cf. f)) comme sous-catégorie pleine.

14. Modules sur un topos défini par recollement

14.1 Soient (E,A) un topos annelé, U un sous-topos ouvert de E , F le sous-topos fermé complémentaire, $j : U \longrightarrow E$ et $i : F \longrightarrow E$ les morphismes canoniques (9.3). Le topos U est annelé par j^*A (11.2.2) et le morphisme de topos i , complété de manière évidente, devient un morphisme de topos annelés. Dans ce numéro, le topos F sera annelé par le faisceau i^*A , noté $A|F$, et le morphisme j , complété de manière évidente, est alors un morphisme de topos annelés.

14.2 On a donc deux morphismes de topos annelés :

$$j : (U,A|U) \longrightarrow (E,A) \quad \text{et} \quad i : (F,A|F) \longrightarrow (E,A) ;$$

d'où cinq foncteurs entre les catégories de Modules (à gauche pour fixer les idées) correspondantes :

$$(14.2.1) \qquad \begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{\;j_!\;} & & & \\ ({}_{A|U}\mathcal{U}) & \xleftarrow{\;j^*\;} & ({}_A E) & \underset{i_*}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}} & ({}_{A|F}F) \\ & \xrightarrow{\;j_*\;} & & & \end{array}$$

Chaque foncteur du diagramme (14.2.1) est adjoint à gauche à celui qui se trouve au-dessous de lui.

14.3 On sait que le foncteur $X \longmapsto (j^*X,\ i^*X\ ;\ i^*X \longrightarrow i^*j_*\ j^*X)$ est une équivalence de E dans le topos $(U,F,\ i^*j_*)$ (9.5.4). Cette équivalence induit une équivalence entre les catégories de Modules correspondantes et par suite le foncteur $P \longmapsto (j^*P, i^*P\ ;$ $i^*P \longrightarrow i^*j_*\ j^*P)$ est une équivalence, notée Φ, de la catégorie ${}_AE$ dans la catégorie $({}_{A|U}U, {}_{A|F}F, i^*j_*)$. Les foncteurs de (14.2.1) composés avec Φ ou Φ^{-1} sont alors les foncteurs :

$$\Phi \circ j_* \quad : M \longmapsto (M, i^*j_*M\ ;\ i^*j_*M \xrightarrow{\ id\ } i^*j_*M)\ ,$$

$$j^* \circ \Phi^{-1} \quad : (M,N\ ;\ N \longrightarrow i^*j_*M) \longmapsto M\ ,$$

$$\Phi \circ j_! \quad : M \longmapsto (M,0\ ;\ 0 \longrightarrow i^*j_*M)\ ,$$

$$\Phi \circ i_* \quad : N \longmapsto (0,N\ ;\ N \longrightarrow 0)\ ,$$

$$i^* \circ \Phi^{-1} \quad : (M,N\ ;\ N \longrightarrow i^*j_*M) \longmapsto N$$

Le lecteur pourra, à titre d'exercice, expliciter les différents morphismes d'adjonction.

14.4 Notons

(14.4.1) $$i^! : {}_AE \longrightarrow {}_{A|F}F$$

le foncteur défini par la formule :

(14.4.2) $$i^! \circ \Phi^{-1}(M,N\ ;\ N \xrightarrow{\ u\ } i^*j_*M) = \mathrm{Ker}(u)\quad .$$

<u>Proposition</u> 14.5 : <u>Le foncteur</u> $i^!$ <u>est adjoint à droite au foncteur</u> i_* . <u>Le morphisme d'adjonction</u> $i_*i^! \longrightarrow \mathrm{id}$ <u>est un monomorphisme</u>. <u>Les foncteurs</u> $i^!$ (<u>pour des anneaux variables</u>) <u>commutent aux foncteurs restriction des scalaires</u>.

Il est clair que tout morphisme

$$(0,N\ ;\ 0) \longrightarrow (M,N\ ;\ N \xrightarrow{\ u\ } i^*j_*M)$$

se factorise d'une manière unique par $(0,\ \ker(u)\ ;\ 0)$; ce qui démontre la propriété d'adjonction. Les autres assertions sont triviales.

<u>Proposition</u> 14.6 : <u>Pour tout objet</u> P <u>de</u> ${}_A E$, <u>on a les suites exactes fonctorielles en</u> P :

(14.6.1) $\quad 0 \longrightarrow j_! j^* P \longrightarrow P \longrightarrow i_* i^* P \longrightarrow 0 \quad ;$

(14.6.2) $\quad 0 \longrightarrow i_! i^* P \longrightarrow P \longrightarrow j_* j^* P \quad ,$

<u>où les flèches non triviales sont les flèches d'adjonction</u>.

Remarquons d'abord qu'une suite

$$(M',N';u') \longrightarrow (M,N\ ;\ u) \longrightarrow (M'',N''\ ;\ u'')$$

de $({}_{A/U}U, {}_{A/F}F\ ;\ i^* j_*)$ est exacte si et seulement si les suites correspondantes

$$M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$$
$$N' \longrightarrow N \longrightarrow N''$$

sont exactes.

Les suites (14.6.1) et (14.6.2) sont tranformées par l'équivalence Φ en des suites du type (14.3) :

$$0 \longrightarrow (M,0\ ;\ 0) \longrightarrow (M,N\ ;\ u) \longrightarrow (0,N\ ;\ 0) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow (0,\ker(u);0) \longrightarrow (M,N,u) \longrightarrow (M,i^* j_* M\ ;\ id)\ .$$

La vérification de l'exactitude de ces suites est triviale.

14.7 La suite exacte (14.6.2) permet d'obtenir une nouvelle interprétation du foncteur $i_! i^*$. En effet soit X un objet de E . De (14.6.2) on tire la suite exacte de groupes commutatifs :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(X,i_* i^! P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(X,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(X,j_* j^* P)\ .$$

Notons encore U l'ouvert de E , objet final du sous-topos ouvert U . Il résulte des propriétés d'adjonction des foncteurs j_* , j^* et $j_!^{ens}$ que le groupe $\mathrm{Hom}_E(X,j_* j^* P)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}_E(X\times U,P)$ et que le morphisme $\mathrm{Hom}_E(X,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(X,j_* j^*\ P)$ n'est autre que le morphisme défini par le monomorphisme $X\times U \longrightarrow X$ (IV 5). En d'autres termes (8.5.2) :

Proposition 14.8 : <u>Les sections de</u> $i_* i^! P$ <u>sur</u> $E_{/X}$ <u>sont les sections de</u> P <u>sur</u> $E_{/X}$ <u>dont le support</u> (9.3.5) <u>contient</u> F (<u>notation de</u> 5.9.1). <u>En d'autres termes</u>, $i_* i^! P$ <u>est le plus grand sous-faisceau de</u> P <u>à support contenu dans</u> F .

14.9 Par abus de langage, on dit parfois que $i_* i^! P$ est le sous-Module de P défini par les sections de P à support dans F . Il résulte de 8.5.3 que cette terminologie ne fait qu'étendre aux topos généraux une terminologie utilisée pour les topos de faisceaux sur des espaces topologiques.

Proposition 14.10. 1) <u>Le foncteur</u> $P \longmapsto i_* i^* P$ <u>est isomorphe au foncteur</u> $P \longmapsto i_* i^* A \otimes_A P$.

2) <u>Le foncteur</u> $P \longmapsto i^! i^* P$ <u>est isomorphe au foncteur</u> $P \longrightarrow \mathcal{H}om_A(i_* i^* A, P)$.

La suite exacte (14.6.1) s'écrit, dans le cas particulier où P est le A-Module A :

$$(14.10.1) \qquad 0 \longrightarrow A_U \longrightarrow A \longrightarrow i_* i^* A \longrightarrow 0$$

où A_U est le A-Module libre engendré par l'ouvert U correspondant au sous-topos ouvert U (9 et 11.3.3). Pour tout A-Module P , les A-Modules $j_! j^* P$ et $j_* j^* P$ sont canoniquement isomorphes respectivement à $A_U \otimes_A P$ et $om_A(A_U, P)$ (12.3.et 12.6). De plus, les morphismes canoniques $j_! j^* P \longrightarrow P$ et $P \longrightarrow j_* j^* P$ proviennent, modulo ces isomorphismes, du monomorphisme $A_U \longrightarrow A$. On tire donc de la suite exacte 15.10.1, deux suites exactes (12.2 et 12.11) :

$$j_! j^* P \longrightarrow P \longrightarrow i_* i^* A \otimes_A P \longrightarrow 0 \quad ,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_A(i_* i^* A, P) \longrightarrow P \longrightarrow j_* j^* P \quad ,;$$

d'où les isomorphismes annoncés par comparaison avec (14.6.1) et (14.6.2).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Artin et B. Mazur, Homotopy of varieties in the etale topology, in : Proceedings of a Conference on Local Fields, Driebergen 1966, Springer.

[2] P. Gabriel et G. Zisman, Calculus of fractions and homotopy theory, Ergebnisse der Mathematik, Bd 35.

[3] J. Giraud, Algèbre homologique non commutative : Grundlehren Springer 1971.

[4] A. Grothendieck, Sur quelques points d'Algèbre homologique, Tohoku Math. Journal, (cité [Toh]).

[5] A. Grothendieck, Fondements de la Géométrie Algébrique, (Recueil d'exposés Bourbaki 1957/62), Secrétariat mathématique, 11 rue P. Curie Paris.

[6] A. Grothendieck, Crystals and the De Rham cohomology of schemes, (notes by I. Coates et O. Jussila), in : Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North Holland Pub. Cie, 1969.

[7] A. Grothendieck, Classes de Chern des représentations linéaires des groupes discrets, in : Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North Holland Pub. Cie, 1969.

[8] R. Godement, Théorie des faisceaux, Act. Scient. Ind. n° 1 252, (1958), Hermann (Paris) (cité [TF]).

[9] M. Hakim, Topos annelés et schémas relatifs, Thèse multigraphiée, Orsay 1967.

[10] D. Mumford, Picard groups of moduli problems, in Arithmetic Algebraic Geometry, Harper's Series in Modern Mathematics.

[11] Nguyen Dinh Ngoc, Thèse Sciences Mathématiques, Paris 1963, n° 4 995.

[12] J.E. Roos, Distributivité des $\varinjlim$ par rapports aux $\varprojlim$ des topos
a) CR t.259 p. 969-972 b) CR T. 259 p. 1605-1608
c) CR t.259 p. 1801-1804 (août et septembre 1964).

[13] P. Deligne - D. Mumford, The irreductibility of the space of curves of given genus, Pub. math. n° 36 (1969).

[14] B. Mitchell, Theory of categories, Academic Press (1965).

INDEX TERMINOLOGIQUE

INDEX DES NOTATIONS